Boletín de Matemáticas
Vol. VI No. 3 , pp. 1 - 65

¿ QUE ES UNA FUNCION ANALITICA ?

ALONSO TAKAHASHI

1. El plano complejo.

Si designamos por $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales entonces el plano cartesiano o plano de la geometría analítica es el conjunto $\mathbb{R}^2 = \{(x,y): x \in \mathbb{R}\ ,\ y \in \mathbb{R}\}$. Es bien conocida su representación

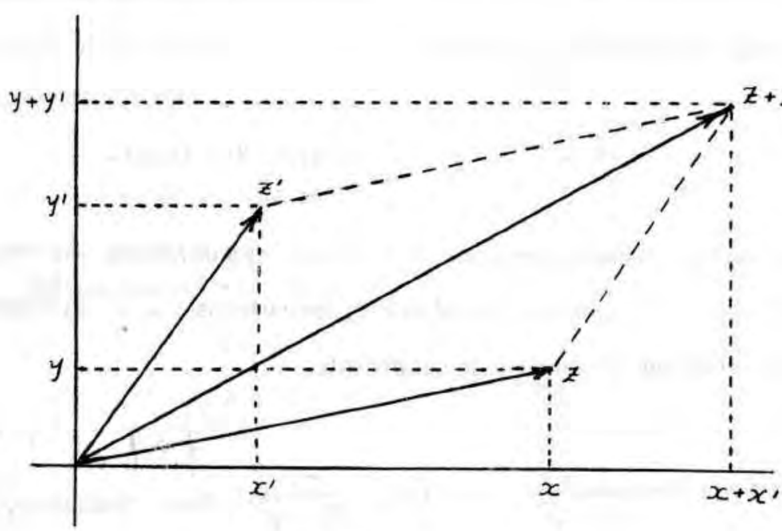


Figura 1.

geométrica y la interpretación de sus elementos como vectores. Entre los elementos de $\mathbb{R}^2$ se define una adición: si $z = (x, y)$ y $z' = (x', y')$ entonces

$$z + z' = (x + x' , y + y'),$$

es decir, $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$.

Si además se define una multiplicación conviniendo que

$$z z' = (x x' - y y', x y' + x' y),$$

es decir, $(x, x')(y, y') = (x x' - y y', x y' + x' y)$, puede comprobarse que se satisfacen propiedades análogas a las de la adición y la multiplicación entre números reales: asociativas, conmutativas, distributiva. En particular, el elemento $(0, 0)$ (resp. $(1, 0)$) es el neutro con respecto a la adición (resp. multiplicación), esto es:

$$(x, y) + (0, 0) = (x, y) \quad , \ (x, y)(1, 0) = (x, y).$$

El opuesto de un número complejo $z = (x, y)$ es el número $-z = (-x, -y)$. Si $(x, y) \neq (0, 0)$, es decir, si alguno de los números x, y es diferente de cero, entonces el complejo de componentes

$$x' = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad , \quad y' = \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

es el inverso (multiplicativo) de (x, y), esto es, $(x, y)(x', y') = (1, 0)$.

Para indicar este enriquecimiento en la estructura de $\mathbb{R}^2$ lograda al introducir la multiplicación, este conjunto se denota $\mathbb{C}$ y se llama el *plano complejo*.

Cada número real x puede identificarse con un complejo, a saber, $(x, 0)$. De acuerdo con ésto escribiremos x en lugar de $(x, 0)$; en particular escribiremos 0 y 1 en lugar de $(0, 0)$ y $(1, 0)$ respectivamente. Esta identificación "conserva las operaciones", en otros términos, $x + x'$ y xx' quedan identificados con $(x, 0) + (x', 0)$ y $(x, 0)(x', 0)$ respectivamente. Entonces puede considerarse que $\mathbb{R}$ es un subconjunto de $\mathbb{C}$, más exactamente, $\mathbb{R}$ es el eje horizontal, el cual se llama entonces *eje real*.

Los complejos de la forma $(0, y)$ se llaman *imaginarios puros* y ocupan el eje vertical el cual se denomina por esta razón *eje imaginario*. En particular, el complejo $i = (0, 1)$ se llama la *unidad imaginaria* y tiene una propiedad peculiar :

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1 .$$

Nótese que si a es un real y $z = (x, y)$ un complejo, entonces

$$az = (a, 0)(x, y) = (ax, ay) .$$

En particular $a(0, 1) = (0, a)$ lográndose así la representación siguiente para un complejo cualquiera z :

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = x + y(0, 1) = x + yi$$

geométrica y la interpretación de sus elementos como vectores. Entre los elementos de $\mathbb{R}^2$ se define una adición : si $z = (x, y)$ y $z' = (x', y')$ entonces

$$z + z' = (x + x' \; , \; y + y') ,$$

es decir, $(x, y) + (x', y') = (x + x', \; y + y')$.

Si además se define una multiplicación conviniendo que

$$z z' = (x x' - y y' , x y' + x' y) ,$$

es decir, $(x, x')(y, y') = (x x' - y y' , x y' + x' y)$, puede comprobarse que se satisfacen propiedades análogas a las de la adición y la multiplica - ción entre números reales : asociativas, conmutativas, distributiva. En particular, el elemento $(0, 0)$ (resp. $(1, 0)$) es el neutro con respecto a la adición (resp. multiplicación), esto es :

$$(x, y) + (0, 0) = (x, y) \quad , \quad (x, y)(1, 0) = (x, y) .$$

El opuesto de un número complejo $z = (x, y)$ es el número $-z = (-x, -y)$. Si $(x, y) \neq (0, 0)$, es decir, si alguno de los números x, y es diferente de cero, entonces el complejo de componentes

$$x' = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad , \quad y' = \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

es el inverso (multiplicativo) de (x, y). esto es, $(x, y)(x', y') = (1, 0)$.

Para indicar este enriquecimiento en la estructura de $\mathbb{R}^2$ lograda al introducir la multiplicación, este conjunto se denota $\mathbb{C}$ y se llama el *plano complejo*.

Cada número real x puede identificarse con un complejo, a saber, $(x, 0)$. De acuerdo con ésto escribiremos x en lugar de $(x, 0)$; en particular escribiremos 0 y 1 en lugar de $(0, 0)$ y $(1, 0)$ respectivamente. Esta identificación "conserva las operaciones", en otros términos, $x + x'$ y $x x'$ quedan identificados con $(x, 0) + (x', 0)$ y $(x, 0)(x', 0)$ respectivamente. Entonces puede considerarse que $\mathbb{R}$ es un subconjunto de $\mathbb{C}$, más exactamente, $\mathbb{R}$ es el eje horizontal, el cual se llama entonces *eje real*.

Los complejos de la forma $(0, y)$ se llaman *imaginarios puros* y ocupan el eje vertical el cual se denomina por esta razón *eje imaginario*. En particular, el complejo $i = (0, 1)$ se llama la *unidad imaginaria* y tiene una propiedad peculiar :

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1 .$$

Nótese que si a es un real y $z = (x, y)$ un complejo, entonces

$$a z = (a, 0)(x, y) = (a x, a y) .$$

En particular $a(0, 1) = (0, a)$ lográndose así la representación siguiente para un complejo cualquiera z :

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = x + y(0, 1) = x + y i$$

o también $z = (x, y) = x + iy$. Con esta representación las definiciones de suma y producto toman la forma

$$z + z' = (x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + i(y + y')$$

$$zz' = (x + iy)(x' + iy') = (xx' - yy') + i(xy' + x'y) \quad ,$$

fórmulas que pueden obtenerse operando en la forma ordinaria con los binomios $x + iy$ y $x' + iy'$ y recordando que $i^2 = -1$.

En el plano complejo se definen varias funciones útiles :

Parte real. Es la función

$$R_e : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$$

que a cada complejo $z = (x, y) = x + iy$ le asigna el número real x, es decir, $R_e(x + iy) = x$.

Parte imaginaria. Similarmente se define

$$I_m : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$$

conviniendo que $I_m(x + iy) = y$.

Para cada número complejo z, el número *real* $R_e z$ (resp. $I_m z$) es la *parte real* (resp. *imaginaria*) de z y se tiene que

$$z = R_e z + i\, I_m z .$$

Conjugación. Para cada complejo $z=(x,y)=$ $=x+iy$, el complejo $(x,-y)=x-iy$, es decir, el simétrico de z con respecto al eje real, se designa $\bar{z}$ y se llama el *conjugado* de z. Se tiene entonces una función

$$\begin{aligned} \bar{\ } : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \bar{z} \end{aligned}$$

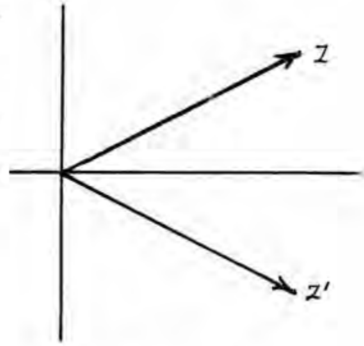


Figura 2

Esta función es involutiva, esto es, $\bar{\bar{z}}=z$. Además, se tienen las siguientes relaciones :

$$R_e z = \tfrac{1}{2}(z+\bar{z}) \qquad , \qquad I_m z = \frac{1}{2i}(z-\bar{z})$$

$$R_e \bar{z} = R_e z \qquad , \qquad I_m \bar{z} = -I_m z \ .$$

Módulo o longitud. Si $z=(x,y)$ entonces la longitud del vector que representa a z o lo que es lo mismo, la distancia del punto (x,y) al origen $(0,0)$ se llama el *módulo* de z y se designa $|z|$. Se obtiene así la función

$$\begin{aligned} |\cdot| : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ z &\longmapsto |z| \ , \end{aligned}$$

donde $\mathbb{R}^+=\{x\in\mathbb{R} : x\geq 0\}$. Claramente $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$, es decir,

$$|z| = \{(R_e z)^2 + (I_m z)^2\}^{\frac{1}{2}} \text{, para todo } z$$

También se ve inmediatamente que $|z|^2 = z\bar{z}$, $|zz'| = |z|\,|z'|$ y que $|z| = |\bar{z}|$. Además, para todo z y todo z' se tiene la desigualdad triangular (ver Fig. 1)

$$|z+z'| \leq |z| + |z'|$$

La distancia $d(z_1, z_2)$ entre dos complejos $z_1 = (x_1, y_1)$ y $z_2 = (x_2, y_2)$ viene dada por

$$d(z_1, z_2) = \{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2\}^{\frac{1}{2}} = |z_1 - z_2|$$

De acuerdo con ésto, la *circunferencia* C de centro a y radio $R > 0$ puede describirse en la forma $C = \{ z \in \mathbb{C} : |z-a| = R \}$.

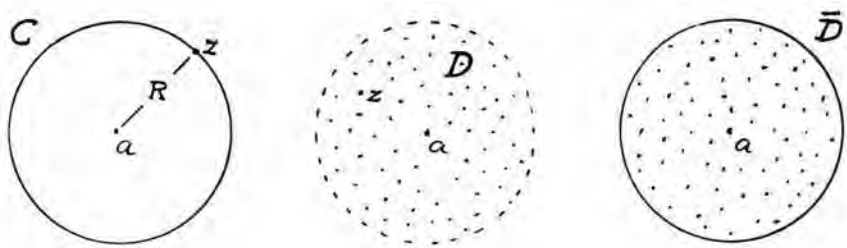


Figura 3

Análogamente, el *disco (abierto)* D de centro a y radio R es

$D = \{ z \in \mathbb{C} : |z-a| < R \}$ y el *disco cerrado* o *círculo* $\overline{D}$ con el mismo centro y radio es $\overline{D} = \{ z \in \mathbb{C} : |z-a| \leq R \}$ (ver Fig. 3).

Argumento. Si $z \neq 0$, el ángulo θ que forma el vector z con el semieje real positivo $(0 \leq \theta < 2\pi)$ se llama el *argumento* de z y se denota $\arg z$. Para cada θ, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, el número complejo de módulo 1

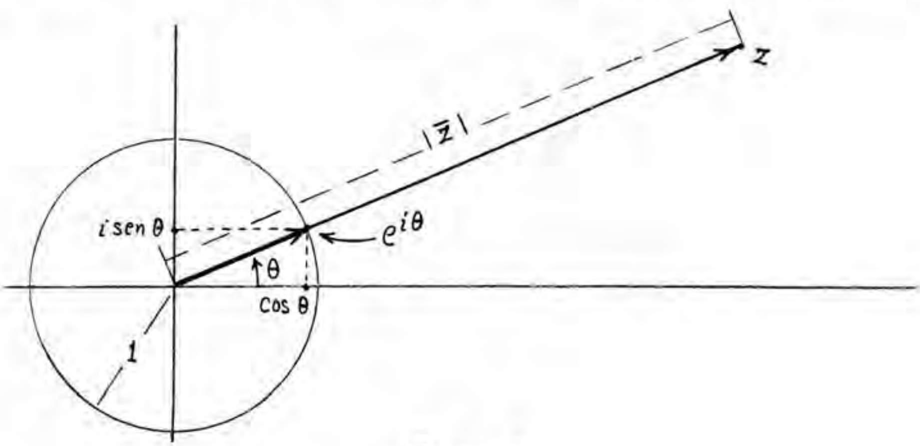


Figura 4

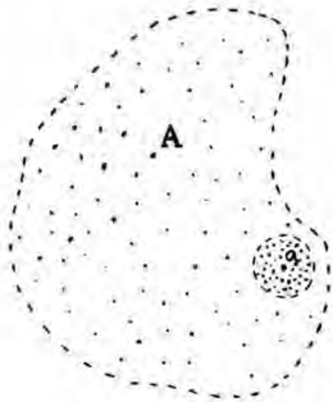
y argumento θ es $\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$ y se designa $e^{i\theta}$. Entonces, un complejo $z \neq 0$ cualquiera puede escribirse en la forma

$$z = |z| \frac{z}{|z|} = |z| \, e^{i\theta}$$

donde $\theta = \arg z$. (ver Fig. 4).

En el plano complejo pueden también introducirse los conceptos topológicos que eventualmente permitirán la discusión de los conceptos de límite, continuidad y diferenciabilidad.

Abiertos y cerrados. Un subconjunto A de $\mathbb{C}$ se dice *abierto* si para todo $a \in A$ existe un disco D de centro a tal que $D \subset A$. Un subconjunto B es *cerrado* si su complemento $\complement B$ es abierto.



Conjunto abierto

Compactos. Un subconjunto $K \subset \mathbb{C}$ se dice *acotado* si existe un disco D tal que $K \subset D$. Si K es cerrado y acotado se dice que es *compacto*. Los compactos K están caracterizados por la siguiente propiedad.: Dada una colección cualquiera $\mathcal{A}$ de conjuntos abiertos cuya unión contiene a K, existe una subcolección finita $\{A_1, \ldots, A_p\} \subset \mathcal{A}$ cuya unión $A_1 \cup \ldots \cup A_p$ aún contiene a K.

2. Funciones complejas.

Una *función compleja de una variable compleja* o sencillamente una *función compleja* es una cuyo dominio es un subconjunto de $\mathbb{C}$ y que toma valores en $\mathbb{C}$:

$$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C} \quad , \quad \Omega \subset \mathbb{C}$$
$$z = (x, y) \longmapsto w$$

Se escribe entonces $w = f(z)$ ó $w = f(x, y)$, Las funciones reales : $u = R_e \circ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

y $v = I_m \circ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$,

es decir, $u(x, y) = R_e f(z)$ y $v(x, y) = I_m f(z)$ para todo $z = (x, y) \in \Omega$, se llaman la *parte real* y la *parte imaginaria* de f respectivamente. Para todo $z = (x, y) \in \Omega$ se tiene

$$f(z) = f(x, y) = u(x, y) + i\, v(x, y) .$$

Esta relación permite utilizar la teoría de funciones reales de dos variables reales al estudio de las funciones complejas .

Continuidad . Una función compleja $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ se dice *continua* en un punto $a \in \Omega$ si para todo disco V de centro $f(a)$ existe un disco U de centro a tal que si $z \in U \cap \Omega$ entonces $f(z) \in V$. Llamando $f(U \cap \Omega)$ al conjunto $\{ f(z) : z \in U \cap \Omega \}$ esta condición puede

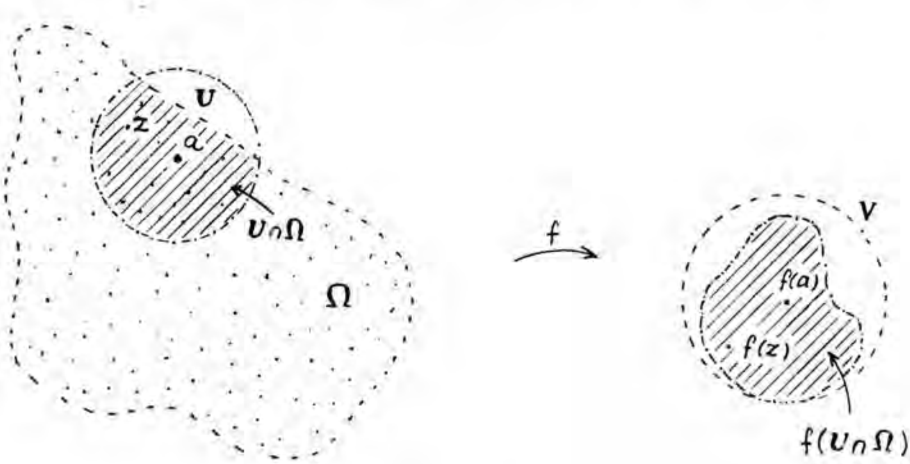


Figura 5

formularse así : $f(U \cap \Omega) \subset V$ (ver Fig. 5). En forma equivalente : f es contínua en a si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que, si $z \in \Omega$ y $|z - a| < \delta$ entonces $|f(z) - f(a)| < \varepsilon$. Si f es contínua en *todo* punto de Ω se dice simplemente que es *contínua*.

Límites. Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función compleja y a un complejo tal que, para todo disco U de centro a, $U \cap \Omega \neq \phi$. Se dice que un complejo b es el límite de f en el punto a y se escribe

$$b = \lim_{z \to a} f(z) \quad ,$$

si para todo disco V de centro b existe un disco U de centro a tal que, si $z \in U \cap \Omega$ y $z \neq a$ entonces $f(z) \in V$. En otros términos : dado $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que, si $z \in \Omega$ y $0 < |z - a| < \delta$ entonces $|f(z) - b| \leqslant \varepsilon$. En este caso se dice también que $f(z)$ *tiende* hacia b cuando z *tiende* hacia a.

Es claro que si $a \in \Omega$ entonces f es contínua en a si y sólo si $\lim_{z \to a} f(z) = f(a)$.

Es conveniente admitir límites infinitos : si para todo $R > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $z \in \Omega$ y $0 < |z - a| < \delta$ entonces $|f(z)| > R$ se dice que $f(z)$ tiende a ∞ cuando z tiende hacia a y se escribe

$$\lim_{z \to a} f(z) = \infty$$

El *"punto" del infinito* . Existe un procedimiento para reformular esta última definición de tal manera que no difiera formalmente del caso general. Consiste en agregar a $\mathbb{C}$ un nuevo elemento denotado ∞ (infinito) y considerar como discos alrededor de este nuevo punto los conjuntos de la forma $\{ z \in \mathbb{C} : | z | > R \}$ para $R > 0$. El nuevo conjunto $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{ \infty \}$ así obtenido se llama el *plano complejo extendido* .

Esta construcción no es en realidad artificiosa pues si colocamos una esfera S sobre el origen del plano complejo y representamos cada punto z de

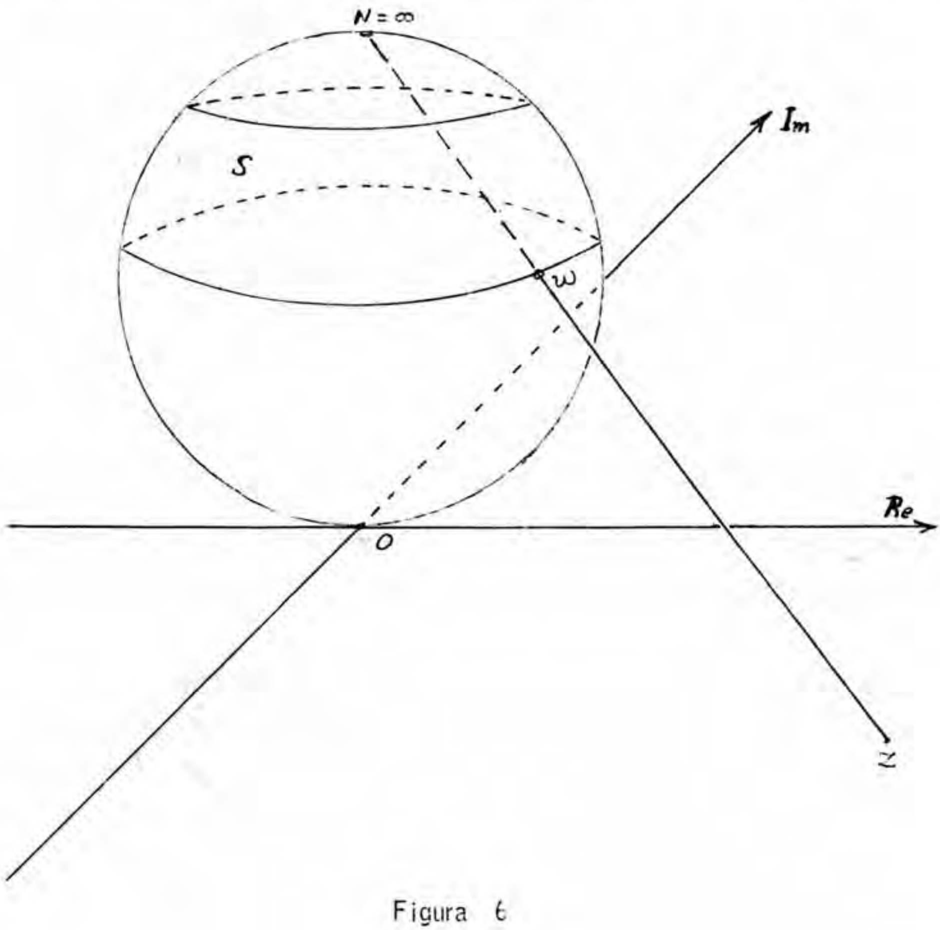


Figura 6

$\mathbb{C}$ por medio del punto w de S en el cual la recta que une el polo norte N con z intercepta a S, (ver Fig. 6), entonces un disco de centro ∞, según nuestra definición anterior, corresponde exactamente a un "disco" sobre S (casquete) de centro N. Luego puede considerarse que N, el cual no corresponde a ningún punto "finito" z de $\mathbb{C}$, es el punto que corresponde a ∞. La esfera S así interpretada es la *esfera de Riemann*.

3. Curvas.

Una *curva* en Ω (siendo Ω un subconjunto de $\mathbb{C}$) es una función contínua γ de un intervalo finito $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ $(-\infty < a < b < +\infty)$ en Ω. La continuidad implica en este caso que dado $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que, si t y t' son puntos de I tales que $|t - t'| < \delta$, entonces, $|\gamma(t) - \gamma(t')| < \varepsilon$.

Obsérvese que una curva γ en Ω es una *función* $I \to \Omega$ y como tal es diferente de la *imagen* $\gamma^* = \gamma(I)$, la cual es un subconjunto compacto de Ω. Curvas diferentes pueden tener la misma imagen. Así, por ejemplo,

Figura 7

$\gamma_1(t) = a + e^{it}$ $\quad 0 \leq t \leq 2\pi$ y $\gamma_2(t) = a + e^{it}$ $\quad 0 \leq t \leq 4\pi$ tienen la misma imagen $\gamma_1^* = \gamma_2^* = \{ z \in \mathbb{C} : |z - a| = 1 \}$ pero γ_1 da una sola vuelta alrededor de a mientras que γ_2 da dos vueltas (Fig. 7).

Si $x = R_e \circ \gamma$, $y = I_m \circ \gamma$ entonces la curva $\gamma : [a,b] \to \Omega$ puede escribirse en la forma

$$\gamma(t) = x(t) + i\, y(t)$$

donde las funciones $x, y : [a,b] \to \mathbb{R}$ son contínuas. El punto $\gamma(a)$ (resp. $\gamma(b)$) de Ω es el *origen* (resp. *extremo*) de γ; si $\gamma(a) = \gamma(b)$ la curva se dice *cerrada*. Siempre es posible "reparametrizar" la curva γ cambiando su intervalo de definición. Así, por ejemplo, puede definirse $\gamma_1(t) = \gamma[(1-t)a + tb]$, $0 \leq t \leq 1$; por esta razón puede suponerse que todas las curvas γ están definidas con un intervalo fijo, por ejemplo $I = [0, 1]$. Supondremos esto en lo que sigue.

Para definir el "producto" de dos curvas $\gamma_1, \gamma_2 : I \to \Omega$ tales que

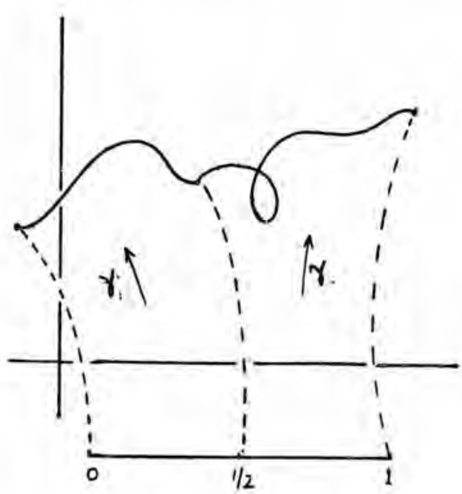


Figura 8

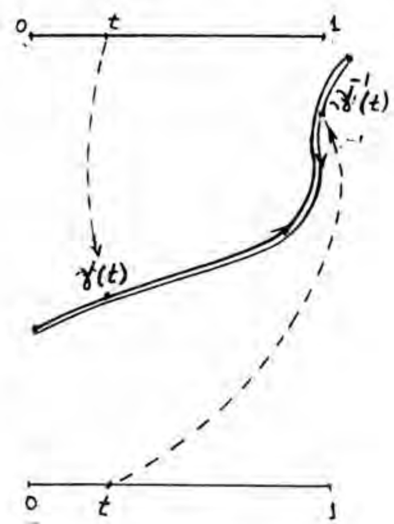


Figura 9

$\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$ primero se parametriza γ_1 en el intervalo $[0, \frac{1}{2}]$ $\rho_1(t) = \gamma_1(2t)$, $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$, y γ_2 en el intervalo $[\frac{1}{2}, 1]$: $\rho_2(t) = \gamma_2(2t-1)$, $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$ y luego se define

$$\gamma(t) = \begin{cases} \rho_1(t) \;, & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \rho_2(t) \;, & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

La curva γ es el producto de γ_1 y γ_2 (en este orden) y se escribe $\gamma = \gamma_1 \gamma_2$. (ver Fig. 8)

Para cada curva γ se define la curva "inversa"

$$\gamma^{-1}(t) = \gamma(1-t) \;,\; 0 \leq t \leq 1$$

(ver Fig. 9)

Una curva puede reducirse a un punto : $\epsilon : I \rightarrow \Omega$, $\epsilon(t) = z_o$ para todo $t \in I$.

Observemos, por último, que si $\gamma_1 : I \rightarrow \Omega_1$ es una curva en Ω_1 y $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ es contínua, entonces $\gamma_2 = f \circ \gamma_1 : I \rightarrow \Omega_2$

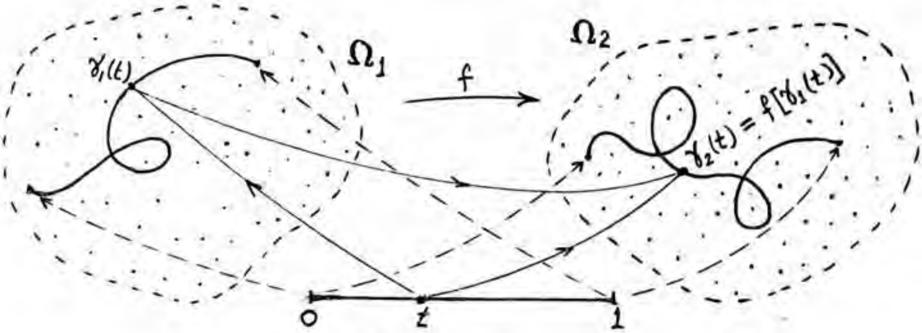


Figura 10

es una curva en Ω_2 (ver Fig. 10)

4. Regiones .

Un subconjunto abierto Ω de $\mathbb{C}$ se llama una *región* si para cada par de puntos z_o y z_1 de Ω existe una curva γ *en* Ω tal que $\gamma(0) = z_o$, $\gamma(1) = z_1$. Por esta razón se dice que una región es *conexa* .

Existe una caracterización extremadamente útil de las regiones : un abierto Ω es una región sí y sólo si Ω no puede descomponerse en unión de dos subconjuntos no vacíos, abiertos y disyuntos. Es decir, no puede escribirse $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ con $\Omega_1 \neq \phi \neq \Omega_2$ abiertos y $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \phi$. Ejemplos de regiones son el plano $\mathbb{C}$ y cualquier disco (abierto) D.

Si γ es una curva en una región Ω entonces existe un $\delta > 0$ tal que todo disco de radio δ, y cuyo centro esté sobre γ^*, está contenido en

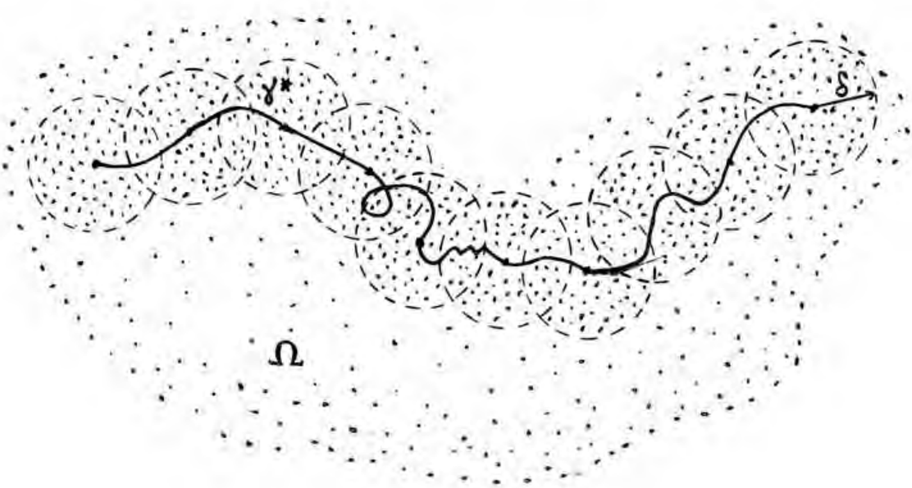
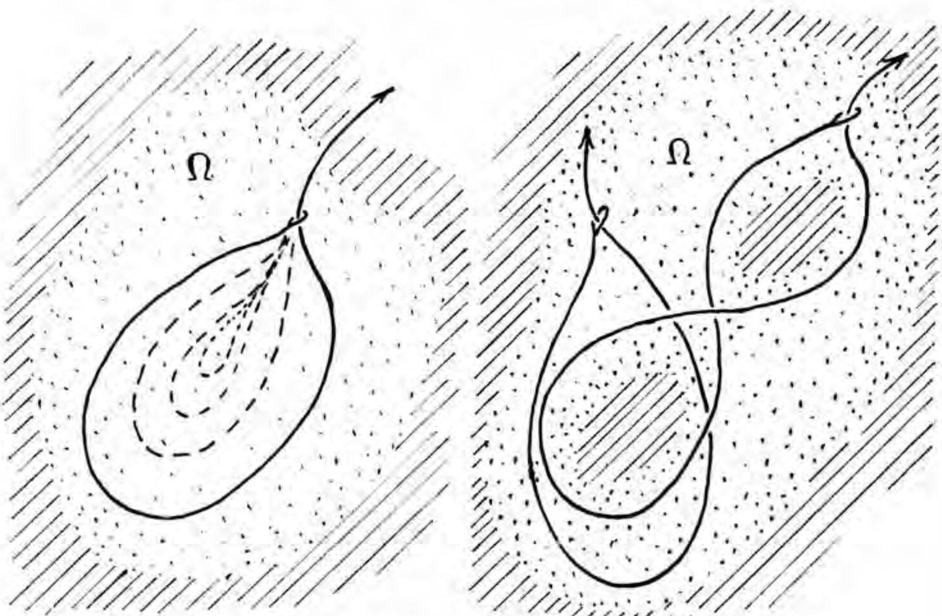


Figura 11

Ω. Además, como γ^* es compacta, dado $0 < \varepsilon \leq \delta$, siempre es posible cubrir a γ^* con un número *finito* de discos de radio ε y centro sobre γ^* (ver Fig. 11).

5. *Homotopía*.

Con el objeto de distinguir regiones sin "huecos" de regiones con "huecos" y más aún, para contar el número de huecos en una región, se introduce la noción de homotopía o deformación contínua de curvas. Intuitivamente, en una región sin huecos un "lazo" γ (ver Fig. 12(a)) puede "recoger-



(a) (b)

Figura 12

se" o "encogerse" hasta quedar reducido a un punto *sin salirse* de la región. Esto no es siempre posible en presencia de "huecos" pues el lazo podría "tropezar" con la "frontera" de los mismos. (Fig. 12, (b))

Deseamos describir más formalmente este proceso de encogimiento o deformación progresiva y contínua de una curva hasta reducirse a un punto. Este es claramente un caso particular de deformación contínua de una curva γ_0 en otra γ_1, la cual puede describirse dando una familia contínua de curvas, por ejemplo, γ_u $(0 \leq u \leq 1)$ que representan los estados intermedios de la deformación (Fig. 13).

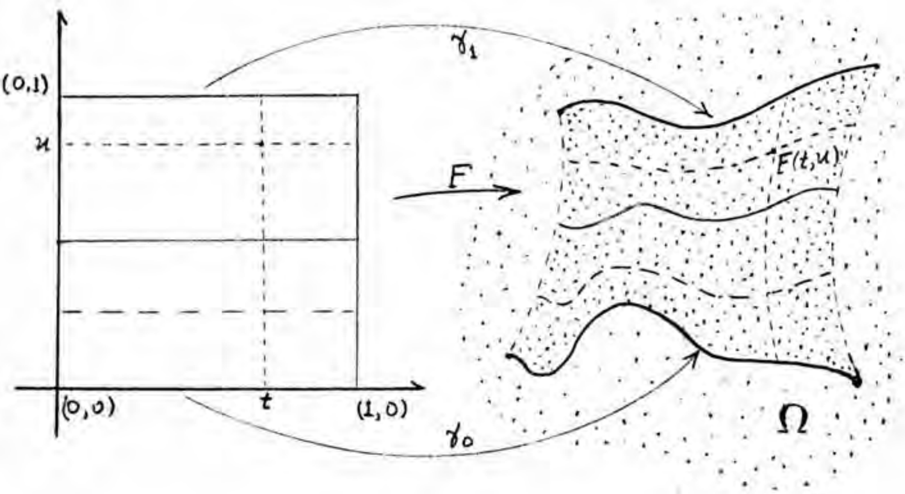


Figura 13

Pero esto equivale a dar una función F que a cada par de números reales (t,u), $0 \leq t \leq 1$, $0 \leq u \leq 1$ le hace corresponder un punto de Ω a saber, $\gamma_u(t)$

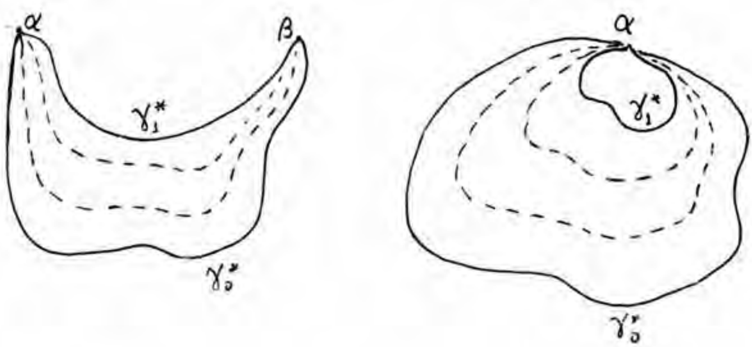
$$F : I \times I \longrightarrow \Omega \quad , \quad F(t,u) = \gamma_u(t) .$$

La continuidad de la deformación se traducirá entonces en la continuidad de F (ver Fig. 13).

Diremos entonces que dos curvas γ_o y γ_1 son *homotópicas en* Ω si existe una función contínua $F : I \times I \longrightarrow \Omega$ tal que

$F(t, 0) = \gamma_o(t)$ y $F(t, 1) = \gamma_1(t)$, para todo $t \in I$. Escribiremos en este caso $\gamma_o \quad \gamma_1$

Si $\gamma_o(0) = \gamma_1(0) = \alpha$ y $\gamma_o(1) = \gamma_1(1) = \beta$ y F es tal que $F(0, u) = \alpha$ y $F(1, u) = \beta$ para todo $u \in I$, entonces todas las curvas "intermedias" $\gamma_u(t) = F(t, u)$ tienen origen α y extremo β (Fig. 14(a)). En particular, si $\alpha = \beta$ todas las curvas son ce-



(a) (b)

Figura 14

rradas con origen y extremo α (Fig. 14(b)). Por último, si $\gamma_1(t) = \alpha$

para todo $t \in I$, es decir, si γ_1 se reduce a un punto, entonces la relación $\gamma_o \sim \gamma_1$ es una expresión precisa de la situación que deseabamos describir: la curva cerrada γ_o se encoge o contrae contínuamente hasta reducirse a un punto.

La ausencia de huecos en Ω se expresará diciendo que *toda curva cerrada en Ω es homotópica a un punto*. En este caso se dice que Ω es *simplemente conexa* o que su *número de conexidad* es 1.

Si Ω no es simplemente conexa se dice que es múltiplemente conexa. Si Ω tiene un solo "hueco" se dice que es doblemente conexa o que su número de conexidad es 2. En general, si una región tiene n "huecos" se dice que su número de conexidad es $n+1$. (Fig. 15). Para precisar esta noción es conveniente elaborar un poco más la noción de homotopía.

Consideremos un punto $\alpha \in \Omega$. La homotopía es una relación de equivalencia en el conjunto de todas las curvas cerradas γ en Ω con origen y extremo en α. Además, si $\gamma_1 \sim \gamma_2$ y $\rho_1 \sim \rho_2$ entonces $\gamma_1 \rho_1 \sim \gamma_2 \rho_2$ y esto permite definir un producto entre clases de equivalencia: si $\tilde{\gamma}_1$ (resp. $\tilde{\gamma}_2$) es la clase de γ_1 (resp. γ_2) el producto $\tilde{\gamma}_1 \tilde{\gamma}_2$ será por definición la clase de $\gamma_1 \gamma_2$, la cual es independiente de los representantes γ_1 y γ_2.

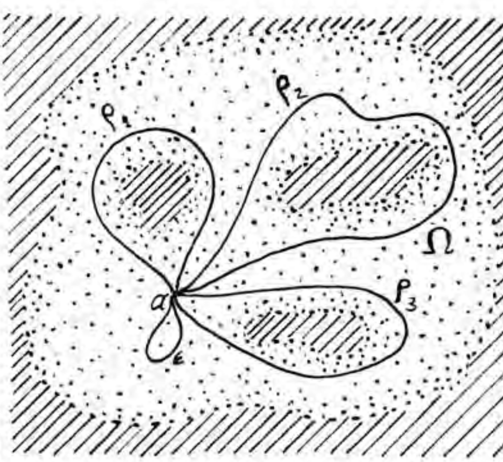


Figura 15

Con esta operación el conjunto $\pi(\Omega)$ de estas clases de equivalencia es un grupo y se llama el *grupo fundamental* de la región Ω. El elemento neutro de $\pi(\Omega)$ es la clase de la curva $\epsilon(t) = \alpha$ $(0 \leq t \leq 1)$; el inverso de $\tilde{\gamma}$ es la clase de γ^{-1}.

Afirmar que Ω es simplemente conexa equivale a afirmar que $\pi(\Omega)$ tiene un sólo elemento, a saber ϵ.

Si existe alguna familia finita $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ de elementos de $\pi(\Omega)$ tal que cualquier otro elemento γ de $\pi(\Omega)$ puede expresarse como producto de los γ_i y sus inversos, debe existir una familia mínima $\epsilon, \rho_2, \ldots, \rho_q$ con esta misma propiedad. Se dice entonces que q es el *número de conexidad* de la región Ω. (Fig. 15).

Ejemplo: El grupo fundamental de un disco D sin su centro tiene como elementos a $\epsilon, \gamma, \gamma^2, \gamma^3, \ldots$ donde γ es una curva que da "una vuelta" alrededor del centro (Fig. 16). Luego $\pi(D)$ es (isomorfo a) el grupo Z de los números enteros.

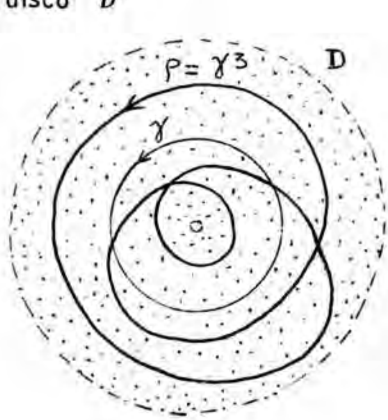


Figura 16

6. Series.

Dada una sucesión $(a_k) = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$ de números reales o complejos la *serie asociada* a ella es la sucesión de sumas parciales

$$s_o = a_o$$
$$s_1 = a_o + a_1$$
$$s_2 = a_o + a_1 + a_2$$
$$\cdots\cdots$$

Para indicar que (s_n) es la serie asociada a la sucesión (a_k) se acostumbra designarla por medio de una suma formal infinita :

$$a_o + a_1 + a_2 + \ldots, \quad ó \quad \sum_{k=o}^{\infty} a_k \quad , ó \text{ simplemente } \quad \Sigma\, a_k \; .$$

Si (s_n) es convergente y por ejemplo $s = lim\ s_n$, se dice que s es la *suma* de la serie y se escribe

$$s = a_o + a_1 + a_2 + \ldots \quad (= \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \Sigma\, a_k)$$

Si (s_n) diverge se dice que la serie $\Sigma\, a_k$ es divergente.

Cuando la serie $\Sigma|a_k|$ converge,también converge $\Sigma\, a_k$ y se dice que es *absolutamente convergente* .

La sucesión (a_n) determina, para cada número z , la sucesión $(a_k z^k) = (a_o, a_1 z, a_2 z^2, \ldots)$ cuya serie asociada

$$a_o + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots \; (= \Sigma\, a_k z^k)$$

tiene como sumas parciales los siguientes polinomios en z .

$$s_0(z) = a_0$$

$$s_1(z) = a_0 + a_1 z$$

$$s_n(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$$

$$\ldots\ldots$$

Esta es la *serie de potencias* (de z) con coeficientes $a_0, a_1, a_2, \ldots$. Naturalmente los números z aparecen en una de dos clases : aquellos para los cuales la serie converge y aquellos para los cuales no converge . Es claro que $z = 0$ está siempre en la primera clase ; y en ciertos casos es el único punto para el cual la serie converge .

Cada sucesión (a_k) determina un R, $0 \leq R \leq +\infty$, a saber

$$R = 1 \Big/ \lim \sqrt[n]{|a_n|} \quad ,$$

tal que la serie $\sum a_k z^k$ converge (absolutamente) para todo z en el disco (abierto) D de centro 0 y radio R ; si $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ (resp. $+\infty$) se considera $D = \mathbb{C}$ (resp. $D = \phi$) ; salvo mención expresa de lo contrario siempre supondremos que $D \neq \phi$.

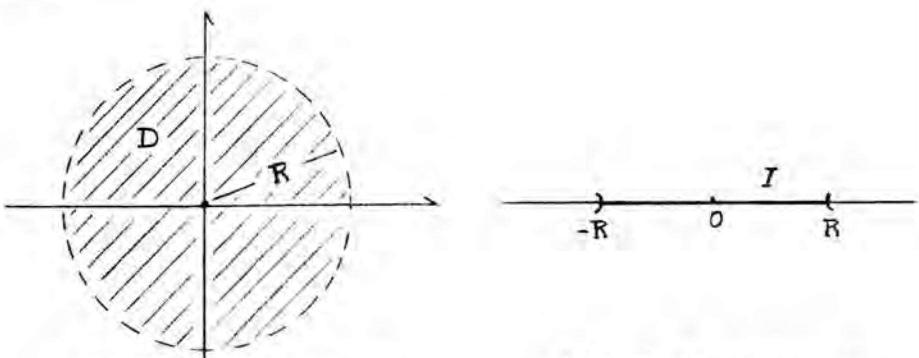
En los puntos exteriores a D , es decir, para $|z| > R$ la serie diverge y en los puntos de la circunferencia $C = \{ z : |z| = R \}$ el comportamiento es distinto en cada caso particular: puede ser convergente en unos y divergente en otros . Se dice que R es el *radio de convergencia* de la serie de potencias de coeficientes (a_k) y que D es su *disco o círculo de convergencia* (alrededor de 0) .

Ejemplo . Si $a_{n+1} = a_{n+2} = \ldots = 0$ la serie $\Sigma\, a_k x^k$ se reduce a un polinomio

$$a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$$

Su "círculo" de convergencia es todo el plano $\mathbb{C}$.

Obsérvese que lo que determina a una serie de potencias es la sucesión (a_k) de sus coeficientes, siendo el papel de la "variable" z más bien secundario, lo cual sugiere la posibilidad de estudiar las propiedades de las series formales $\Sigma\, a_k(\ )^k$ en las cuales no figura explícitamente una variable .



Disco de convergencia *Intervalo de convergencia*

Figura 17

Análogas consideraciones pueden hacerse en el caso real , e.d. $a_0, a_1, a_2, \ldots$ reales. Es costumbre usar entonces la letra x para designar la variable. En lugar de un disco hay en este caso un *intervalo de convergencia* $I = \{ x : |x| < R \} =]-R\, , R[$.

Si D es el disco de convergencia de una serie de potencia $\Sigma\, a_k z^k$, puede definirse una función $g : D \longrightarrow \mathbb{C}$ haciendo corresponder a cada

$z \in D$ la suma de la serie $\Sigma\, a_k z^k$, es decir

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \quad , \text{ para todo } z \in D .$$

La convergencia es *uniforme* en cualquier disco cerrado D_1 de centro 0 y radio $R_1 < R$, en otros términos: dado $\varepsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que, si $n \geq N$ entonces $| s_n(z) - g(z) | < \varepsilon$ para todo $z \in D_1$.

Supongamos de nuevo que la serie de potencias de coeficientes a_0, a_1, a_2, ... tiene un radio de convergencia $R > 0$ y fijemos un punto a del plano. La serie

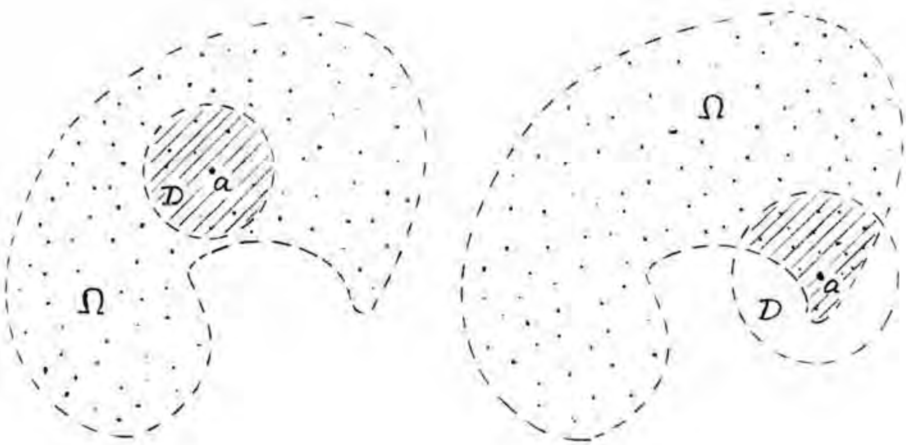
$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-a)^k$$

converge para todo z de $\mathbb{C}$ tal que $|z-a| < R$, es decir, converge en el disco $D = \{ z : |z-a| < R \}$. La función $g : D \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por medio de la serie viene dada en este caso por

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-a)^k \quad , \text{ para todo } z \in D .$$

Es así como una serie puede usarse para definir una función compleja. Recíprocamente, dada una función compleja $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ y dado un punto a de Ω podemos preguntarnos si existe una serie de potencias (con disco de convergencia $D \neq \phi$ y tal que, para todo $z \in \Omega \cap D$ (ver Fig. 18(a)) se tenga que

$$f(z) = \Sigma\, a_k (z-a)^k$$



(a) (b)

Figura 18

Puede probarse que esto no siempre es posible. Cuando ésta situación tiene lugar, se dice que f es *desarrollable* (o que *tiene un desarrollo*) *en serie de potencias* alrededor de a. Obsérvese que D puede no estar (totalmente) contenido en Ω (Fig. 18(b)).

Podemos considerar sucesivamente los dos casos anteriores en la siguiente forma : supongamos que la serie de potencias de coeficientes $a_o, a_1, a_2, \ldots$ tiene un disco de convergencia $D \neq \phi$ y sea $g : D \longrightarrow \mathbb{C}$ la función definida por dicha serie, es decir, $g(z) = \Sigma\, a_k(z-a)^k$, para todo $z \in D$. Es claro que g tiene un desarrollo en serie de potencias alrededor de a (pues precisamente está definida en esa forma), pero lo que no es en modo alguno trivial es que en realidad g resulta ser desarrollable en serie de potencias alrededor de *cualquier otro punto* b del disco D. Es decir, para cada b de D existen números complejos $b_o, b_1, b_2, \ldots$ tales que la serie de potencias con éstos coeficientes tiene un disco de conver

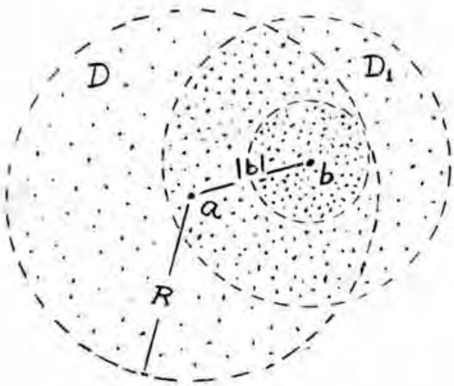


Figura 19

gencia $D_1 \neq \phi$ y además

$$g(z) = \sum_{k=o}^{\infty} b_k (z-b)^k \quad \text{para todo} \quad z \in D \cap D_1$$

El resultado es en realidad aún más preciso : el radio de convergencia es siempre mayor o igual que $R - |b|$, pudiendo en ciertos casos ser estrictamente mayor. (ver Fig. 19) .

Si h es la función $D_1 \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por la serie $\Sigma b_k (z-b)^k$, es decir :

$$h(z) = \sum_{k=o}^{\infty} b_k (z-b)^k , \quad \text{para todo} \quad z \in D_1,$$

entonces esta función *coincide* con la función g en la región $D \cap D_1$, esto es, $g(z) = h(z)$ para todo $z \in D \cap D_1$. Este hecho permite definir una nueva función

$$g_1 \quad D \cup D_1 \longrightarrow \mathbb{C}$$

conviniendo que

$$g_1(z) = \begin{cases} g(z) & \text{si} \quad z \in D \\ h(z) & \text{si} \quad z \in D_1 \end{cases}$$

Esta función g_1 es también desarrollable en serie de potencias alrededor de cada punto de su dominio (pues tanto g como h tienen esta propiedad). De h diremos que es una *prolongación* de g al dominio D_1.

7. *Funciones analíticas.*

Sea Ω un subconjunto del plano y $f: \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ una función compleja. Se dice que f es *analítica* (en Ω) si f es desarrollable en serie de potencias alrededor de cada punto b de Ω.

La observación hecha en el parágrafo anterior puede entonces enunciarse así: dada la serie de potencias con coeficientes $a_o, a_1, a_2, \dots$ (y radio de convergencia $R > 0$) y dado un punto a de $\mathbb{C}$, definamos $g(z) = \Sigma\, a_k (z-a)^k$ para todo z del disco de convergencia $D = \{z : |z-a| < R\}$; entonces $g: D \longrightarrow \mathbb{C}$ es una función analítica (en D).

La noción de función analítica se aplica inmediatamente al caso de funciones reales definidas sobre un subconjunto abierto de la recta.

Ejemplos 1) Cada polinomio define una función analítica en $\mathbb{C}$.

2) La función $f: z \mapsto \frac{1}{z}$ definida en $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ es ana

lítica en esta región : si $a \in \mathbb{C}^*$ entonces

$$j(z) = \sum \frac{(-1)^k}{k!\, a^{k+1}} (z-a)^k$$

para todo z tal que $|z-a| < |a|$.

Análogamente, la función $z \mapsto \frac{1}{z-a}$ es analítica en la región $\mathbb{C} - \{a\}$.

3) La función real $f(x) = tg\, x$ es analítica en $\mathbb{R} - \{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in Z \}$. Análogamente son analíticas en sus respectivos dominios las otras funciones trigonométricas, la exponencial, etc.

Claramente, si f es analítica (en Ω) entonces su restricción a cualquier subconjunto abierto $\Omega_0 \subset \Omega$ es también analítica (en dicho subconjunto).

He aquí algunas propiedades de las funciones analíticas.

(1) Si f_1 (resp. f_2) es analítica en Ω_1 (resp. Ω_2) entonces $f_1 + f_2$ y $f_1 f_2$ son analíticas (en $\Omega_1 \cap \Omega_2$).

(2) Si f es analítica en Ω entonces $1/f$ es analítica en el subconjunto $\Omega_o = \{ z \in \Omega : f(z) \neq 0 \}$.

(3) La compuesta de dos funciones analíticas es una función analítica.

Series de Laurent. Observemos primero que $|1/z| = 1/|z|$ supuesto $z \neq 0$, luego, para todo $R > 0$, si $|z| > 1/R$ entonces $|1/z| < R$

es decir, la función $j_E : z \mapsto 1/z$ transforma cada punto de la región $E = \{ z : |z| > 1/R \}$ en un punto del disco $D_o = \{ z : |z| < R \}$. (ver Fig. 20).

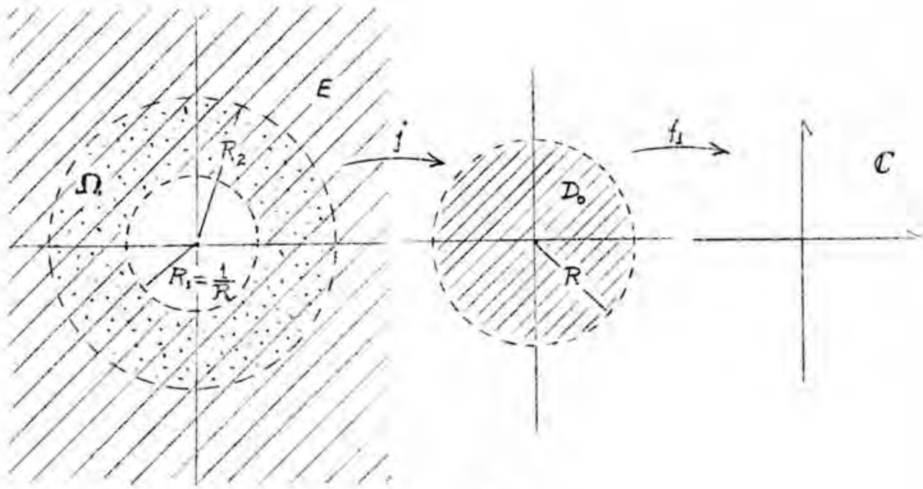


Figura 20

Tomemos ahora una sucesión (b_k) y supongamos que el radio de convergencia de la serie de potencias con coeficientes $b_o, b_1, b_2, \ldots$ es $R > 0$. Sea además g la función analítica por ella definida, esto es, $g(z) = \sum_k b_k z^k$ para todo z del disco de convergencia $D_o = \{ z : |z| < R \}$.

Llamemos $R_1 = 1/R$ y tomemos z tal que $|z| > R_1$, es decir, tomamos $z \in E$. Entonces $j_E(z) = 1/z$ estará en D_o, luego la serie $\sum_k b_k (1/z)^k = \sum_k b_k z^{-k}$ converge. Si llamamos $f_1(z)$ a la suma de esta serie habremos definido una función

$$f_1 : E \longrightarrow \mathbb{C}$$

tal que $f_1(z) = \sum_k b_k z^{-k}$, siempre que $|z| > R_1$. Obsérvese que f_1

es precisamente la función compuesta de j_E y g

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "j_E"] \arrow[rr, bend right, "f_1 = g \circ j_E"'] & D_o \arrow[r, "g"] & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

Luego f_1 es analítica en la región $E = \{ z : |z| > R_1 \}$ (ver Figs. 20 y 21).

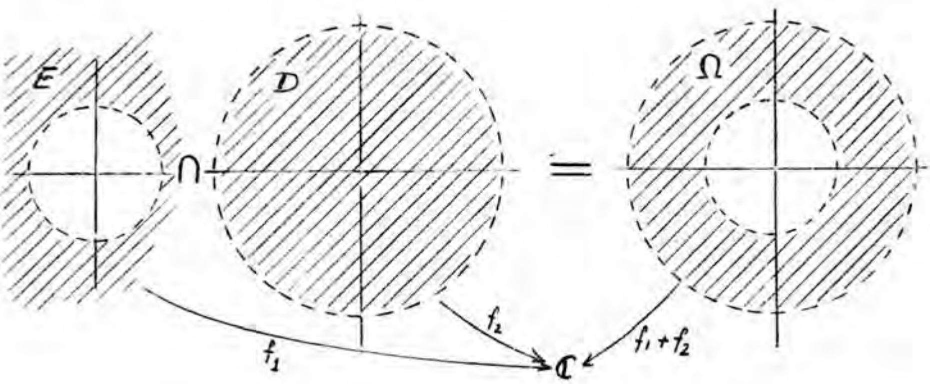


Figura 21

Si $\sum_{k=o}^{\infty} c_k z^k$ es otra serie de potencias cuyo círculo de convergencia $D = \{ z : |z| < R_2 \}$ es tal que $R_1 < R_2$ entonces tendremos, además de la función analítica $f_1 : E \longrightarrow \mathbb{C}$, la función analítica $f_2 : D \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $f_2(z) = \sum_{k=o}^{\infty} c_k z^k$. Entonces la función suma $f = f_1 + f_2$ estará definida y será analítica en la corona circular

$$\Omega = E \cap D = \{ z : R_1 < |z| < R_2 \}.$$

Si definimos una sucesión $(a_k)_{k=-\infty}^{k=+\infty} = (\ldots, a_{-2}, a_{-1}, a_o, a_1, a_2, \ldots)$ conviniendo que

$$a_o = b_o + c_o$$

$$a_{-k} = b_k \qquad \text{para} \quad k = 1, 2, \ldots ,$$

$$a_k = c_k$$

entonces f puede expresarse en la forma

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} z^{-k} + \sum_{k=o}^{\infty} a_k z^k$$

o también :

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k z^k , \quad R_1 < |z| < R_2 .$$

Una serie de esta forma se llama una *serie de Laurent*. Toda serie de Laurent converge en una corona circular (eventualmente vacía) y representa una función analítica allí. En efecto, dada la serie $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_k z^k$, consideremos la serie de potencias de coeficientes $a_o, a_1, a_2, \ldots$ (resp. $0, a_{-1}, a_{-2}, \ldots$) y sea R_2 (resp. R) su radio de convergencia. Entonces $\sum_{b=o}^{\infty} a_k z^k$ converge para $|z| < R_2$ mientras que $\sum_{k=-1}^{\infty} a_k z^k = \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} (1/z)^k$ converge para $|1/z| < R$, es decir, para $|z| > R_1$, siendo $R_1 = 1/R$. En resumen, la serie $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_k z^k$ converge para todo z en la corona $\Omega = \{ z : R_1 < |z| < R_2 \}$ (si $R_2 \leq R_1$ entonces $\Omega = \phi$).

Como en el caso de las series de potencias, pueden considerarse series de Laurent alrededor de un punto cualquiera a :

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} a_k (z-a)^k$$

Una serie de éste tipo converge y define una función analítica en una corona $\Omega = \{z : R_1 < |z - a| < R_2\}$ de centro a. Recíprocamente, si f es una función analítica en una corona Ω entonces es representable en serie de Laurent en Ω, esto es, existen números complejos $\ldots, a_{-2},$ $a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \ldots$ tales que, la serie de Laurent que tiene estos coeficientes converge en Ω y

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_k z^k \quad , \text{ siempre que } \quad R_1 < |z - a| < R_2$$

En el caso límite $R_1 = 0$ la corona Ω se reduce a un disco sin su centro.

8. ***Derivación.***

Sea $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ una función compleja definida sobre un subconjunto abierto Ω del plano y sea a un punto de Ω. Se dice que f es *holomorfa* (o *derivable*) en a si

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

existe. Este límite es entonces la *derivada* de f en a y se denota $f'(a)$. Las reglas usuales del cálculo de derivadas en el caso real se enuncian y demuestran del mismo modo en el caso complejo. Si $f'(z)$ existe para todo punto z de una cierta subregión $\Omega_o \subset \Omega$ puede definirse una función $\Omega_o \longrightarrow \mathbb{C}$ que a cada z de Ω_o le hace corresponder $f'(z)$. Esta función se denota f' y se llama la (función) derivada de f. Como en el caso real, la derivabilidad de una función implica su continuidad.

Si f es derivable en cada punto de Ω se dice que f es *holomorfa* en Ω. Este es el caso cuando f es analítica en Ω: dado $a \in \Omega$, f puede desarrollarse en serie alrededor de a:

$$f(z) = \sum_{k=o}^{\infty} a_k (z-a)^k \quad , \quad |z-a| < R ,$$

entonces

$$f'(z) = \sum k a_k (z-a)^{k-1}$$

y en general

$$f^{(r)}(z) = \sum k(k-1) \ldots (k-r+1) a_k (z-a)^{k-r}$$

de modo que f es indefinidamente derivable y además $f^{(r)}(a) = r!\, a_r$, o lo que es equivalente :

$$a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(a) \quad , \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

(se acostumbra convenir que $f^{(o)} = f$). Así pues, la serie de potencias que representa a f está unívocamente determinada : es precisamente la *serie de Taylor* de f alrededor de a.

Análogamente, si Ω es una corona circular y f está representada por la serie de Laurent

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} k a_k (z-a)^{k-1} \quad , \quad R_1 < |z-a| < R_2 ,$$

entonces

$$f'(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} k a_k (z-a)^{k-1} \quad , \quad R_1 < |z-a| < R_2 .$$

Para $k \geq 0$ se obtiene como antes, $a_k = f^{(k)}(a) / k!$.

Si una función real es derivable entonces es contínua, pero nada puede afirmarse con respecto a sus derivadas f' , f'' , etc. En el caso complejo la derivabilidad impone una restricción extremadamente severa : si f es derivable en Ω entonces f' también debe ser derivable y por lo tanto f resulta ser indefinidamente derivable en Ω . Además, si $a \in \Omega$ y *definimos* $a_k = f^{(k)}(a) / k!$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ se tiene que

$$f(z) = \sum_{0}^{\infty} a_k (z-a)^k$$

para todo z en un cierto disco de centro a. En otros términos, f es analítica en Ω . Tenemos entonces el siguiente hecho :

Teorema . *Si f es una función compleja definida en un abierto Ω de $\mathbb{C}$ entonces f es holomorfa en Ω si y sólo si f es analítica en Ω .*

La afirmación correspondiente en el caso real no es cierta. El contraejemplo clásico es la llamada *función de Cauchy* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 . \end{cases}$$

Esta función es indefinidamente derivable en $\mathbb{R}$ y en particular $f^{(k)}(0) = 0$ para todo k. Por lo tanto f no es desarrollable en serie alrededor de 0 pues si $f(x) = \sum a_k x^k$ para todo x en un cierto intervalo

$]-R, R[, R>0$, entonces deberíamos tener $a_k = f^{(k)}(0)/k!$ $k=0, 1, 2, \ldots$ luego $f(x)=0$, lo cual contradice la definición de $f(x)$ para $x>0$.

Si Ω es un abierto, designaremos por $H(\Omega)$ el conjunto de todas las funciones holomorfas (e.d. analíticas) en Ω. Con respecto a la adición $f+g$ y al producto fg este es un anillo; el elemento cero de $H(\Omega)$ es la función $0: \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $0(z)=0$ para todo $z \in \Omega$; la relación $f=0$ se expresa diciendo que f *es idénticamente nula* en Ω ó que $f(z)=0$ *idénticamente en* Ω.

9. *Propiedades de las funciones analíticas.*

Enunciamos en seguida algunos de los resultados básicos de la teoría de las funciones analíticas ("teoría de funciones").

Ecuaciones de Cauchy-Riemann. Si $u, v: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ son respectivamente la parte real y la parte imaginaria de $f: \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, la analiticidad de f se refleja en u y v en la forma siguiente:

Teorema. Si f es analítica entonces u y v son funciones armónicas, es decir,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad , \quad \text{y}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

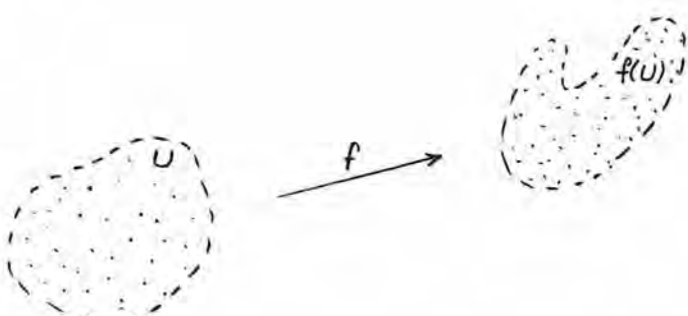
y además satisfacen las relaciones siguientes ('' ecuaciones de Cauchy-Riemann'').

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \text{ y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial v}{\partial x} \qquad (*)$$

Recíprocamente, si u y v son armónicas y satisfacen (*) entonces $f = u + iv$ es analítica .

Teorema de la función abierta. Una función $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ se dice *abierta* si para todo subconjunto abierto $U \subset \Omega$ el subconjunto $f(U)$ es abierto .



Teorema *Toda función analítica no constante es una función abierta.*

Principio del módulo máximo. Un punto z es un *punto frontera* de una región Ω si todo disco de centro z contiene puntos de Ω y puntos que no están en Ω, e.d. z "está arbitrariamente próximo" a Ω y al complemento de Ω. El conjunto $\partial\Omega$ de todos los puntos frontera de Ω se llama la *frontera* de Ω (ver Fig. 22).

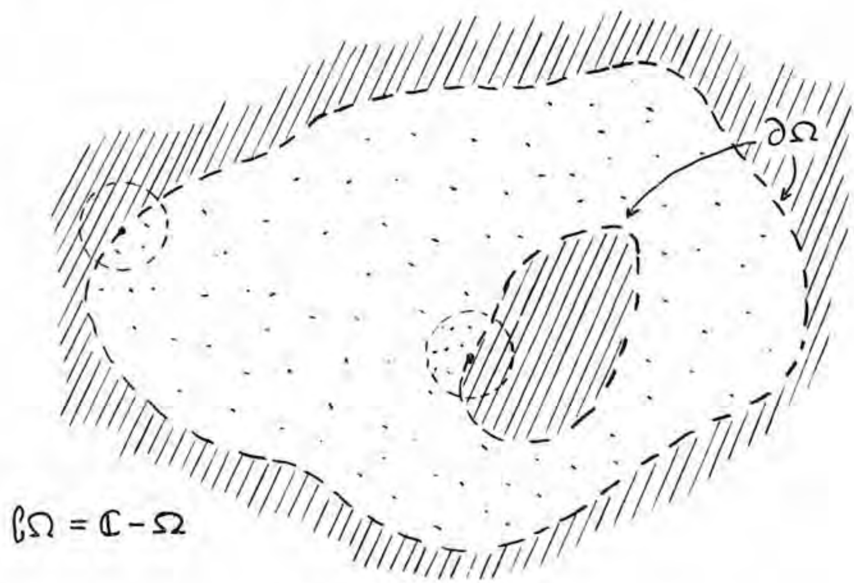
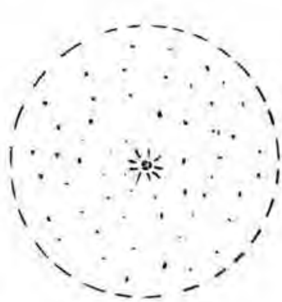


Figura 22

Ejemplo: Si $\Omega = \{z : 0 < |z| < 1\}$ entonces $\partial\Omega = C \cup \{0\}$, siendo $C = \{z : |z| = 1\}$.



Para regiones *acotadas* e.d. que están contenidas en algún círculo se tiene el siguiente

Teorema. Si f *es analítica en* Ω *y continua en* $\partial\Omega$ *entonces* $|f(z)|$ *alcanza su máximo sobre* $\partial\Omega$. Con más precisión si $|f(z)| \leq M$ para todo $z \in \partial\Omega$ entonces $|f(z)| < M$ para todo $z \in \Omega$.

Teorema de Liouville. Si una función $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es analítica, (en todo el plano) se dice que es una *función entera*. Salvo en un caso trivial, una función entera f no puede ser *acotada*, es decir, no existe $M > 0$ tal que $|f(z)| < M$, para todo z de $\mathbb{C}$; en efecto, se puede probar el siguiente

Teorema. *Si* f *es entera y acotada en todo el plano, entonces debe ser constante.*

Un corolario de este teorema es el llamado *Teorema fundamental del álgebra*: Todo polinomio de grado ≥ 1 tiene por lo menos una raíz.

Nota: En el análisis complejo aparecen en forma natural diversas ideas geométricas. Ejemplos son el teorema de la función abierta y la derivación del principio del módulo máximo a partir de aquel. También podemos mencionar el llamado Lema de Schwarz: si f es analítica para $|z| < 1$ y satisface $|f(z)| < 1$ y $f(0) = 0$ entonces $|f(z)| \leq |z|$ para todo z $(|z| < 1)$ y $|f'(0)| \leq 1$. Este resultado es importante por cuanto ayuda a demostrar teoremas bastante fuertes.

10. **Ceros y Polos.**

Un *cero* de una función (analítica) $f: \Omega \to \mathbb{C}$ es un punto $a \in \Omega$ tal que $f(a) = 0$. Si suponemos que además $f'(a) = f^{(2)}(a) = \ldots = f^{(b-1)}(a) = 0$ pero que $f^{(b)}(a) \neq 0$, de tal manera que $f^{(b)}$ es la primera derivada que *no* se anula en a, entonces, desarrollando en serie de potencias (serie de Taylor) alrededor de a se obtiene :

$$f(z) = \sum_{o}^{\infty} (f^{(k)}(0) / k!)(z-a)^k$$

$$= (f^{(b)}(a) / b!)(z-a)^b + (f^{(b+1)}(a) / (b+1)!)(z-a)^{b-1} + \ldots .$$

$$= (z-a)^b \sum_{k=b}^{\infty} (f^{(k)}(a) / k!)(z-a)^{k-b}$$

para todo z en un cierto disco $D \subset \Omega$ de centro a (contenido en Ω). La serie que aparece en la última expresión define una nueva función analítica $f_b : D \to \mathbb{C}$,

$$f_b(z) = \sum_{k=b}^{\infty} (f^{(k)}(a) / k!)(z-a)^{k-b}, \qquad z \in D,$$

tal que $f_b(a) = f^{(b)}(a) / b! \neq 0$. Entonces, para todo $z \in D$

$$f(z) = (z-a)^b f_b(z)$$

donde f_b es analítica y diferente de cero en a. En este caso diremos que a es un *cero de orden* b de la función f o que f *tiene un cero de orden* b en el punto a. Veremos enseguida que si Ω es una región entonces f no puede tener ceros de orden infinito, a menos que f sea idénticamente cero en Ω

En efecto, podemos clasificar los puntos de Ω en dos subconjuntos Ω_1 y Ω_2 siendo Ω_1 el conjunto de aquellos $a_1 \in \Omega$ en donde f y todas sus derivadas se anulan, es decir, Ω_1 sería el conjunto de los ceros de f de "orden infinito", mientras que Ω_2 es el conjunto de los puntos $a_2 \in \Omega$ en los cuales f ó alguna de sus derivadas no es cero ; es claro que $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \phi$. Si $a_1 \in \Omega_1$ hay un disco $D_1 \subset \Omega$ de centro a_1 tal que si $z \in D_1$ entonces

$$f(z) = \sum_{0}^{\infty} (f^{(k)}(a_1) / k!) \quad (z - a_1)^k = 0 ,$$

es decir, f es idénticamente nula en D_1 y por lo tanto $D_1 \subset \Omega_1$; esto prueba que Ω_1 es abierto. Por otra parte, si $a_2 \in \Omega_2$ entonces existe k tal que $f^{(k)}(a_2) \neq 0$ y como $f^{(k)}$ es contínua hay un disco $D_2 \in \Omega$ de centro a_2 tal que $f^{(k)}(z) \neq 0$ para todo $z \in D_2$; luego todo elemento z de D_2 está en Ω_2, es decir, $D_2 \subset \Omega_2$, y esto prueba que Ω_2 es abierto. Como Ω es una región, debemos tener $\Omega_1 = \phi$ o bien $\Omega_2 = \phi$; en el segundo caso $\Omega = \Omega_1$ y entonces f es idénticamente nula. En el primer caso $\Omega = \Omega_2$ y todo cero de f es de un cierto orden (finito) .

Si f no es idénticamente nula y a es un cero de f (de orden h, por ejemplo) existe, según hemos visto, un disco $D \subset \Omega$ de centro a y una función analítica $f_h : D \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $f_h(a) \neq 0$ y

$$f(z) = (z - a)^h f_h(z) \qquad \text{para todo} \quad z \in D .$$

Como f_h es contínua, debe existir un disco $D_1 \subset D$ de centro a

tal que $f_b(z) \neq 0$ para todo $z \in D_1$ y entonces observando que $(z-a)^b$ es nulo únicamente cuando $z = a$, concluimos que $f(z) \neq 0$ para todo z de D_1, *diferente* de a. Observamos entonces que si a es un cero de f existe un disco de centro a, a saber D_1, en el cual no hay *otros* ceros de f. Enunciamos este hecho diciendo que los ceros de una función f analítica en una región Ω son *aislados* (a menos que f sea idénticamente nula).

Los siguientes hechos son consecuencias inmediatas de lo anterior :

(i) Si $f, g \in H(\Omega)$ y $fg = 0$ entonces $f = 0$ ó $g = 0$.

(ii) Si $f, g \in H(\Omega)$ y coinciden en un disco $D \subset \Omega$ entonces $f = g$.

Singularidades aisladas. Sea Ω una región, b un punto de Ω y Ω_b la subregión $\Omega - \{b\}$. Si $f \in H(\Omega_b)$ se dice que b es una *singularidad aislada* de f. Tomando un disco $D = \{z : |z-b| < R\}$ tal que $D \subset \Omega$ tendremos que f es analítica en la "corona" $D' = D - \{b\} = \{z : 0 < |z-b| < R\}$, luego f es desarrollable en serie de Laurent :

$$f(z) = \ldots + \frac{a_{-2}}{(z-b)^2} + \frac{a_{-1}}{z-b} + a_o + a_1(z-b) + a_2(z-b)^2 + \ldots \quad \text{para todo}$$

$z \in D'$. En este caso el coeficiente a_{-1} se llama el *residuo* de f en el punto b.

Consideraremos varios casos

(a) Si $a_{-1} = a_{-2} = \ldots = 0$ obtenemos

$$f(z) = a_o + a_1(z-b) + a_2(z-b)^2 + \ldots \qquad (*)$$

para todo $z \in D'$. Si *definimos* $f(b) = a_0$ entonces el desarrollo (*) es válido para todo z de D, es decir, f es analítica en D y por lo tanto en Ω. Decimos entonces que b es una *singularidad evitable* de f. Con más precisión : b es una *singularidad evitable* de f si es posible definir f en el punto b de tal manera que la función (de Ω en $\mathbb{C}$) así obtenida sea analítica (en Ω) ; ésto sucede sí y sólo si

$$\lim_{z \to b} (z-b)\, f(z) = 0$$

(b) Si existen algunos coeficientes a_{-k} $(k = 1, 2, \ldots)$ no nulos podemos distinguir dos subcasos :

i) Hay únicamente un número finito de tales coeficientes (no nulos) : sea m el mayor entero tal que $a_{-m} \neq 0$, entonces :

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-b)^m} + \ldots + \frac{a_{-1}}{z-b} + a_0 + a_1(z-b) + a_2(z-b)^2 + \ldots$$

para todo $z \in D'$. En este caso $\lim_{z \to b} |f(z)| = +\infty$ y la función $\varphi(z) = (z-b)^m f(z)$, $z \in D'$, tiene una singularidad evitable en b. Decimos en este caso que b es un *polo* (de orden m) de f y que el polinomio en $1/(z-b)$:

$$\frac{a_{-m}}{(z-b)^m} + \ldots + \frac{a_{-2}}{(z-b)^2} + \frac{a_{-1}}{z-b}$$

es la *parte principal* de f en el polo b. Obsérvese que la parte principal está determinada por la sucesión finita $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$.

ii) Hay un número infinito de coeficientes a_k no nulos: se dice entonces que b es una *singularidad esencial* de f. El comportamiento de f cerca a una singularidad esencial b es muy peculiar pues en cada vecindad de b la función f toma *todos* los valores posibles con a lo más una excepción (y lo hace un número infinito de veces), más exactamente:

Teorema "grande" de Picard. *Si b es una singularidad esencial de f entonces existe un $w_0 \in \mathbb{C}$ tal que, para cualquier $w \in \mathbb{C}$ y cualquier disco $D \subset \Omega$ de centro b, si $w \neq w_0$ entonces existe un z en $D' = D - \{b\}$ (y por lo tanto infinitos) tal que $f(z) = w$.* (Fig. 23).

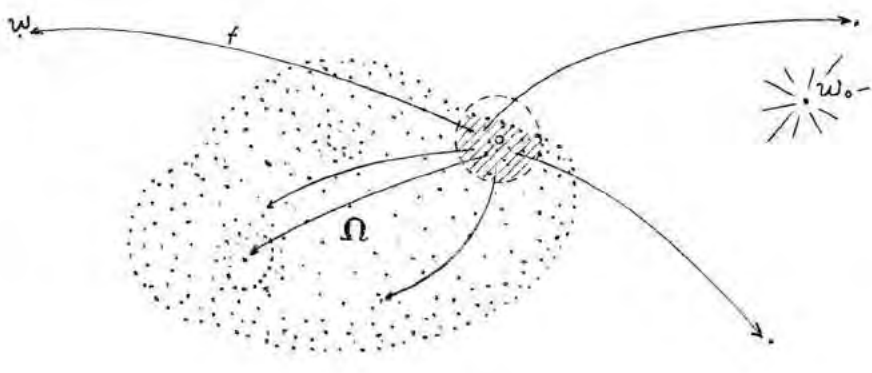


Figura 23

Singularidades en ∞. Debido a que la función $z \mapsto 1/z$ establece una correspondencia biunívoca entre discos alrededor de 0 y discos alrededor de ∞ (y por lo tanto $|z| \to \infty$ si y sólo si $|1/z| \to 0$) puede considerarse que esta función lleva 0 en ∞ y recíprocamente (lo cual pue de visualizarse en la esfera de Riemann). El comportamiento de una función f en ∞ se interpreta entonces a través del comportamiento de la función $g(z) = f(1/z)$ en 0. Por ejemplo, si f es un polinomio de grado n,

$$f(z) = a_o + a_1 z + \ldots + a_n z^n , \quad a_n \neq 0 ,$$

entonces $g(z) = a_o = a_o + \frac{a_1}{z} + \ldots + \frac{a_n}{z^n}$. Luego f tiene un polo de orden n en ∞. Si $f(z) = a_o + a_1 z + \ldots$ es una función entera que no es un polinomio, entonces f tiene una singularidad esencial en ∞. En ambos casos el residuo en ∞ es a_1.

Funciones meromorfas. Una función f es *meromorfa* en un abierto Ω si f es analítica en Ω, excepto por polos. Esto es, existe un conjunto $P_f = \{ b_1, b_2, \ldots \}$ de puntos de Ω tal que $f \in H(\Omega - P_f)$, cada b_i es un polo de f y P_f no tiene puntos de acumulación en Ω, es decir, en cada disco $D \subset \Omega$ hay a lo más un número finito de puntos b_i (intuitivamente, los puntos b_i no se "acumulan" alrededor de ningún punto de Ω. No se excluye el caso $P_f = \phi$, luego, toda función analítica (holomorfa) es meromorfa. En realidad, las funciones meromorfas son aquellas que pueden escribirse en la forma

$$f(z) = g(z) / h(z)$$

con g y h analíticas y h no idénticamente nula.

El siguiente teorema muestra que pueden "construirse" funciones meromorfas con polos prefijados.

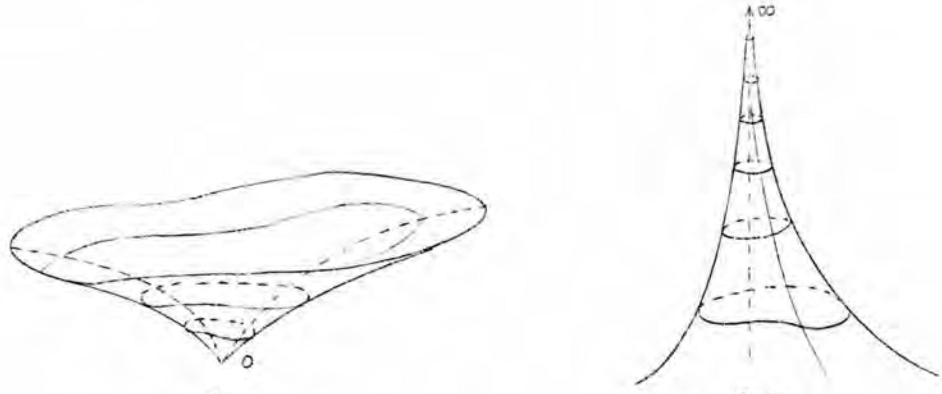
Teorema de Mittag-Leffler. *Sea Ω un subconjunto abierto y $\{b_1, b_2, \ldots\}$ una colección cualquiera de puntos de Ω, sin puntos de acumulación en Ω; Entonces existe una función meromorfa en Ω cuyos polos son precisamente los puntos b_i. Además, la parte principal en cada polo puede también fijarse de antemano.*

Polos y ceros de f y $1/f$. La dualidad entre 0 e ∞ mediante la función $z \mapsto \frac{1}{z}$ puede en general expresarse diciendo que los ceros (resp. polos) de f son los polos (resp. ceros) de $1/f$. Para precisar esta afirmación, consideremos una función f meromorfa en una región Ω y sea $Z_f = \{a_1, a_2, \ldots\}$ (resp. $P_f = \{b_1, b_2, \ldots\}$) el conjunto de los ceros (resp. polos) de f y definamos $\Omega_a = \Omega - Z_f$ y $\Omega_b = \Omega - P_f$. Entonces $f \in H(\Omega_b)$ y si $g: \Omega_a \to \mathbb{C}$ es la función

$$g(z) = \begin{cases} 1/f(z) & \text{si} \quad z \notin P_f \\ 0 & \text{si} \quad z \in P_f \end{cases}$$

entonces $g \in H(\Omega_o)$. Luego g es meromorfa en Ω y sus ceros (resp. polos) son precisamente los b_i (resp. a_i).

Representación gráfica. Una representación gráfica de una función compleja $w=f(z)$ requeriría cuatro ejes coordenados [dos para $z = (x, y)$ y dos para $w = (u, v)$], lo cual no es intuitivamente accesible. Sinembargo una representación de la función real de dos variables reales $z \mapsto |f(z)|$ [$z = (x, y)$] da una idea acerca del comportamiento de f (ver Fig. 24)



Cero *Polo*

Figura 24

11. *Integrales complejas.*

Sea $f: \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ una función compleja y $\gamma : [a, b] \longrightarrow \Omega$ una curva en Ω, entonces $f(z)$ está definida para todo $z \in \gamma^*$, pues $\gamma^* \subset \Omega$. Las consideraciones informales que siguen se basan en la Figura 25. Por analogía con la definición de la integral de una función real sobre un intervalo de $\mathbb{R}$, dividimos a γ^* por medio de puntos.

$\alpha = z_o, z_1, z_2, \ldots, z_n = \beta$ y formamos la suma

$$\sum_{j=1}^{n} f(z_j^*) \Delta_j z$$

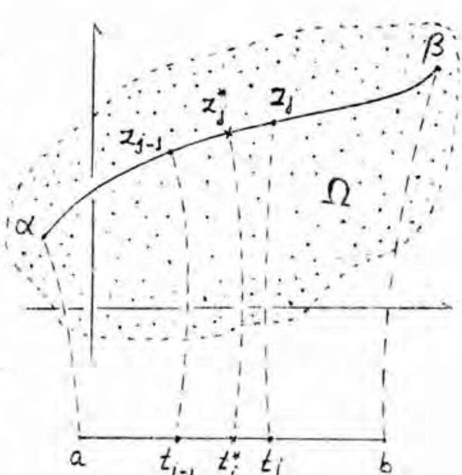


Figura 25

donde z_j^* es un punto de γ^* situado entre z_{j-1} y z_j y $\Delta_j z = z_j - z_{j-1}$. Hay entonces una partición correspondiente a

$$a = t_o < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b$$

de $[a,b]$ tal que $z_j = \gamma(t_j)$ y puntos $t_j^* \in [t_{j-1}, t_j]$ tales que $z_j^* = \gamma(t_j^*)$, $j = 1, \ldots, n$. Si $f = u + iv$ y $\gamma = x + iy$ tenemos :

$$f(z_j^*) = f[\gamma(t_j^*)] = u[\gamma(t_j^*)] + iv[\gamma(t_j^*)]$$

$$\text{y} \quad \Delta_j z = x(t_j) + i\,y(t_j) - [x(t_{j-1}) + iy(t_{j-1})]$$

$$= x'(r_j)\,\Delta_j t + i\,y'(s_j)\,\Delta_j t$$

donde $r_j, s_j \in [t_{j-1}, t_j]$ y $\Delta_j t = t_j - t_{j-1}$ (usando el teorema del valor medio). Reemplazando en la suma anterior se obtiene

$$\sum_{j=1}^{n} \{ u[\gamma(t_j^*)]\, x'(r_j) - v[\gamma(t_j^*)]\, y'(s_j) \}\, \Delta_j t$$
$$+ i \sum_{j=1}^{n} \{ u[\gamma(t_j^*)]\, y'(s_j) + v[\gamma(t_j^*)]\, x'(r_j) \}\, \Delta_j t\,,$$

lo cual tiende hacia el límite

$$\int_a^b \{ u[\gamma(t)]\, x'(t) - v[\gamma(t)]\, y'(t) \}\, dt + i \int_a^b \{ u[\gamma(t)]\, y'(t) + v[\gamma(t)]\, x'(t) \}\, dt$$

Estas observaciones nos conducen a usar esta expresión para *definir* la *integral* $\int_\gamma f(z)\,dz$ (*de* f *a lo largo de la curva* γ) Notemos que para $z \in \gamma^*$ se tiene $z = \gamma(t)$ $a \leq t \leq b$, y entonces procediendo formal mente se tiene $dz = \gamma'(t)\,dt$, luego $f(z)\,dz = f[\gamma(t)]\,\gamma'(t)\,dt$. Pero $\gamma'(t) = x'(t) + i\,y'(t)$, luego :

$$\int_a^b f[\gamma(t)]\,\gamma'(t)\,dt = \int_a^b \{ u[\gamma(t)] + i\,v[\gamma(t)] \} \{ x'(t) + i\,y'(t) \}\,dt$$

$$= \int_a^b \{ u[\gamma(t)]\,x'(t) - v[\gamma(t)]\,y'(t) \}\,dt + i\int_a^b \{ u[\gamma(t)]\,y'(t) + v[\gamma(t)]\,x'(t) \}\,dt .$$

Nuestra definición puede entonces enunciarse así :

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f[\gamma(t)]\,\gamma'(t)\,dt .$$

Para que esta definición tenga sentido basta que, por ejemplo, f sea contínua y γ sea contínuamente diferenciable, es decir, que x' y y' existan y sean contínuas. Si éste no es el caso pero en cambio existen puntos $a = \tau_o < \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_p = b$ tales que la restricción γ_j de γ al subintervalo $[\tau_{j-1}, \tau_j]$ es contínuamente diferenciable, para todo $j = 1, \ldots, p$. (caso en el cual se dice que γ es *contínuamente diferenciable a trozos*), puede definirse

$$\int_\gamma f\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz + \ldots + \int_{\gamma_p} f(z)\,dz .$$

Con base en estas definiciones puede comprobarse que las integrales complejas gozan de propiedades enteramente similares a las integrales reales. En particular se tiene que (ver págs. 13 - 14) :

$$\int_{\gamma_1\gamma_2} f\,dz = \int_{\gamma_1} f\,dz + \int_{\gamma_2} f\,dz \;,\quad \int_{\gamma^{-1}} f\,dz = -\int_\gamma f\,dz \,, \quad \int_\epsilon f\,dz = 0 \,.$$

Estas fórmulas adquieren más naturalidad en notación aditiva (escribiendo $\gamma_1+\gamma_2$, $-\gamma$ y 0 en lugar de $\gamma_1\gamma_2$, γ^{-1} y ι respectivamente).

Primitivas e integrales. Sea Ω una región y f una función compleja definida en Ω; toda función compleja F definida y derivable en una subregión $\Omega_o \subset \Omega$ se llama una *primitiva de* f *en* Ω_o si $F'(z) = f(z)$ para todo punto z de la región Ω. Como en el caso real, las primitivas sirven para calcular integrales; en efecto, si $\gamma : [a, b] \to \Omega_o$ es una curva (en Ω_o) con extremos $\alpha = \gamma(a)$ y $\beta = \gamma(b)$ y si F es una primitiva cualquiera de f en Ω_o entonces

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f[\gamma(t)]\,\gamma'(t)\,dt = \int_a^b F'[\gamma(t)]\,\gamma'(t)\,dt = \int_a^b \frac{d}{dt} F[\gamma(t)]\,dt$$

$$= F[\gamma(b)] - F[\gamma(a)],$$

es decir

$$\int_\gamma f(z)\,dz = F(b) - F(a).$$

Obsérvese que si $\gamma_1 : [a_1, b_1] \to \Omega_o$ es otra curva (en Ω_o) con los mismos extremos $\alpha = \gamma_1(a_1)$, $\beta = \gamma_1(b)$, entonces también $\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = F(b) - F(a)$, es decir:

$$\int_{\gamma_1} f\,dz = \int_\gamma f\,dz.$$

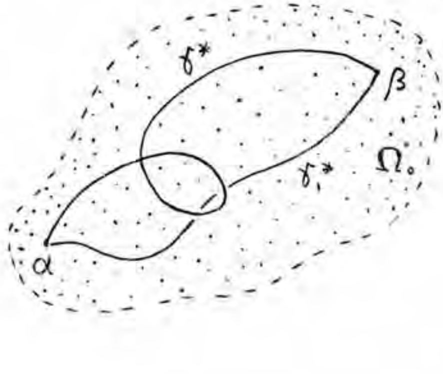


Figura 26

En otros términos, la integral de

pende de los extremos α y β pero no del "camino de integración". Debemos destacar que la recíproca también es cierta : si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es contínua y para cualquier par de puntos $\alpha, \beta \in \Omega_o$ la integral $\int_\gamma f dz$ es independiente del "camino" γ (siempre que los extremos de γ sean α y β) entonces f tiene una primitiva en Ω_o. Anotemos por último que la mencionada independencia del camino es equivalente a la anulación de la integral sobre cualquier curva cerrada y que las consideraciones que hemos llevado a cabo muestran la conveniencia de aislar condiciones bajo las cuales esto tiene lugar.

Aparece así el teorema más célebre del Análisis Complejo el cual, bajo ciertas condiciones referentes a la región Ω_o, afirma que si f es analítica entonces su integral a lo largo de cualquier camino cerrado es cero. Una versión preliminar exige que Ω_o sea *convexo*, es decir, que para cualquier par de puntos $z_o, z_1 \in \Omega_o$ el segmento de recta que une z_o con z_1 esté contenido en Ω_o :

Teorema de Cauchy (para regiones convexas). *Si Ω_o es una región convexa y f es analítica en Ω_o, entonces*

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0$$

para toda curva cerrada γ en Ω_o.

En consecuencia, si f es analítica en una región Ω entonces tiene una primitiva en cada subregión convexa esto es, si $\Omega_o \subset \Omega$ es una subregión convexa entonces existe $F_o : \Omega_o \to \mathbb{C}$ derivable, tal que $F'(z) = f(z)$

para todo $z \in \Omega_o$.

Este teorema fue demostrado por Goursat usando únicamente la *existencia* de f' e, inicialmente, para el caso en que γ es el perímetro de un triángulo o de un rectángulo.

Integración a lo largo de una curva cualquiera. Si f es una función analítica en una región Ω y γ es una curva en Ω con extremos α y β, puede escogerse un número finito de discos $D_o, D_1, \dots, D_p$ y puntos $c_o = \alpha, c_1, c_2, \dots, c_{p+1} = \beta$ tales que, para cada $k = 0, 1, \dots, p$, el subcarco γ_k de extremos c_k y c_{k+1} esté en D_k (ver Fig. 27). Como cada D_k es convexo, existe para cada k, una primitiva F_k de

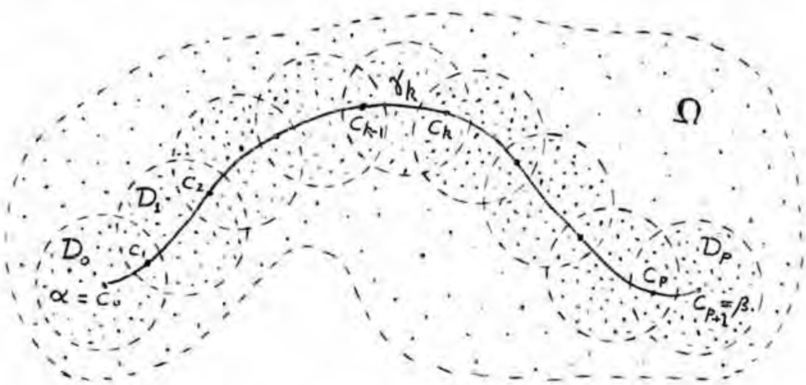


Figura 27

f en D_k y entonces, si suponemos por un momento que γ es diferenciable a trozos, tenemos que

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{k=o}^{p} \int_{\gamma_k} f(z)\,dz = \sum_{k=o}^{p} \{ F_k(c_{k+1}) - F_k(c_k) \} ,$$

Ahora bien, para una curva γ *cualquiera* se comprueba fácilmente que el último miembro de estas igualdades depende *únicamente* de f y de γ, pudiendo entonces *definir*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{k=o}^{p} \{ F_k(c_{k+1}) - F_k(c_k) \} ,$$

verificando sin dificultad que las propiedades básicas de la integral se conservan en la situación así generalizada. Este método para extender la noción de integral a curvas cualesquiera no es el único disponible : el mismo objetivo se logra empleando aproximaciones de γ por medio de curvas contínuamente diferenciables a trozos, por ejemplo, poligonales.

Teorema de Cauchy. (forma homotópica). La versión preliminar del teorema de Cauchy supone la convexidad de la región considerada. Un análisis más detenido revela la verdadera utilidad de esta hipótesis : ella garantiza que en la región "encerrada" por una curva cerrada (en Ω) no haya puntos que *no* pertenezcan a Ω, en otros términos, toda curva cerrada en Ω puede "encogerse" hasta reducirse a un punto, sin salirse en ningún momento de Ω. Es así como se logra una formulación más general del teorema :

Si f es analítica en Ω entonces

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0 \qquad (1)$$

para toda curva cerrada γ homotópica a un punto en Ω.

En particular, si Ω carece de "huecos", esto es, si Ω es simple mente conexa entonces (1) se cumple para *toda* curva cerrada γ (en Ω). La recíproca de esta afirmación es también cierta : si (1) se cumple para toda curva cerrada γ (en Ω) entonces f es analítica en Ω (este es el ***Teorema de Morera***).

Indice de una curva con respecto a un punto. Con el fín de analizar más a fondo la influencia que la presencia de "huecos" en una región tiene sobre el comportamiento de la integral de funciones analíticas sobre caminos cerrados, observamos que los puntos a que están en un "hueco" de una región Ω tienen la particularidad de estar completamente "rodeados" por puntos de Ω siendo posible "dar una vuelta completa alrededor" de a sin abandonar la región Ω. En otros términos : existen curvas en Ω que "dan una (o más) vueltas" alrededor de a. Se observa además que si Ω no tiene "huecos"

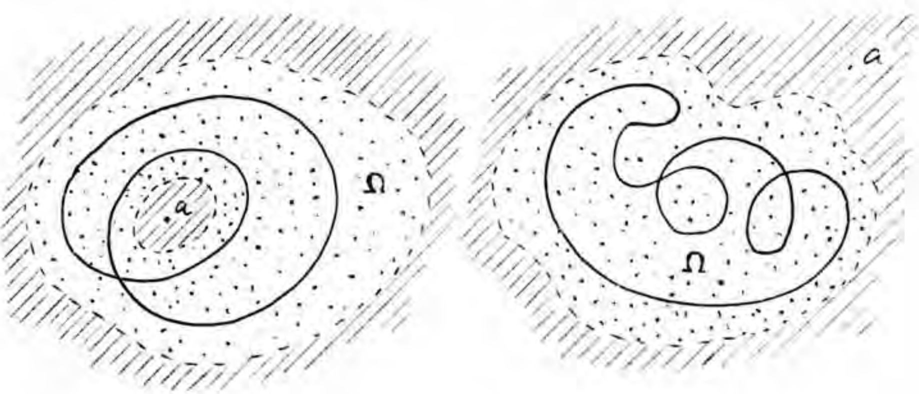


Figura 28

esto es, si Ω es simplemente conexa, no existen curvas cerradas γ en Ω que "dan vueltas" alrededor de puntos que están *fuera* de Ω (ver Fig. 28). Aún más general si γ es homotópica a un punto, entonces el número total de vueltas de γ alrededor de un punto cualquiera, que no esté en Ω, es siempre cero. Se insinúa así la necesidad de precisar el concepto de "número (total) de vueltas" de una curva (cerrada) alrededor de un punto; afortunadamente existe un recurso adecuado al caso. Empecemos observando que si definimos, por ejemplo,

$\gamma(t) = a + e^{2\pi n t i}$, $0 \leq t \leq 1$,

entonces el punto $\gamma(t)$ describe la circunferencia C de centro a y radio unidad , n veces (en sentido positivo ; ver Fig. 29) . Por otra parte , si calculamos la integral

$I = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z-a}$ obtenemos :

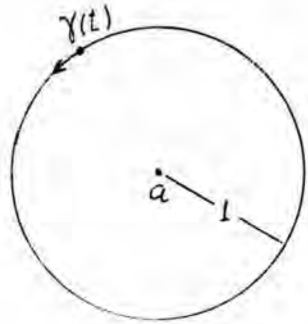


Figura 29

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-a}\, dt = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{2\pi ni\, e^{2\pi n t i}}{e^{2\pi n t i}}\, dt = n$$

Análogamente, si $\gamma(t) = a + e^{-2\pi m t i}$, $0 \leq t \leq 1$, entonces $\gamma(t)$ describe la misma circunferencia m veces (pero esta vez en sentido negativo) mientras que por un cálculo como el anterior obtenemos $\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z-a} = -m$.

Puede comprobarse que, en general, si $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ es una curva *cerrada* que no pasa por a (es decir, $a \notin \gamma^*$) entonces la integral $\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z-a}$ es un número entero que coincide en magnitud y en signo con lo que es, intuitivamente, el *número total de vueltas* alrededor de a dadas por el punto $\gamma(t)$ (cuando t varía de 0 a 1). A éste número lo llama mos el *índice de* γ *con respecto al punto* a y lo denotamos $Ind_\gamma(a)$

$$Ind_\gamma(a) = \int_\gamma \frac{dz}{z-a}, \qquad a \notin \gamma^* .$$

Esta noción permite formular una versión más sustancial del Teorema de Cauchy. En efecto, en la versión homotópica la anulación de la integral de f a lo largo de γ se deduce de la hipótesis de ser γ homotópica a un punto (en Ω); según hemos indicado esta hipótesis implica también que $Ind_\gamma(a) = 0$ para todo $a \notin \Omega$. Pero, y este es el punto crucial, puede probarse que éste último hecho basta por sí solo para forzar la anulación de la integral de f a lo largo de γ, lo cual adquiere mayor significación si observamos que existen curvas γ tales que $Ind_\gamma(a) = 0$ para todo $a \notin \Omega$ pero que no son homotópicos a un punto, en Ω (ver Fig. 30).

Antes de enunciar el Teorema de Cauchy en su forma más general es necesario elaborar algunas nociones nuya motivación es ahora evidente.

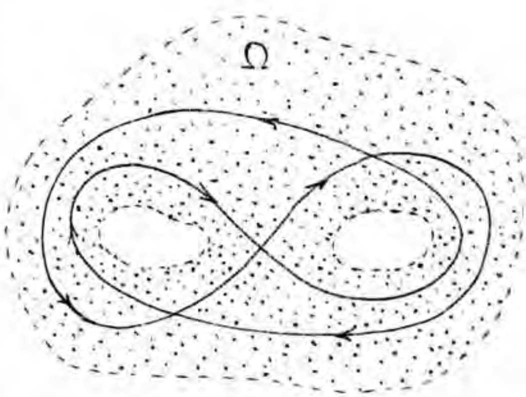


Figura 30

Homología. Empecemos observando que cada curva γ en Ω define una función (o "funcional")

$$\hat{\gamma} : H(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$$

donde $\hat{\gamma}(f) = \int_\gamma f\, dz$ para toda $f \in H(\Omega)$. Aún más general, si para ca da "combinación lineal"

$$\gamma = n_1\gamma_1 + n_2\gamma_2 + \dots + n_r\gamma_r = \sum_{i=1}^{r} n_i\gamma_i$$

donde las γ_i son curvas en Ω y los n_i son enteros, *definimos*

$$\int_\gamma f dz = n_1 \int_{\gamma_1} f dz + n_2 \int_{\gamma_2} f dz + \dots + n_r \int_{\gamma_r} f dz$$

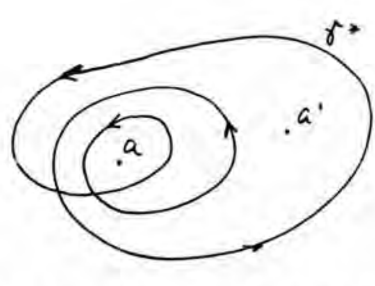
[para toda $f \in H(\Omega)$] entonces cada γ determina, como antes, una funcional $\hat{\gamma}$. Es claro que $\hat{\gamma} = \sum_{i=1}^{r} n_i \hat{\gamma}_i$, es decir, $\hat{\gamma}(f) = \sum_{i=1}^{r} n_i \hat{\gamma}_i(f)$ para toda $f \in H(\Omega)$.

Sólo consideraremos combinaciones lineales $\gamma = \Sigma\, n_i\gamma_i$ donde todas las γ_i son curvas cerradas en una región Ω y a éstas las llamaremos *ciclos* (en Ω); obsérvese que si todas las γ_i tienen por origen (y extremo) un mismo punto z_o entonces γ puede identificarse con la curva $\sigma = \gamma_1^{n_1}\gamma_2^{n_2} \dots \gamma_r^{n_r}$ pues $\int_\sigma f dz = \sum_{i=1}^{r} n_i \int_{\gamma_i} f dz$ para toda $f \in H(\Omega)$.

Si $\gamma = \Sigma\, n_i\gamma_i$ es un ciclo y $a \notin \gamma^*$ (donde $\gamma^* = \gamma_1^* \cup \dots \cup \gamma_r^*$), es decir, si γ no "pasa" por a, definimos

$$Ind_\gamma(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-a}$$

Este es el "número (total) de vueltas" del ciclo γ alrededor del punto a (Fig. 31). Si



$Ind_\gamma(a) = 3$ $\qquad$ $Ind_\gamma(d) = 1$

Figura 31

γ no da vueltas alrededor de puntos situados fuera de Ω, esto es, si $Ind_{\gamma}(a) = 0$ para todo $a \notin \Omega$, decimos que γ es *homólogo a cero* (con respecto a Ω) y escribimos $\gamma \sim 0\ (\Omega)$. Puede ahora enunciarse el

Teorema de Cauchy. (versión homológica). *Si f es analítica en una región Ω entonces*

$$\int_{\gamma} f(z)\ dz = 0 \qquad (*)$$

para todo ciclo γ homólogo a cero (con respecto a Ω).

En particular, si Ω es simplemente conexa entonces se tiene (*) para todo ciclo γ en Ω.

El Teorema de Cauchy muestra que dos ciclos γ_1 y γ_2 (en Ω) definen la misma funcional sobre $H(\Omega)$ (es decir, $\hat{\gamma}_1 = \hat{\gamma}_2$) si y sólo si $(\gamma_1 - \gamma_2) \sim 0\ (\Omega)$. Diremos en este caso que γ_1 y γ_2 son *homólogos* (con respecto a Ω) y escribiremos $\gamma_1 \sim \gamma_2\ (\Omega)$. Como $Ind_{\gamma_1 - \gamma_2}(a) = Ind_{\gamma_1}(a) - Ind_{\gamma_2}(a)$, los ciclos γ_1 y γ_2 son homólogos (con resp. a Ω) si y sólo si "dan el mismo número de vueltas" alrededor de cada punto $a \notin \Omega$. La relación de homología $\sim$ es una equivalencia y si identificamos ciclos homólogos (más técnicamente, si pasamos al conjunto cociente), se obtiene un grupo abeliano $\mathcal{H}(\Omega)$ llamado el *primer grupo de homología* de Ω. Si este grupo tiene una base finita con s elementos entonces el número de conexidad de Ω es $s+1$. es interesante observar que este número de conexidad coincide con el número de componentes (subconjuntos conexos maximales) del complemento de Ω en $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, en particular Ω es simplemente conexa si y sólo si

$\overline{\mathbb{C}} - \Omega$ es conexo. Volviendo al caso general, sea H_∞ la componente de $\overline{\mathbb{C}} - \Omega$ que contiene el punto del infinito y sean $H_1, \ldots, H_s$ las componentes restantes. Estas son precisamente los "huecos" de la región Ω. Si se toman curvas simples cerradas σ_j que "rodean" estos huecos, es decir, σ_j es tal que $Ind_{\sigma_j}(a)$ vale 1 si $a \in H_j$ y vale 0 si $a \in H_k$ para $k \neq j$ (ver Fig. 32), entonces $\sigma_1, \ldots, \sigma_s$ es una *base* de $\mathcal{H}(\Omega)$, es decir, todo ciclo γ

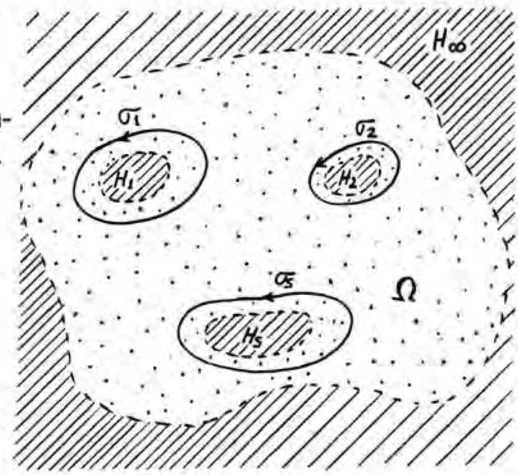


Figura 32

en Ω puede "expresarse" de manera única en la forma

$$\gamma \sim n_1\sigma_1 + n_2\sigma_2 + \cdots + n_s\sigma_s \qquad (\Omega)$$

Luego, si f es analítica en Ω

$$\int_\gamma f\,dz = \sum_{j=1}^{s} n_j P_j$$

donde $P_j = \int_{\sigma_j} f\,dz$, $j = 1, \ldots, s$. Estos números sólo dependen de f y son sus *períodos* (o *módulos de periodicidad*). En particular, si γ_o es una curva de extremos z_1 y z_2 entonces, para cualquier otra curva γ con los mismos extremos, la curva $\gamma_o - \gamma_1$ es un ciclo y entonces

$$\int_\gamma f\,dz = I_o + \sum n_i P_i$$

donde $I_o = \int_{\gamma_o} f\,dz$.

12. Fórmula de Cauchy. Teorema del residuo.

Una consecuencia notable del Teorema de Cauchy es la representación integral de $f(z)$ por medio de la cual se muestra que los valores de una función analítica en una región Ω están completamente determinados pos sus valores en la frontera de Ω revelándose así el alto grado de "organización" que la analiticidad impone a una función f.

En primer lugar debemos precisar la noción de "región limitada por una curva": diremos que un ciclo γ *limita* una región Ω si $Ind_\gamma(z)$ vale 1 para todo $z \in \Omega$ y vale cero para todo $z \notin \Omega \cup \gamma^*$. Si f es analítica en una región Ω' que contiene a $\Omega \cup \gamma^*$ entonces $\int_\gamma f\,dz = 0$ (forma clásica del Teorema de Cauchy) y además, para todo $z \in \Omega$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} \qquad (\textit{Fórmula de Cauchy}) \quad ,$$

y en general

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z)^{k+1}} \quad , \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Si la función f es analítica en Ω', excepto por singularidades aisladas, ninguna de las cuales está en γ^*, entonces

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_j Res\,(f, a_j)$$

donde $a_1, a_2, \ldots$ son las singularidades de f en Ω y $Res(f, a_j)$ es el resíduo de f en a_j. Este es el famoso ***Teorema del Residuo.***

Principio del argumento. Sea f una función meromorfa en Ω y sea $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}$ una curva simple cerrada que encierra los ceros $a_1, \ldots, a_m$

y los polos $b_1, \dots, b_n$ de f (ver Fig. 33). La "imagen" de γ por f

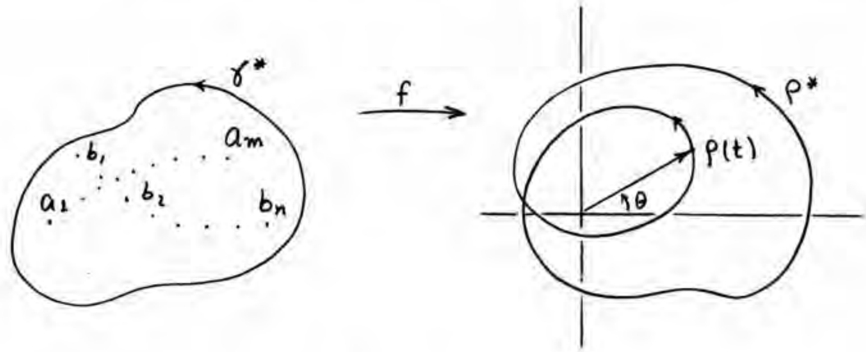


Figura 33

es la curva $\rho = f \circ \gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$, $\rho(t) = f[\gamma(t)]$, $0 \leq t \leq 1$ y el incremento en el argumento de $\rho(t)$ (ver Fig. 33), cuando t recorre el intervalo $[0,1]$ es $2\pi \, Ind_{\rho}(0)$. Ahora bien,

$$Ind_{\rho}(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\rho} \frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{1}{2\pi i}\int_{0}^{1} \frac{\rho'(t)}{\rho(t)}\, dt = \frac{1}{2\pi i}\int_{0}^{1} \frac{f'[\gamma(t)]\,\gamma'(t)}{f[\gamma(t)]}\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz$$

y el teorema del residuo muestra que esta última integral vale $m-n$. Aún más general, si γ es un ciclo homólogo a cero con respecto a Ω y que no pasa por ningún cero o polo de f, entonces

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = c - p$$

donde $c = \sum_j Ind_{\gamma}(a_j)$ y $p = \sum_k Ind_{\gamma}(b_k)$. En particular, si f es analítica y γ es una curva simple cerrada entonces $\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)}$ es igual al número de ceros de f encerrados por γ^* .

13. *Prolongación analítica*.

Sea f_o una función analítica en Ω_o y sea Ω_1 otra región tal que $\Omega_o \cap \Omega_1$ es conexa y no vacía. Una *prolongación* (o, más precisamente, una *prolongación analítica directa*) de f_o a Ω_1 es una función f_1 analítica en Ω_1 y tal que $f_1(z) = f_o(z)$ para todo $z \in \Omega_o \cap \Omega_1$; de acuerdo con el principio de coincidencia, si una tal prolongación existe es única. Se dice entonces que f_o *puede prolongarse analíticamente* a la región Ω_1.

La terminología que acabamos de introducir nos permite formular un concepto más general de "singularidad": sea f analítica en un disco D de circunferencia C y sea $\overline{D}$ el disco cerrado $D \cup C$. Un punto $b \in \overline{D}$ se dice *regular* si f puede prolongarse analíticamente a un disco de centro b. Como esto es siempre así para puntos $b \in D$ nos limitaremos al caso en el cual $b \in C$ (ver Fig. 34). Si un punto $b \in C$ no es regular se dice que es *singular* o que es una *singularidad* de f.

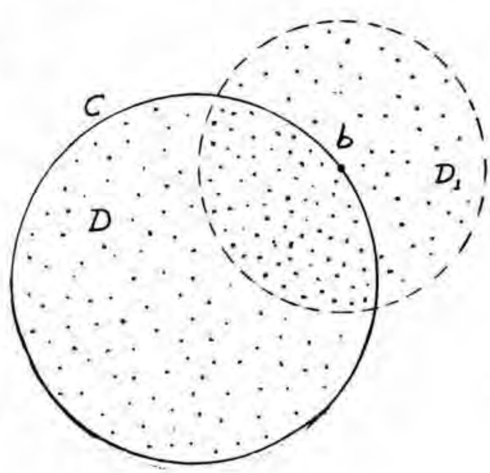


Figura 34

Una función f definida por una serie de potencias con radio de convergencia R *finito* tiene, por lo menos, una singularidad en la circunferencia de su disco de convergencia, de tal manera que R es precisamente la dis tancia entre el origen y la singularidad o singularidades de f más próximas a él. En realidad, dada una región Ω existen funciones f analíticas en Ω pero que no pueden prolongarse fuera de Ω pues todos los puntos de la frontera Γ de Ω son singulares ; se dice entonces que Γ es la *frontera natural* de f. Por ejemplo, la circunferencia unidad $\{ z : |z| = 1 \}$ es la frontera natural de la función

$$f(z) = z + z^2 + z^4 + \ldots = \sum_{k=o}^{\infty} z^{2^k} , \quad |z| < 1 .$$

Prolongación analítica a lo largo de una curva. Diremos que una pareja (f, D) es un *elemento de función (analítica)* si D es un disco y $f \in H(D)$. Esta terminología insinúa la eventual consideración de "funciones (analíticas) globales o completas" constituídas por elementos de función relacionados en alguna forma bien determinada. Empezaremos describiendo esta relación : sean (g, A) y (h, B) dos elementos de función y γ una curva que va del centro de A al centro de B ; se dice que (h, B) se obtiene a partir de (g, A) por *prolongación analítica a lo largo de* γ si existen elementos de función (f_i, D_i), $i = 0, 1, \ldots, n$, tales que $(f_o, D_o) = (g, A)$, $(f_n, D_n) = (h, B)$, los discos $D_o, D_1, \ldots, D_n$ "cubren" la curva γ en la forma sugerida por la Figura 35 (a) y ,

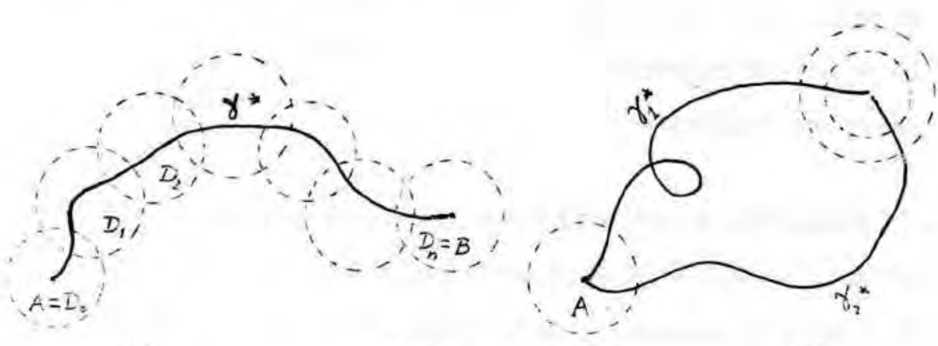
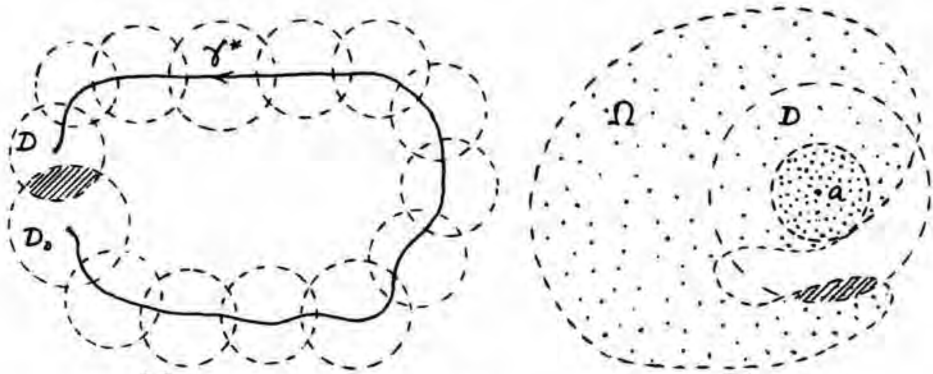


Figura 35

por último, $f_i(z) = f_{i-1}(z)$ para todo $z \in D_i \cap D_{i-1}$ $(i = 1, \ldots, n)$, es decir, f_i es prolongación analítica directa de f_{i-1} $(i = 1, \ldots, n)$. El elemento (h, B) así obtenido es único en el siguiente sentido : si (h_1, B_1) es otro elemento obtenido a partir de (g, A) por prolongación analítica a lo largo de γ entonces $h_1(z) = h(z)$ para todo z en el menor de los discos concéntricos B y B_1. La relación entre prolongaciones obtenidas a lo largo de curvas diferentes (pero con los mismos extremos) exige consideraciones homotópicas :

Teorema de monodromía. *Supongamos que* (g, A) *es un elemento que puede prolongarse a lo largo de cualquier curva con origen en el centro de* A *y supongamos* γ_1 y γ_2 *son dos de tales curvas las cuales tienen además el mismo extremo y son homotópicas, entonces las prolongaciónes de,* (g, A) *a lo largo de* λ_1 y λ_2 *coinciden*. (Ver Fig. 35 b).

"Funciones" multiformes. Si un elemento de función (f_o, D_o) es prolongado en diversas formas se obtiene una colección F de elementos de función tales que, dados dos de ellos, uno es siempre prolongación del otro (a lo largo de alguna curva). Si (f, D) es un elemento de F y z está en D entonces *un* valor de F en z es $f(z)$; decimos *un valor* pues es posible que exista otro elemento (f_1, D_1) de F tal que $z \in D_1$ pero que $f_1(z) \neq f(z)$, de tal manera que $f_1(z)$ sería *otro* valor de F en z. En realidad es posible que al prolongar un elemento (f_o, D_o) a lo largo de una curva γ se llegue a un elemento (f, D) tal que $D \cap D_o \neq \phi$ pero que $f_o(z) \neq f(z)$ para algunos $z \in D \cap D_o$. Algo similar ocurre cuando una función f, analítica en una cierta región Ω, es desarrollada en serie (de Taylor) alrededor de un punto $a \in \Omega$ la serie representa a f en el mayor disco de centro a contenido en Ω pero su



(a) (b)

Figura 36

disco de convergencia D puede ser mayor y en este caso puede haber puntos $z \in D \cap \Omega$ en los cuales la serie no representa a f (Fig. 36, b).

En general se dice que una colección F como la arriba considerada es una *función analítica global* y si F contiene *todas* las prolongaciones posibles se dice que es *completa*. Por medio de F queda determinada una *correspondencia* que a cada punto z de una cierta región Ω le asigna uno o varios números complejos por lo cual se dice que F es una "función" *multiforme* (o *multívoca*). Estos objetos no son realmente funciones pero usando un artificio ideado por Riemann y que consiste en "desdoblar" la región Ω en varias "hojas" (*Superficies de Riemann*) pueden reducirse a funciones en el sentido ordinario.

El espacio funcional . $H(\Omega)$. La noción de convergencia más adecuada al espacio $H(\Omega)$ es la convergencia uniforme sobre compactos : una sucesión de funciones $f_k : \Omega \to \mathbf{C}$ *converge uniformemente sobre compactos* hacia una función $f : \Omega \to \mathbf{C}$ si para cada $\varepsilon > 0$ y para cada subconjunto compacto (cerrado y acotado) $K \subset \Omega$ existe un $n = n(\varepsilon, K)$ tal que si

$k \geq n$ entonces $|f_k(z) - f(z)| < \varepsilon$ para *todo* $z \in K$. En este caso escribiremos $f_k \underset{c}{\rightarrow} f$ y puede probarse que si cada f_k es analítica, entonces f también lo es y $f_k^{(n)} \underset{c}{\rightarrow} f^{(n)}$ para todo $n = 1, 2, \ldots$

Con esta noción de convergencia puede introducirse una topología en $H(\Omega)$ en la cual los compactos se caracterizan como en $\mathbb{R}^n$: son los subconjuntos cerrados y acotados.

14. *Representación conforme.*

Las funciones analíticas $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ cuya derivada f' carece de ceros en Ω se caracterizan por la propiedad de "preservar los ángulos" : si γ_1 y γ_2 se cortan en un punto z_o con un ángulo α entonces sus "imágenes" $\Gamma_1 = f \circ \gamma_1$ y $\Gamma_2 = f \circ \gamma_2$ se cortan en el punto $\omega_o = f(z_o)$ con el mismo ángulo (ver Fig. 37). Se dice entonces que f

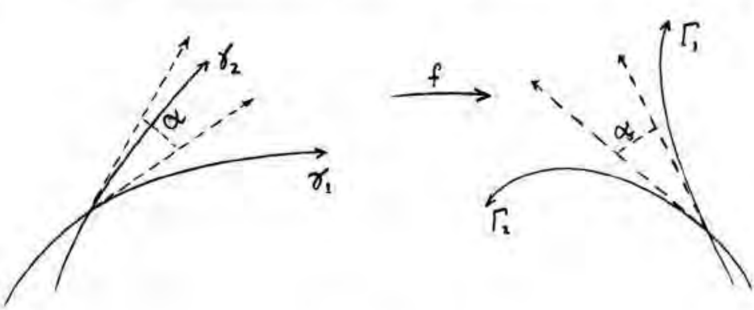


Figura 37

define una *representación conforme* de Ω en $\mathbb{C}$. Dos regiones Ω_1 y Ω_2 se dicen *conformemente equivalentes* si existe una función analítica y biunívoca de Ω_1 en Ω_2 tal que $f'(z) \neq 0$ para todo $z \in \Omega_1$. El resultado fundamental a este respecto es el siguiente :

Teorema de Riemann. *Toda región simplemente conexa* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *, diferente de* $\mathbb{C}$ *, es conformemente equivalente al disco unidad* D_o, *donde* $D_o = \{ z : |z| < 1 \}$.

Bibliografía

[1] Ahlfors, L.V. *Complex Analysis*, Mc Graw-Hill, segunda edición (1966).

[2] Cartan, H. *Elementary theory of analytic functions of one or several complex variables* Addison-Wesley (1963).

[3] Churchill, R. V. *Complex Variables and Applications*, Mc Graw-Hill (1960).

[4] Nehari, Z. *Introduction to Complex Analysis*, Allyn and Bacon (1961)

[5] Nevanlinna, R. y Paatero, V. *Introduction to Complex Analysis*, Addison-Wesley (1966).

[6] Redheffer, R. "The Homotopy Theorems of Funcion Theory", The Am. Math. Monthly, vol. 76, Nº 7 (1969).

[7] Rudin, W. "*Real and Complex Analysis*" Mc Graw-Hill (1966).

[8] Seebach, J.A. y otros. "What is a Sheaf?" The Am. Math. Monthly, vol.77, Nº 7 (1970)

[9] Springer, G. *Introduction to Riemann Surfaces* Addison-Wesley (1957).

[10] Titchmarsh, E. C. *The Theory of Functions*, Oxford University Press (1939).

[11] Wallace, A. H. *An Introduction to Algebraic Topology*, Pergamon Press (1957).

[12] Whyburn, G. T. *Topological Analysis*, segunda edición, Princeton University Press (1964).

Bibliografía adicional.

[1] Ahlfors, L.V. y Sario, L. *Riemann Surfaces*, Princeton Univ. press, (1960)

[2] Bochner, S. y Martin, W. T. *Several complex Variables*, Princeton Univ. Press (1948).

[3] Cunningham, J. *Complex Variable Methods in Science and Technology*, D. van Nostrand (1965).

[4] Hayman, W. K. *Meromorphic Functions*, Oxford Univ. Press (1964).

[5] Nehari, Z. *Conformal Mapping*, Mc Graw-Hill (1952).

Morse, M. *Topological Methods in the Theory of Functions of a Complex Variable*, Princeton Univ. Press (1947).

* * *

Saludos

Prácticamente toda persona ha saludado a otras estrechando la mano y parece que a este respecto no pueda hacerse afirmación especial alguna. Sin embargo, es fácil probar que el número de personas que ha estrechado la mano a un número impar de personas es siempre par.