Boletín de Matemáticas
Vol. VI No. 2, pp. 31 - 51

HACIA UNA DEFINICION DE LA MEDIDA

JEAN JACQUES PAROT

A. *Primera situación.*

Un granjero va al mercado para vender :

a) Una gallina (20 pesos)

b) Un bulto de naranjas (45 pesos)

c) Un pato (38 pesos)

d) Una docena de huevos (12 pesos)

Caminando se pregunta cuáles son las posibilidades de venta, cuánta plata va a sacar de su mercado.

Hagamos un estudio matemático de esa situación.

El granjero lleva un conjunto E de objetos que podemos representar por a, b, c, d.

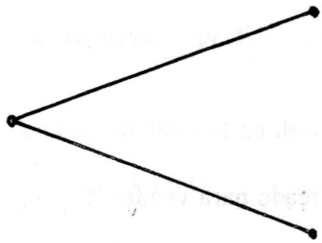
$$E = \{ a, b, c, d \}$$

(Podemos notar que ciertos elementos de E son también conjuntos : b es un conjunto de naranjas).

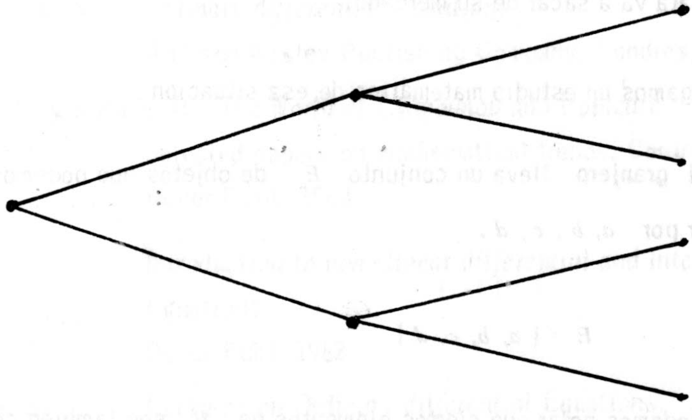
Una venta posible es un subconjunto de E ; para hallar todas las posibilidades de ventas debemos buscar todos los subconjuntos posibles.

(Ese conjunto de subconjuntos lo notaremos $P(E)$).

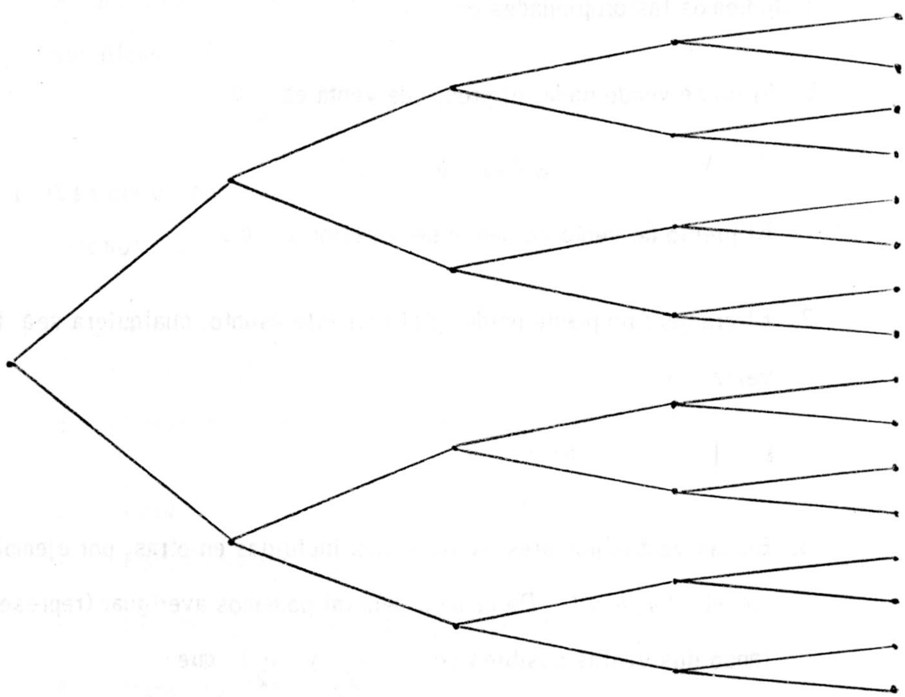
Para eso podemos proceder de la siguiente forma : o se vende la gallina o no se vende, lo que representaremos así :



En cada uno de estos casos, o se vende el bulto de naranjas o no se vende.



De la misma manera con c y d , de tal manera que se obtiene el árbol siguiente :



Encontramos 16 subconjuntos posibles. (De una manera general se puede demostrar que si un conjunto E tiene n elementos, el número de elementos de $P(E)$ es 2^n). A cada subconjunto, o sea a cada venta posible podemos hacer corresponder un número : el precio de venta, por ejemplo :

$$\{ a, b, d \} \mapsto 77$$

Esa correspondencia es una *aplicación de* $P(E)$ en R (conjunto de los reales) ; la notaremos m.

$$m \{ a, b, d \} = 77$$

Estudiemos las propiedades de m :

1. Si no se vende nada, el precio de venta es 0

$$m(\phi) = 0$$

El precio de venta no puede ser inferior a 0 .

2. El granjero no puede perder plata en este asunto, cualquiera sea la venta v :

$$m(v) \geq 0$$

3. En las ventas posibles existen unas incluídas en otras, por ejemplo $\{a, b\} \subset \{a, b, c\}$. De manera general podemos averiguar (representando dos ventas posibles con v_1 y v_2) que

$$(v_1 \subset v_2) \Rightarrow (m(v_1) \leq m(v_2))$$

4. También se puede averiguar que en todos los casos posibles

$$m(v_1 \cup v_2) = m(v_1) + m(v_2) - m(v_1 \cap v_2)$$

B. *Segunda situación* .

Sea un conjunto E cuyo número de elementos sea por ejemplo 5 .

$$E = \{a, e, i, o, u\}$$

Podríamos de la misma manera establecer la lista de los elementos de $P(E)$.

A cada subconjunto A de E le hacemos corresponder el número de sus elementos .

$$\{ a, i, o \} \mapsto 3$$

Esa correspondencia es una aplicación de $P(E)$ hacia R y la notaremos $Card$.

$$Card (\{ a, i, o \}) = 3$$

Estudiemos las propiedades de dicha aplicación .

1. $Card\ \phi = 0$
2. Para cualquier elemento A de $P(E)$, $Card(A) \geq 0$
3. $(A \subset B) \Rightarrow (Card(A) \leq Card(B))$
4. Para una pareja cualquiera A, B de elementos de $P(E)$ tenemos

$$Card\ (A \cup B) = Card(A) + Card(B) - Card(A \cap B)$$

C. *Definición .*

Dado un conjunto E y una aplicación m de $P(E)$ en R .

Se dice que esa aplicación m es una *medida* si cumple con las siguientes condiciones :

1. $m(\phi) = 0$
2. Para todo elemento A de $P(E)$, $m(A) \geq 0$
3. $A \subset B \Rightarrow m(A) \leq m(B)$ si $B \subset E$
4. $m(A \cup B) = m(A) + M(B) - m(A \cap B)$

* * *