Boletín de Matemáticas
Vol. VI, No. 5, pp. 21-24

NATURALEZA DE LAS RAICES DE LA ECUACION DE TERCER GRADO

FRANCISCO LLERAS

Sea la ecuación $ax^3+bx^2+cx+d=0$ en donde suponemos sin pérdida de generalidad que $a>0$ y $d\neq 0$.

Es claro que si en la curva de la función $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ no hay máximos ni mínimos o si en el máximo y en el mínimo el valor de la función tiene el mismo signo, no habrá sino una sola raíz real.

El máximo y el mínimo estarán dados por las raíces de la ecuación $f'(x)=0$ o sea $3ax^2+2bx+c=0$. cuyas raíces son :

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-3ac}}{3a} \qquad (A)$$

Si $b^2-3ac<0$ no tendremos sino una raíz real cuyo signo es el de $(-d)$. Si $b^2-3ac=0$, $x=\frac{-b}{3a}$, tendremos tres raíces iguales reales si $f(\frac{-b}{3a})=0$ ó una sola raíz real si este valor es diferente de cero.

Pero :

$$f(-\frac{b}{3a})=-\frac{b^3}{27a^2}+\frac{b^3}{9a^2}-\frac{cb}{3a}+d$$

$$f(-\frac{b}{3a})=\frac{2b^3-9cba+27a^2d}{27a^2}$$

$$f(-\frac{b}{3a}) = \frac{2b^3 - 9a(cb - 3ad)}{27a^2} = \frac{\Delta_1}{27a^2}$$

Ahora bien, si $\Delta_1 = 0$ tendremos tres raíces iguales a $x = -\frac{b}{3a}$ y si $\Delta_1 \neq 0$ habrá solamente una raíz real con el signo de $(-d)$.

Si $b^2 - 3ac > 0$ tendremos que el valor de la función en el máximo y en el mínimo nos determinará la naturaleza de las raíces; hallemos estos valores reemplazando en la función original los valores de x por los de la ecuación (A). Haciendo los reemplazos y reagrupando términos tendremos :

$$f(x)_{min} = \frac{2b^3 - 9a(cb - 3ad) - 2(b^2 - 3ac)\sqrt{b^2 - 3ac}}{27a^2}$$

$$f(x)_{max} = \frac{2b^3 - 9a(cb - 3ad) + 2(b^2 - 3ac)\sqrt{b^2 - 3ac}}{27a^2}$$

Si llamamos $\Delta_2 = 2(b^2 - 3ac)\sqrt{b^2 - 3ac} > 0$

$$f(x)_{min} = \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{27a^2} \qquad f(x)_{max} = \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{27a^2}$$

Para resumir llamemos :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}$$

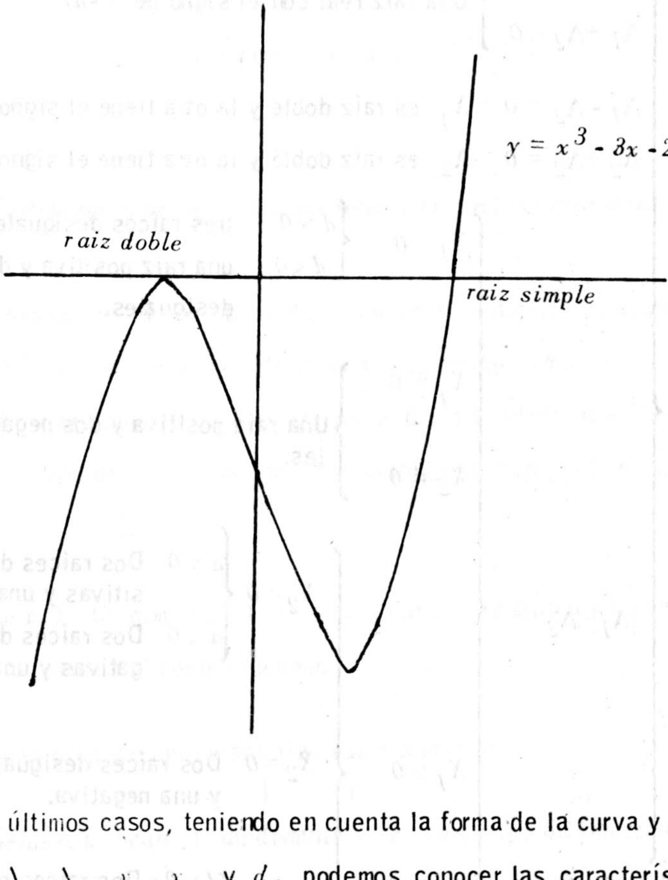
Dadas la forma de la curva y los valores de la función en el máximo y en el mínimo, podemos establecer las siguientes condiciones para las raíces :

Si $\Delta_1 - \Delta_2 = 0$ hay tres raíces reales, de las cuales la mayor vale x_1 y es doble.

Si $\Delta_1 + \Delta_2 = 0$ hay tres raíces reales de las cuales la menor es doble y vale x_2.

Si $\Delta_1 - \Delta_2 > 0$ ó $\Delta_1 + \Delta_2 < 0$ sólo hay una raíz real con el signo de $(-d)$.

Si $\Delta_1 - \Delta_2 < 0$ y $\Delta_1 + \Delta_2 > 0$ $(|\Delta_1| < \Delta_2)$ hay tres raíces reales desiguales.



Para los últimos casos, teniendo en cuenta la forma de la curva y los valores de $b^2 - 3ac$, Δ_1, Δ_2, x_1, x_2 y d, podemos conocer las características de todas las raíces, las cuales quedan contempladas en el siguiente cuadro sinóptico.

RESUMEN

- $b^2 - 3ac < 0$ una raíz con el signo de $(-d)$
- $b^2 - 3ac = 0$
  - $\Delta_1 \neq 0$ una raíz real con el signo de $(-d)$
  - $\Delta_1 = 0$ tres raíces iguales entre sí de valor igual a: $-b/3a$.
- $b^2 - 3ac > 0$
  - $\Delta_1 - \Delta_2 > 0$, $\Delta_1 + \Delta_2 < 0$: Una raíz real con el signo de $(-d)$
  - $\Delta_1 - \Delta_2 = 0$ X_1 es raíz doble y la otra tiene el signo de $(-d)$
  - $\Delta_2 + \Delta_2 = 0$ X_2 es raíz doble y la otra tiene el signo de $(-d)$
  - $|\Delta_1| < \Delta_2$
    - $X_1 < 0$
      - $d > 0$ tres raíces desiguales negativas.
      - $d < 0$ una raíz positiva y dos negativas desiguales.
    - $X_1 = 0$, $X_2 \neq 0$: Una raíz positiva y dos negativas desiguales.
    - $X_1 > 0$
      - $X_2 < 0$
        - $u > 0$ Dos raíces desiguales positivas y una negativa.
        - $d < 0$ Dos raíces desiguales negativas y una positiva.
      - $X_2 = 0$ Dos raíces desiguales positivas y una negativa.
      - $X_2 > 0$
        - $d > 0$ Dos raíces positivas desiguales y una negativa.
        - $d < 0$ Tres raíces positivas desiguales.