Boletín de Matemáticas
Vol. VI, No. 5, pp. 1-20

REORDENACION DE NUMEROS RACIONALES

YU TAKEUCHI

1. Introducción

En las primeras lecciones del curso de Análisis Matemático aprendemos que el conjunto $\mathbb{Q}$, de todos los números racionales es enumerable (o contable). Junto con la propiedad de densidad del conjunto $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, la enumerabilidad de $\mathbb{Q}$ juega un papel principal en los estudios de Cálculo en $\mathbb{R}$. Los conceptos de límite y de continuidad de una función real a veces no son tan intuitivos como se observan en los estudios elementales del Cálculo, y sólo se podrán visualizar a través de varios ejemplos. Las dos propiedades de $\mathbb{Q}$ mencionadas anteriormente nos facilitan la construcción de muchos ejemplos valiosos de funciones peculiares que son de verdadera ayuda para los estudiantes; sin embargo, poco se necesitan algunas ordenaciones específicas de los números racionales. En el parágrafo 1 se darán varios ejemplos, bien conocidos ya, de funciones construidas utilizando el conjunto $\mathbb{Q}$, en los cuales la enumeración específica de los números racionales no tiene importancia alguna. En el parágrafo 2, se muestran casos en que la enumeración específica de $\mathbb{Q}$ juega papel esencial en los problemas enunciados.

2. *Funciones definidas en los Números Racionales*

Ejemplo 1. Sean f, g dos funciones contínuas en $\mathbb{R}$, si $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{Q}$ entonces $f = g$.
Ver [1], [2], [3].

Ejemplo 2. Sea f una función uniformemente contínua en $\mathbb{Q}$, entonces existe una única extensión de f, contínua en $\mathbb{R}$.
Ver [3].

Basta utilizar la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ y la completez de $\mathbb{R}$ (condición de Cauchy). Nótese que la continuidad uniforme de f en $\mathbb{Q}$ es indispensable para este caso, por ejemplo:

$$f(x) = \frac{1}{x - \pi} \qquad x \in \mathbb{Q}$$

es contínua (pero no uniformemente en $\mathbb{Q}$) y no existe la extensión contínua de f a $\mathbb{R}$.

Ejemplo 3. Sea $\mathbb{Q}_1 = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ el conjunto de todos los números racionales en $[0, 1]$, sea

$$\begin{cases} f(x) = 0 \quad \text{si} \quad x \in [0,1] - \mathbb{Q}_1 \\ f(x_n) = \dfrac{1}{n} \qquad (x_n \in \mathbb{Q}_1) \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} g(x) = -1 \quad \text{si} \quad x \in [0,1] - \mathbb{Q}_1 \\ g(x_n) = 1 \qquad (x_n \in \mathbb{Q}_1). \end{cases}$$

La función f es contínua para todo x irracional, y discontinua en $\mathbb{Q}_1$; f no es de variación acotada, pero es integrable según Riemann.

La función g es discontinua para todo x, luego no es integrable en el sentido de

Riemann pero la función $|g|$ es integrable en ese sentido.
Ver [2], [3].

Ejemplo 4. Sea $\mathbb{Q}_1 = \{ x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \}$ el conjunto de todos los números racionales en $(0,1)$, sea

$$f(x) = \sum_{x_k < x} \frac{1}{2^k} \qquad \text{(suma para todo índice } k \text{ tal que } x_k < x)$$

Entonces f es contínua por la derecha para todo x, discontinua por la izquierda en $\mathbb{Q}_1$ y continua en $[0,1] - \mathbb{Q}_1$; f es creciente (luego, es de variación acotada) y $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Ver [2], [3].

Ejemplo 5. Sea $\mathbb{Q}$ el conjunto de todos los números racionales, entonces $\mathbb{Q}$ no es intersección de conjuntos abiertos. Ver [1], [2], [3] (Ej. 12).

Ejemplo 6. Sea $\mathbb{Q}$ el conjunto de todos los números racionales, entonces no existe una función contínua en $\mathbb{Q}$, discontinua en $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$.
Para obtener este resultado hay que usar el Ejemplo 5; Ver [3].

Ejemplo 7. Sea $\mathbb{Q}_1$ el conjunto de todos los números racionales en $[0,1]$, entonces existe una aplicación de $\mathbb{Q}_1$ sobre $\mathbb{Q}_1 - \{0\}$, contínua y uno a uno. Ver [3].

Ejemplo 8. Sea f definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \text{ es racional y } x \in [0,1], \\ -x & \text{si } x \text{ es irracional y } x \in [-1, 0] \end{cases}$$

Entonces f es una función contínua, uno a uno sobre $[0,1]$. La imagen inversa de un conjunto abierto no es abierto en $\mathbb{R}$, y f^{-1} (existe!) pero no es contínua. Ver [1], [3].

Este ejemplo es muy útil para romper la falsa creencia de que la función inversa de una función contínua es siempre contínua.

Ejemplo 9. Sea $\mathbb{Q} = \{x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots\}$ el conjunto de todos los números racionales, sea

$$A_n = \bigcup_{j=1}^{\infty} \left(x_j - \frac{1}{n} b_j,\ x_j + \frac{1}{n} b_j\right)$$

donde $\Sigma_j b_j$ es una serie convergente de términos positivos. Entonces :

$$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots \supset A_n \supset A_{n+1} \supset \ldots,$$

El conjunto $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \lim_{n \to \infty} A_n = A_o \neq \phi$, A_o contiene a $\mathbb{Q}$, y es un conjunto no-contable. La medida de A_o es nula.
Ver [5], [6], [7] (Ej. 5).

Ejemplo 10. Sea $\mathbb{Q}_1 = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ el conjunto de todos los números racionales en $[0, 1]$, entonces la serie :

$$\Sigma_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{1}{|x - x_n|}$$

converge para casi todo x del intervalo $[0,1]$.
Ver [5].

Ejemplo 11. Sea $\mathbb{Q}_1 = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ el conjunto de todos los números racionales en $[0,1]$, sea

$$f(x_n) = \alpha_n \qquad (x_n \in \mathbb{Q}_1) \quad \text{y}$$

$$f(x) = 0 \qquad \text{si} \qquad x \notin \mathbb{Q}_1$$

donde $\Sigma \alpha_n$ es una serie convergente de términos positivos. Si la serie $\Sigma \beta_n$ $(\beta_n > 0)$ es convergente y tal que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = 0$$

sea

$$A_o = \lim_{n\to\infty} \{ \bigcup_{j=1}^{\infty} (x_j - \frac{1}{n}\beta_j \, , \, x_j + \frac{1}{n}\beta_j) \},$$

entonces f es derivable para todo $x \in [0,1] - A_o$

Ver [6] (parágrafo 2)

Ejemplo 12. Sea $\mathbb{Q}_1 = \{ x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots \}$ el conjunto de todos los números racionales en $(0,1)$, $\{\beta_n\}$ cualquier sucesión de términos positivos; entonces el conjunto

$$A_o = \lim_{n\to\infty} (x_n - \beta_n \, , \, x_n + \beta_n) = \bigcap_{m=1}^{\infty} \{ \bigcup_{k=m}^{\infty} (x_k - \beta_k , x_k + \beta_k) \}$$

es denso en $[0,1]$.

Demostración .

Sea (a,b) un intervalo contenido en $[0,1]$.

Tomemos un número natural fijo p $(p \neq 1)$, escogemos $s(1)$, $s(2), \ldots$ como sigue :

i) $x_{s(1)} \in (a, b)$.

ii) Existe $t(1)$ tal que

$$(x_{s(1)} - (\frac{1}{p})^{t(1)}, x_{s(1)} + (\frac{1}{p})^{t(1)}) \subset (a,b) \cap (x_{s(1)} - \beta_{s(1)}, x_{s(1)} + \beta_{s(1)})$$

Sea $x_{s(2)} = x_{s(1)} + (1/p)^{t(1)+1}$.

iii) En general, existe $t(n)$ $(> t(n-1))$ tal que

$$(x_{s(n)} - (\frac{1}{p})^{t(n)}, x_{s(n)} + (\frac{1}{p})^{t(n)}) \subset (x_{s(n)} - \beta_{s(n)}, x_{s(n)} + \beta_{s(n)}).$$

Sea $x_{s(n+1)} = x_{s(n)} + (1/p)^{t(n)+1}$.

Si escribimos

$$x = x_{s(1)} + (\frac{1}{p})^{t(1)+1} + (\frac{1}{p})^{t(2)+1} + \ldots + (\frac{1}{p})^{t(n)+1} + \ldots$$

entonces x pertenece a (a, b), y tenemos :

$$0 < x - x_{s(n)} = (\frac{1}{p})^{t(n)+1} + (\frac{1}{p})^{t(n+1)+1} + \ldots$$

$$< (\frac{1}{p})^{t(n)+1} \{ 1 + \frac{1}{p} + (\frac{1}{p})^{2} + \ldots \} \leq \frac{2}{p}(\frac{1}{p})^{t(n)} \leq (\frac{1}{p})^{t(n)} ,$$

o sea

$$x \in (x_{s(n)} - \beta_{s(n)}, x_{s(n)} + \beta_{s(n)}) \qquad \text{para todo } n ,$$

por lo tanto, x pertenece a A_o. Nótese que x puede ser siempre un número irracional escogiendo adecuadamente $t(1), t(2), t(3), \ldots$.

3. Algunas Ordenaciones de los Números Racionales.

En este parágrafo, se denota Q_1 al conjunto de todos los números racionales en $[0,1]$.

Ejemplo 13. Existe una ordenación de Q_1, $Q_1 = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} (x_n - x_{n+1}) = 0$$

Si se define una función f como sigue :

$$f(x_n) = x_{n+1} \qquad (x_n \in Q_1) \qquad \text{y}$$

$$f(x) = x \qquad \text{si} \qquad x \notin Q_1$$

entonces f es contínua en los números irracionales, y discontinua en Q_1.

Demostración.

[1] Sea $Q_1 = \{y_1, y_2, y_3, \ldots\}$ una ordenación del conjunto Q_1, sean

$I_1 = [0,1]$

$I_2 = [0, \frac{1}{2}]$, $I_3 = [\frac{1}{2}, 1]$

$I_4 = [\frac{3}{4}, 1]$, $I_5 = [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$, $I_6 = [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$,

$I_7 = [0, \frac{1}{4}]$,

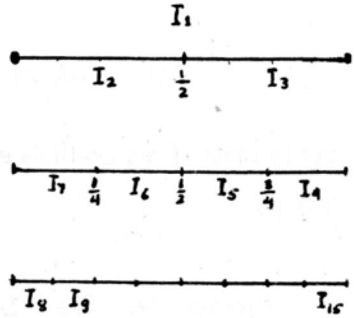

Figura 1

en general ,

$$I_{2^k+j} = [\frac{j}{2^k}, \frac{j+1}{2^k}] \text{ , si } k \text{ es impar y}$$

$$I_{2^k+j} = [1 - \frac{j+1}{2^k}, 1 - \frac{j}{2^k}] \text{ si } k \text{ es par .}$$

$(j = 0, 1, 2, \ldots, 2^k - 1)$.

Ahora, reordenemos el conjunto $\mathbb{Q}_1$ en la siguiente manera :

$x_1 = y_1$,

x_2 = el número racional $y_k \in I_2$, $y_k \neq x_1$, cuyo índice k es mínimo y en general,

x_n = el número racional $y_k \in I_k$, $y_k \neq x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, cuyo índice k es mínimo .

Evidentemente $\{x_1, x_2, \ldots\}$ es una reordenación de $\mathbb{Q}_1$ y se tiene :

$$\lim_{n \to \infty} |x_n - x_{n+1}| = 0$$

(II) Dado $x \in [0, 1]$, sea $\{x_{s(k)}\}$ una sucesión de números racionales tal que $x_{s(k)} \to x$ $(k \to \infty)$, entonces

$$f(x_{s(k)}) = x_{s(k)+1} = x_{s(k)} + \{x_{s(k)+1} - x_{s(k)}\} \to x \quad (k \to \infty) ,$$

por lo tanto f es contínua en los números irracionales, y discontinua en $\mathbb{Q}$. Ver [3] .

Ejemplo 14. Sea $\Sigma_1^\infty \alpha_n = +\infty$, $(\alpha_n > 0 , \lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0)$, $\quad$ (1)

existe una ordenación de Q_1, $Q_1 = \{ x_1, x_2, x_3, \dots \}$ tal que

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} \{ \bigcup_{k=m}^{\infty} (x_k - \alpha_k, x_k + \alpha_k) \} = [0, 1], \tag{2}$$

o sea

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} (x_n - \alpha_n, x_n + \alpha_n) = [0, 1] \tag{3}$$

En esta ordenación de Q_1, la función g definida por :

$$\begin{aligned} g(x_n) &= \alpha_n & (x_n \in Q_1) \quad \text{y} \\ g(x) &= 0 \quad \text{si} & x \notin Q_1 \end{aligned} \tag{4}$$

no es derivable en ningún punto de $[0, 1]$.

Demostración.

(I) Por (1), existe una sucesión de los números naturales :

$$0 = N_0 < N_1 < N_2 < \dots < N_k < \dots \tag{5}$$

tal que

$$\sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}-1} 2\,\alpha_n = \beta_{k+1} > 1 \qquad (k = 0,1,2,3, \dots) \tag{6}$$

Sea x_k $(1 \leq k \leq N_1 - 1)$ un número racional tal que

i) $$x_k \in \left(\frac{2\alpha_1 + \dots + 2\alpha_{k-1} + \alpha_k}{\beta_1} - \frac{\beta_1 - 1}{\beta_1}\alpha_k , \frac{2\alpha_1 + \dots + 2\alpha_{k-1} + \alpha_k}{\beta_1} + \frac{\beta_1 - 1}{\beta_1}\alpha_k \right)$$

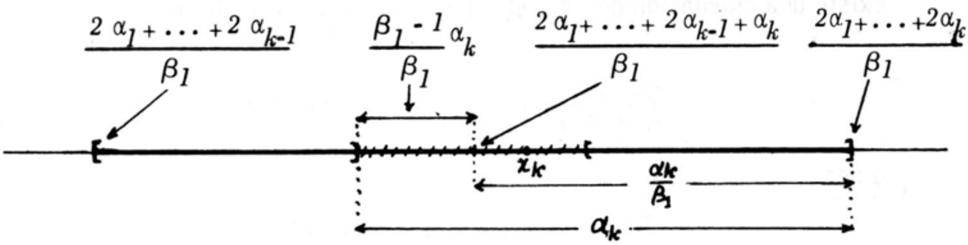

Figura 2

ii) $x_k \notin \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}$

y entonces tenemos (ver Fig. 2) :

$$(x_k - \alpha_k, x_k + \alpha_k) \supset \left[\frac{2\alpha_1 + \dots + 2\alpha_{k-1}}{\beta_1}, \frac{2\alpha_1 + \dots + 2\alpha_{k-1} + 2\alpha_k}{\beta_1}\right] (k \geq 2),$$

$(x_1 - \alpha_1, x_1 + \alpha_1) \supset [0, \frac{2\alpha_1}{\beta_1}]$ (ver Fig. 3).

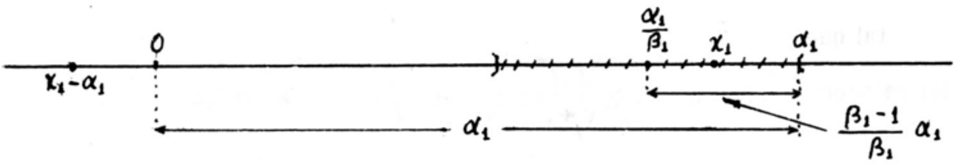

Figura 3

Por lo tanto tenemos :

$$\bigcup_{k=1}^{N_1-1} (x_k - \alpha_k, x_k + \alpha_k) \supset [0,1]$$

De la misma manera se pueden escoger los números racionales x_n,

$(N_k+1 \leq n \leq N_{k+1}-1)$ tales que

i) $\bigcup_{n=N_k+1}^{N_{k+1}-1} (x_n - \alpha_n, x_n + \alpha_n) \supset [0,1]$ (7)

ii) $x_n \notin \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}$ (8)

iii) x_n es diferente a $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$

Los racionales así escogidos forman un subconjunto propio de Q_1, digamos Q_0. Por la condición (8) el conjunto $Q_1 - Q_0$ es enumerablemente infinito, o sea :

$$Q_1 - Q_0 = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots\}$$

Sea

$$x_{N_k} = \lambda_k \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

entonces tenemos :

$$Q_1 = Q_0 \cup (Q_1 - Q_0) = \{x_n : n = 1, 2, 3, \ldots\}$$

De (7) se tiene :

$$\bigcup_{n=m}^{\infty} (x_n - \alpha_n, x_n + \alpha_n) \supset [0,1] \qquad \text{para todo } m,$$

luego

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} (x_n - \alpha_n, x_n + \alpha_n) = \bigcap_{m=1}^{\infty} \{\bigcup_{n=m}^{\infty} (x_n - \alpha_n, x_n + \alpha_n)\} = [0,1]$$

puesto que

$$\lim_{n \to \infty} \alpha_n = 0 .$$

(II) Sea g la función definida por (4). Para cualquier número irracional $x_o \in [0,1]$ existe una sucesión $\{m_k\}$:

$$m_1 < m_2 < m_3 < \ldots$$

tal que

$$x_o \in (x_{m_k} - \alpha_{m_k} , x_{m_k} + \alpha_{m_k}), \quad \text{para todo } k :$$

o sea que

$$|x_o - x_{m_k}| < \alpha_{m_k} \qquad \text{para todo } k \tag{9}$$

Como $\lim\limits_{n \to \infty} \alpha_n = 0$ se tiene que $\lim\limits_{k \to \infty} x_{m_k} = x_o$, luego

$$\overline{\lim_{k \to \infty}} \left| \frac{g(x_{m_k}) - g(x_o)}{x_{m_k} - x_o} \right| = \overline{\lim_{k \to \infty}} \frac{\alpha_{m_k}}{|x_{m_k} - x_o|} \geq 1 .$$

Por lo tanto la función g no es derivable en x_o ya que

$$\frac{g(x) - g(x_o)}{x - x_o} = 0 \qquad \text{para todo } x \notin \mathcal{Q}_1 .$$

Evidentemente g no es derivable en $\mathcal{Q}_1$ ya que g es discontinua en $\mathcal{Q}_1$. Ver [6]

Ejemplo 15. Sea $\{\beta_n\}$ una sucesión de términos positivos que tiende a

0; existe una ordenación de $\mathbb{Q}_1$, $\mathbb{Q}_1 = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ tal que el conjunto

$$A_o = \overline{\lim_{n\to\infty}} (x_n - \beta_n, x_n + \beta_n) = \bigcap_{m=1}^{\infty} \{\bigcup_{k=m}^{\infty} (x_k - \beta_k, x_k + \beta_k)\} \tag{10}$$

tiene medida nula.

Además, la función h definida por :

$$h(x_n) = (\beta_n)^2 \quad \text{si} \quad x_n \in \mathbb{Q}_1, \quad h(x) = 0 \quad \text{si} \quad x \notin \mathbb{Q}_1 \tag{11}$$

es derivable en los números irracionales que no pertenecen a A_o, o sea que h es derivable en casi toda parte.

Demostración.

(8) Sea $\{y_1, y_2, y_3, \ldots\}$ cualquier ordenación de $\mathbb{Q}_1$, sean N_1 ; N_2, $N_3, \ldots, N_k, \ldots$ tales que

$$n > N_k \quad \text{implica} \quad \beta_n < \frac{1}{2^k} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots). \tag{12}$$

Construimos una reordenación de $\mathbb{Q}_1$ como sigue :

i) $x_n = y_n$ si $1 \leq n \leq N_1$

ii) $\begin{cases} x_{N_1+1} = y_{N_1+1} \\ x_n \ (N_1 + 1 < n \leq N_2) \text{ son números racionales tales que} \end{cases}$

$$|x_n - x_{N_1+1}| < \frac{1}{2}$$

iii) En general, x_{N_k+1} = al *primer* número racional diferente a $x_1, x_2, \ldots, x_{N_k}$

en la ordenación $\{ y_1, y_2, y_3, \ldots \}$.

Los x_n, $(N_k + 1 < n \leq N_k + 1)$ son números racionales tales que

$$| x_n - x_{N_k+1} | < \frac{1}{2^k} \tag{13}$$

Evidentemente $Q_1 = \{ x_1, x_2, x_3, \ldots \}$ y además (Fig. 4):

$$\bigcup_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} (x_n - \beta_n, x_n + \beta_n) \subset (x_{N_k+1} - \frac{2}{2^k}, x_{N_k+1} + \frac{2}{2^k})$$

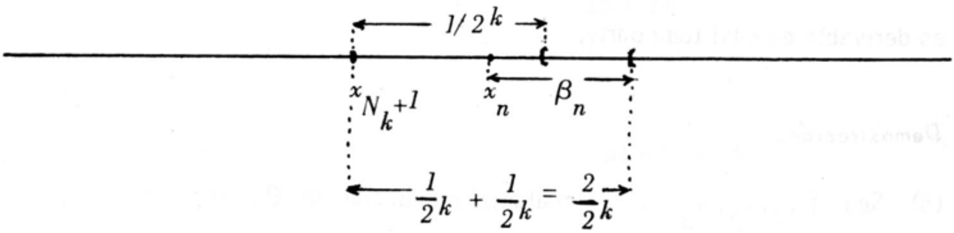

Figura 4

Por lo tanto se tiene :

$$\bigcup_{n=N_k+1}^{\infty} (x_n - \beta_n, x_n + \beta_n) \subset \bigcup_{j=k}^{\infty} (x_{N_j+1} - \frac{2}{2^j}, x_{N_j+1} + \frac{2}{2^j})$$

y entonces

$$m \{ \bigcup_{n=N_k+1}^{\infty} (x_n - \beta_n, x_n + \beta_n) \} \leq \sum_{j=k}^{\infty} \frac{2}{2^{j-1}} = \frac{1}{2^{k-3}} \to 0 \quad (k \to \infty)$$

Es decir,

$$\lim_{k\to\infty} m\{\bigcup_{n=k}^{\infty}(x_n-\beta_n, x_n+\beta_n)\} = 0 ,$$

o sea que el conjunto A_o definido en (10) tiene medida nula.

(II). Sea h la función definida en (11), si x_o (irracional) $\notin A_o$ entonces existe m tal que

$$x_o \notin (x_n - \beta_n, x_n + \beta_n) \qquad \text{para todo } n \geq m ,$$

es decir

$$|x_o - x_n| \geq \beta_n \qquad \text{para todo } n \geq m .$$

Por lo tanto se tiene :

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{h(x_n)-h(x_o)}{x_n - x_o}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(\beta_n)^2}{|x_n - x_o|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\beta_n}{|x_n - x|}\beta_n = 0 ,$$

es decir, h es derivable en x_o, y $h'(x_o) = 0$

Ver [6].

***Nota*.** Si escogemos $\{\beta_n\}$ tal que $\Sigma(\beta_n)^2 = +\infty$, este ejemplo proporciona una función de *variación no acotada* y derivable en casi toda parte. Pero, $m(A_o)=0$ no implica que $A_o = \phi$ (Ver Ej. 12).

Ejemplo 16. Existe una ordenación $Q_1 = \{x_1, x_2, \dots\}$ tal que

$$A_o = \overline{\lim_{n\to\infty}} (x_n - \frac{1}{n}, x_n + \frac{1}{n}) = \bigcap_{m=1}^{\infty}\{\bigcup_{k=m}^{\infty}(x_k - \frac{1}{k}, x_k + \frac{1}{k})\}$$

no contiene números racionales .

Si t_j es la función definida por :

$$t_j(x_n) = \frac{1}{n^2} \text{ si } x_n \neq x_j, \; t_j(x) = 0 \text{ si } x \notin \mathcal{Q}, \text{ ó } x = x_j \tag{14}$$

entonces la función t_j es derivable en $x = x_j$.

Demostración .

(I) Ordenamos el conjunto $\mathcal{Q}$, como se indica en la Figura 5.

Sea $y_{n,k}$ el número racional que está en la n-ésima fila y en la k-ésima columna en la Fig. 5, o sea que $y_{n,k}$ es el k-ésimo número racional cuyo numerador es igual a n, y sea x_l el l-ésimo número racional en la ordenación indicada en la figura 5. Si $x_l = y_{n-p,\,p+1}$ entonces tenemos (ver Fig. 6) :

$$\begin{array}{lccccccc}
\text{numerador } 1 & \ldots & \frac{1}{2} & & \frac{1}{3} & \rightarrow \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \rightarrow \frac{1}{6} \\
 & & \downarrow & & & & & \\
\text{numerador } 2 & \ldots & \frac{2}{3} & & \frac{2}{5} & \frac{2}{7} & \frac{2}{9} & \frac{2}{11} \ \ldots \\
\text{numerador } 3 & \ldots. & \frac{3}{4} & & \frac{3}{5} & \frac{3}{7} & \frac{3}{8} & \ldots \\
 & & \downarrow & & & & & \\
\text{numerador } 4 & \ldots & \frac{4}{5} & & \frac{4}{7} & \frac{4}{9} & \ldots\ldots & \\
\text{numerador } 5 & \ldots & \frac{5}{6} & & \frac{5}{7} & \frac{5}{8} & \ldots\ldots & \\
 & & \downarrow & & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots &
\end{array}$$

Figura 5

$$l > \frac{n(n-1)}{2}$$

Si

$$y_{n-p\,,\,p+1} = \frac{n-p}{c}$$

entonces :

$$c < (n-p) + \left(\frac{p}{\phi(n-p)} + 1\right)(n-p) \tag{15}$$

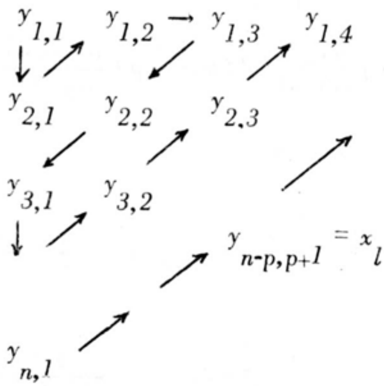

Figura 6

donde $\phi(x)$ es la función de Euler ($\phi(x)$ es igual al número de números naturales, j, tales que $j < x$ y $(j, x) = 1$).

Si

$$n - p = q_1^{s_1}\, q_2^{s_2} \cdots q_r^{s_r}$$

es la factorización de $n-p$ en números primos, entonces

$$\frac{n-p}{\phi(n-p)} = \frac{q_1\, q_2 \cdots q_r}{(q_1-1)\cdots(q_r-1)} \leq \frac{2}{1}\,\frac{3}{2} \cdots \frac{r+1}{r} = r+1\,, \tag{16}$$

donde r es el número de divisores primos de $n-p$. Tenemos :

$$n-p = q_1^{s_1}\, q_2^{s_2} \cdots q_r^{s_r} \geq q_1\, q_2 \cdots q_r > 2^r$$

luego :

$$r < \frac{\log (n-p)}{\log 2} \tag{17}$$

De (15), (16) y (17) :

$$c < 2(n-p) + p\frac{n-p}{\phi(n-p)} < 2(n-p) + p\left(\frac{\log (n-p)}{\log 2} + 1\right) < \frac{n(1+\log n)}{\log 2}$$

Sea $\frac{s}{t} \in Q$, entonces :

$$\left|\frac{s}{t} - x_l\right| = \left|\frac{s}{t} - y_{n-p,p+1}\right| = \left|\frac{s}{t} - \frac{n-p}{c}\right| \geq \frac{1}{tc}$$

$$> \frac{1}{t}\,\frac{\log 2}{n(1+\log n)} > \frac{2}{n(n-1)} > \frac{1}{l}$$

si n es suficientemente grande (ó l es suficientemente grande.) Luego, para l suficientemente grande tenemos :

$$\frac{s}{t} \notin \left(x_l - \frac{1}{l}\,,\ x_l + \frac{1}{l}\right)\ ,$$

por lo tanto tenemos :

$$A_o = \bigcap_{l=1}^{\infty}\left\{\bigcup_{n=l}^{\infty}\left(x_n - \frac{1}{n}\,,\ x_n + \frac{1}{n}\right)\right\} \not\ni \frac{s}{t}$$

o sea

$$A_o \cap Q = \phi$$

(II) Sea t_j la función definida en (14), entonces :

$$x_j \notin A_o = \bigcap_{m=1}^{\infty}\left\{\bigcup_{k=m}^{\infty}\left(x_k - \frac{1}{k},\ x_k + \frac{1}{k}\right)\right\},$$

o sea que existe un m tal que

$$x_j \notin \left(x_k - \frac{1}{k}, x_k + \frac{1}{k}\right) \quad \text{para todo} \quad k \geq m,$$

esto es :

$$|x_k - x_j| \geq \frac{1}{k} \quad \text{para todo} \quad k \geq m.$$

Tenemos entonces :

$$\left| \frac{t_j(x_k) - t_j(x_j)}{x_k - x_j} \right| = \frac{\frac{1}{k^2}}{|x_k - x_j|} \leq \frac{1}{k} \to 0,$$

por lo tanto, la función t_j es derivable en x_j.

Nota: Ningún número racional pertenece a A_o, pero $A_o \neq \phi$, más aún, A_o contiene a un número no contable de números irracionales (ver 1., Ej. 12).

Referencias

[1] Apostol T. M. *Mathematical Analysis*. Addison Wesley, Reading, 1957

[2] Rudin W. *Principles of Mathematical Analysis*. Mc Graw Hill, New York, 63

[3] Takeuchi Y. *Ejercicios de Análisis* . Parte I, U. Nal., Bogotá, 1970

[4] Takeuchi Y. " Una nota sobre un conjunto no enumerable de medida nula" Revista de Matemáticas Elementales, Vol. VI Fasc. 1-2, pp. 40-42

[5] Takeuchi Y. "Una serie infinita relacionada con un conjunto de números racionales". Rev. Mat. Elementales, Vol. VII Fasc.2 pp. 46-48

[6] Takeuchi Y. "Derivabilidad de algunas funciones". Rev. de Mat. Elementales, Vol. VIII Fasc. 3-4, pp. 10-18

[7] Takeuchi Y. *Integral de Lebesgue*. U. Nal. Bogotá, 1970

* * *

Matemáticas y alpinismo

"La investigación y el estudio matemático se asemejan al alpinismo. Whymper intentó conquistar el Matterhorn siete veces en los años 1860 y esto costó la vida a cuatro miembros de su partida. Ahora, sin embargo, cualquier turista puede subir por cable aéreo sin costarle más que unos centavos, sin apreciar la dificultad del ascenso original. Así en matemáticas, es muy difícil captar la gran dificultad inicial para dar un pequeño paso que ahora parece tan natural y obvio, y no es sorprendente que un tal paso se haya encontrado y perdido de nuevo".

L. J. Mordell

Three lectures on Fermat's last theorem