Boletín de Matemáticas
Vol. VI Nº 2 pp. 11 - 30

LOS METODOS CLASICOS DE LA MECANICA NO LINEAL

LUCIANO MORA

Consideremos una ecuación diferencial (E. D.) ordinaria en la forma

$$\dot{x} = f(x, t)$$

donde $\dot{x} = dx/dt$ y $f(x, t)$ es una función definida en cierto dominio D del plano $x-t$, contínua y además $\partial f / \partial x$ es contínua sobre D (E. D. normal).

x es una función desconocida de la variable t (tiempo).

La ecuación diferencial expresa pues la variación de una función desconocida en función de ella misma y del tiempo.

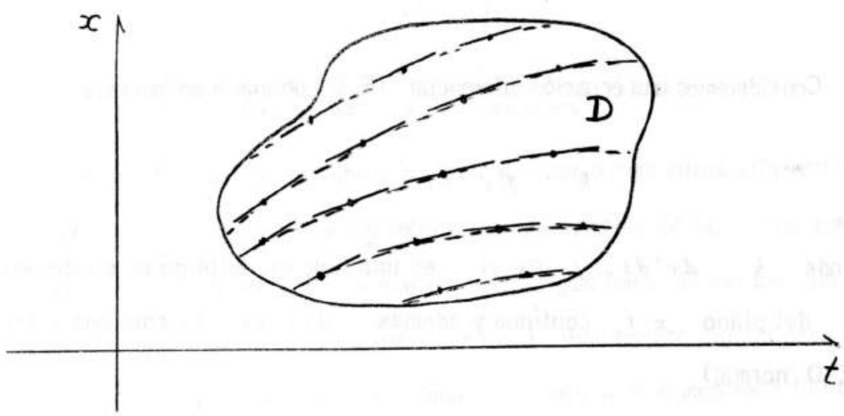
Una función $x = \varphi(t)$ definida en cierto intervalo $Id = \{ t \in \mathbb{R} , m_1 < t < m_2 \}$ (no se excluye el caso $m_1 = -\infty$, $m_2 = +\infty$) es una solución de la E.D. si se obtiene idénticamente.

$$\dot{\varphi}(t) = f(\varphi(t), t)$$

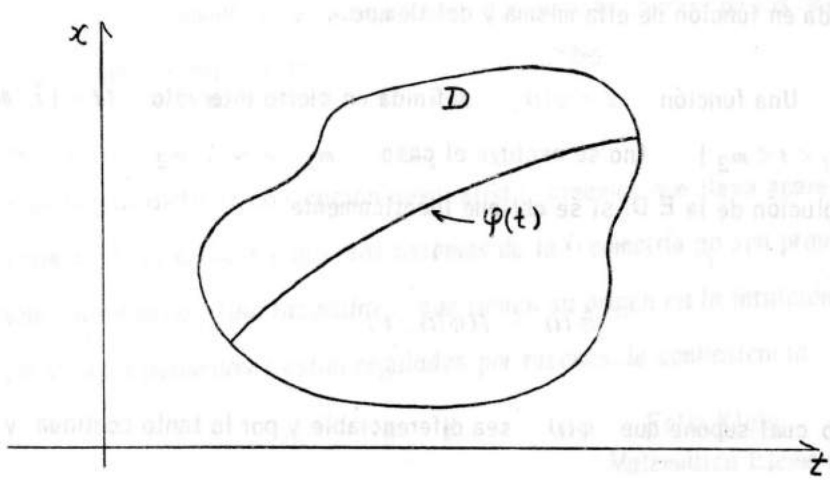
lo cual supone que $\varphi(t)$ sea diferenciable y por lo tanto contínua y que

$(t\,,\,\varphi(t)\,)\in D$.

Si interpretamos a $(x\,,t)$ como coordenadas cartesianas en un plano, podemos construir el dominio D y en cada uno de sus puntos dibujar la recta $l_{x,t}$ de pendiente $m = f(x\,,t)$ y obtener el "campo de direcciones" definido por la ecuación diferencial.



Allí mismo podemos considerar la solución $x = \varphi\,(t)$ como una curva contínua con tangente contínua o como se dice una curva integral.



La ecuación diferencial conecta las dos representaciones puesto que $\varphi(t)$ debe ser tangente a la recta $l_{\varphi(t),t}$ en cada uno de sus puntos en el intervalo I .

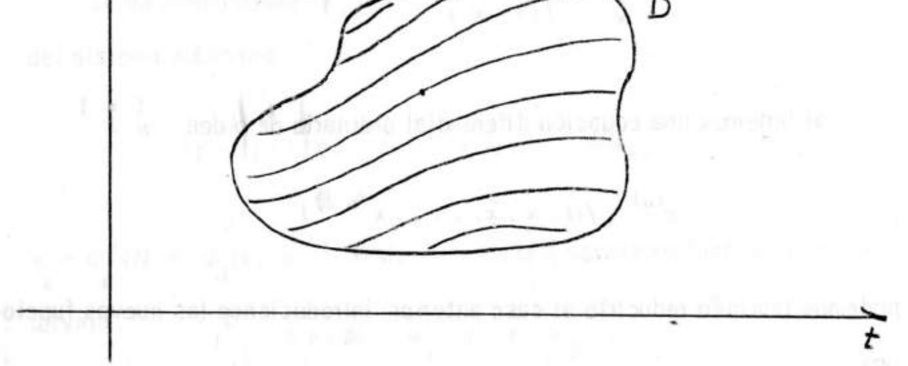
La cuestión principal es saber cuántas soluciones admite una ecuación diferencial ; pero como esta admite todo un contínuo de soluciones, la cuestión se transforma en saber cómo pueden describirse esas soluciones. La respuesta es el siguiente teorema .

Teorema de existencia y unicidad . Por cada punto $(t_o , x_o) \varepsilon D$ pasa una solución φ tal que $x_o = \varphi(t_o)$. *(i)*

Si existe otra solución $\psi(t)$, tal que $x_o = \psi(t_o)$ entonces $\varphi(t) = \psi(t)$ en todo el intervalo .

Se dice que la ecuación *(i)* es la condición inicial (C.I.) y que la E. D. satisface la C. I. (i). Por tanto cada punto de D es C. I. para una solución y dos soluciones con C.I. comunes coinciden.

Gráficamente :



Sistemas de ecuaciones diferenciales, ecuación diferencial de orden.

Fácilmente podemos extender estas ideas fundamentales a un sistema de ecuaciones diferenciales : para simplificar, consideremos un sistema de 2 ecuaciones de primer orden :

$$\dot{x}_1 = f_1(t, x_1, x_2)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(t, x_1, x_2)$$

donde x_1, x_2 es la pareja de funciones desconocidas. Una solución sería una pareja de funciones $x_1 = \varphi_1(t)$, $x_2 = \varphi_2(t)$ definidas en un intervalo $I = \{ t \in \mathbb{R} \ ; \ m_1 < t < m_2 \}$ que satisfacen simultáneamente cada una de las ecuaciones diferenciales. Sin continuar la repetición en los argumentos anteriores, basta considerar el vector $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ y definir $\dot{\mathbf{x}} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2)$, $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$ y es claro entonces que el sistema es equivalente a

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$$

Si tenemos una ecuación diferencial ordinaria de orden n :

$$x^{(n)} = f(t, x, \dot{x}, \ldots, x^{(n-1)})$$

podemos también reducirlo al caso anterior, introduciendo las nuevas funciones

$x_1 = x\,,\ x_2 = \dot{x}\,,\ \ldots,\ x_n = x^{(n-1)}$ de modo que, obtenemos el sistema de primer orden

$$\dot{x}_1 = x_2\,,\ \dot{x}_2 = x_3\,,\ \ldots,\ \dot{x}_n = f(t\,,\ x_1\,,\ x_2\,,\ \ldots,\ x_n)$$

Sistema autónomo de primer orden en $\mathbb{R}^2$.

Si el tiempo no figura explícitamente en las funciones f_1, f_2 de un sistema de ecuaciones de primer orden

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1\,,\ x_2)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1\,,\ x_2)\ .$$

Vectorialmente $\dot{x} = f(x)$ está definida en un dominio D, tenemos un sistema autónomo, caracterizado por el hecho de que la variación del vector x depende solamente de él y no del tiempo, lo cual ocurre frecuentemente en física.

Se ve inmediatamente, que si $x_i = \varphi_i(t)\,,\ i = 1, 2$ es una solución del sistema autónomo (S. A.) sobre

$$I = \{\, t \in \mathbb{R}\ ;\ m_1 < t < m_2 \,\}\ ,$$

$x_i = \varphi_i^*(t) = \varphi_1(t + c)$ donde c es una constante, también lo es en el intervalo :

$$I^* = \{\, t \in \mathbb{R}\ ;\ m_1 - c < t < m_2 - c \,\}\ .$$

Interpretación cinemática. El espacio de fase (Poincaré)

A toda solución del sistema autónomo

$$x_i = \varphi_i(t) \ , \ i = 1, 2 \qquad (ii)$$

podemos hacer corresponder el ***movimiento*** de un punto en el plano, movimiento definido por las ecuaciones *(ii)* donde (x_1, x_2) son las coordenadas espaciales y t el tiempo. Al moverse, el punto describe una ***trayectoria***: pero si asociamos la solución *(ii)* con la trayectoria, no veríamos la dirección del movimiento, en otras palabras, no veríamos la marcha del tiempo.

En efecto, si tuviéramos otra solución $x_i = \psi_i(t)$ junto con $x_i = \varphi_i(t)$ sus trayectorias o coinciden en el plano, o no se interceptan. Sinembargo, en el primer caso, si tuvieran un punto común $\varphi_i(t_1) = \psi_i(t_2)$ puesto que $\varphi_i^*(t) = \varphi_i(t + c)$ es también solución, tendríamos

$$\varphi_i^*(t_2) = \varphi_i(t_2 + c) = \varphi_i(t_1) = \psi_i(t_2)$$

donde $c = t_1 - t_2$. Entonces

$$\varphi_i^*(t) = \psi_i(t) = \varphi_i(t + c) \qquad \text{donde} \quad c = t_1 - t_2,$$

por lo tanto, aunque las trayectorias coinciden, la primera es descrita con un retardo de c.

Si el punto representativo de la primera alcanza una cierta posición en el instante $t + c$, entonces, el punto representativo de la segunda ya estuvo allí en el instante t.

O sea, una trayectoria puede representarse paramétricamente por más de una solución, por tanto, trayectoria y solución no son sinónimos.

Interpretación cinemática del S. A.

En la forma vectorial del sistema autónomo

$$\dot{x} = f(x)$$

a cada punto de D cuyo vector de posición es x le corresponde el vector f cuyo punto inicial es ese punto. El espacio vectorial de los f es un espacio vectorial de 2 dimensiones que emana de x. Aparece así, asociado al S. A. un *campo vectorial* definido en D.

La conexión entre la interpretación de la solución y la interpretación del sistema es clara.

Sea P_o un punto de D de vector de posición x_o, de donde emana el vector del campo $f(x_o)$. Si $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) = \varphi(t)$, existe una solución $x = \varphi(t)$ tal que $x_o = \varphi(t_o)$.

Al describir $\varphi(t)$ su trayectoria, el móvil pasa por x_o en el instante t_o, con un vector velocidad $\dot{x}_o = f(x_o)$ o sea, el vector del campo y el vector velocidad coinciden en cada punto de la trayectoria.

El plano en el cual las soluciones del S. A. se interpretan como *trayectorias orientadas* y el S. A. como campo campo vectorial se llama el *plano de fase* del S.A. $(x, \dot{x})$.

Se dice equivalentemente trayectorias orientadas o *trayectorias de fase* y los vectores $f(x)$ se llaman velocidades de fase.

: Se podría decir : la velocidad del movimiento de un punto sobre la trayectoria de fase coincide en cada instante con la velocidad de fase correspondiente a la posición donde el punto se encuentra en ese instante.

Estado de equilibrio. Trayectorias cerradas. Ciclos límite. Estabilidad.

Preguntamos si una trayectoria que representa una solución del S. A. puede interceptarse a sí misma.

Sea $x_i = \varphi_i(t)$, $i = 1, 2$ una solución del S. A. sobre

$$I = \{ t \in \mathbb{R} \; ; \; m_1 < t < m_2 \}$$

Supongamos que $\varphi_i(t_1) = \varphi_i(t_2)$, $i = 1, 2$ $(t_1 \neq t_2)$ $t_1, t_2 \in I$.

Si $c = t_1 - t_2$ entonces $t_1 = t_2 + c$ y $\varphi_i(t_1) = \varphi_i(t_1 + c) = \varphi_i(t_2)$

entonces $\varphi_i(t) = \varphi_i^*(t)$ o sea $\varphi_i(t) = \varphi_i(t + c)$ *(iii)*

De lo anterior se sigue entonces que I^* coincide con I y por lo tanto $m_1 = -\infty$, $m_2 = +\infty$.

1) Puede suceder que $\forall c \in \mathbb{R}$: $\varphi_i(t+c) = \varphi_i(t)$ o sea que $(\varphi_1(t), \varphi_2(t))$ no se mueve al variar t.

En este caso la solución $\varphi_i(t) = a_i$ se llama "un estado de equilibrio" (E. E.) del S. A. Ninguna trayectoria puede pasar por (a_1, a_2) por eso también se llama *singularidad* del S. A.

Desde el punto de vista de las *velocidades de fase* es claro que la condición necesaria y suficiente para que $a = (a_1, a_2)$ sea estado de equilibrio es que $f(a) = 0$.

Si a es E. E. entonces $\dot{x} = \dot{\varphi}(t)$ es solución y así $f(a) = \dot{x} = \dot{a} = 0$.

Si $f(a) = 0$ entonces $\dot{x} = \dot{\varphi}(t) = \dot{a} = f(a) = 0$.

Entonces, para encontrar *todos* los E. E. del S. A. debemos resolver el sistema

$$f_1(a_1, a_2) = 0 \quad , \quad f_2(a_1, a_2) = 0$$

2) La ecuación (iii) $\varphi_i(t+c) = \varphi_i(t)$ no se cumple para todo c real. Se puede demostrar que el conjunto de los c válidos, admite un número positivo mínimo T tal que cualquier otro c válido se escribe como $c = kT$, con $k \in Z$ o sea $\forall t$: $\varphi_i(t+T) = \varphi_i(t)$. Pero para $|\tau_1 - \tau_2| < T$ y para algún $i = 1, 2$ se tiene $\varphi_i(\tau_1) \neq \varphi_i(\tau_2)$.

De manera que la solución $x_i = \varphi_i(t)$ es periódica de período T y su trayectoria es cerrada. Es un *ciclo* .

3) En el otro caso, las soluciones $x_i = \varphi_i(t)$ no se interceptan. Existen entonces tres tipos de trayectorias :

a) Puntos de equilibrio

b) Ciclos

c) Trayectorias *libres*

Por el teorema generalizado de existencia y unicidad, por cada punto de D pasa una trayectoria que representa una solución : D está lleno de trayectorias que no se interceptan entre sí .

La primera pregunta sobre la distribución de los E. E. y los ciclos es: ¿en qué condiciones un E. E. y un ciclo son aislados? Intuitivamente podemos esperar la existencia de los E. E. como puntos aislados. O sea, el E. E. $x = 0$ será aislado si existe $p > 0$ tal que ningún punto del círculo $\{ x ; |x| < p \}$ es un E. E. fuera de $x = 0$.

En cambio la situación con un ciclo es distinta. Dada la naturaleza de f y x podemos preguntar cómo se comportan las trayectorias en la vecindad de un ciclo, donde no existen otros ciclos .

Esta cuestión fue aclarada por Poincaré con la introducción del concepto de *ciclo límite* : es una solución periódica aislada del S. A.; geométricamente: no existen otras trayectorias cerradas en una vecindad de la trayectoria .

La trayectoria K del ciclo límite divide al plano en dos *dominios* (interior y exterior). Tanto las trayectorias internas como las trayectorias externas se acercan a K espiralmente, bien sea cuando $t \to -\infty$, o $+\infty$.

Sobre la existencia de ciclos límites . Sea C, $(\varphi(t))$ una trayectoria definida para $t \geq t_o$ contenida en una región cerrada y acotada de D ; x_o es un punto límite de c si existe una sucesión : $\{t_n\}$ que diverge a $+\infty$ tal que $\{\varphi(t_n)\}$ converge a x_o. El conjunto de los puntos límites es el conjunto límite C'.

Si $\varphi(t) = x_o$ es E.E., $C' = \{x_o\}$

Si $\varphi(t)$ es periódica de trayectoria K, $C' = K$

Teorema de Poincaré - Bendixson : Si C' no contiene ningún E.E., se presentan dos casos :

a) C' $(= C)$ es un ciclo

b) C' es un ciclo límite al cual tiende C' espiralmente desde el interior o el exterior .

Estabilidad de un E. E. de un S. A. Sea $\dot{x} = f(x)$ un sistema autónomo.

Con $\varphi(t, \xi)$ simbolizamos una solución del S. A. con C. I. $t = 0$, $x = \xi$ entonces $\varphi(0, \xi) = \xi$.

Intuitivamente, la idea de estabilidad de un E. E. $a = (a_1, a_2)$ del S.A. es : toda solución del S. A. que comienza en $t = 0$, bastante próxima a a, permanece en una vecindad de a en la marcha futura $(t > 0)$; una vez que una trayectoria se ha acercado a una singularidad, se mantendrá siempre próxima a ella .

Definición de Liapounov. a es *estable* en el sentido de Liapounov si

(1) $\exists_p > 0$ tal que si $|\xi - a| < p$, $\varphi(t, \xi)$ está definida para todo t.

(2) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$: si $|\xi - a| < \delta$ entonces $|\varphi(t, \xi) - a| < \varepsilon$, para todo $t > 0$.

a es además *asintóticamente estable* si

(3) $\exists_{\delta < \rho}$: si $|\xi - a| < \Delta$ entonces

$$\lim_{t \to \infty} |\varphi(t, \xi) - a| = 0$$

Si el S. A. $\dot{x} = f(x)$ posee el E. E. 0, se desea saber en qué condiciones la solución de $\dot{x} = f(x)$ con C. I. $x(0) = c$ se acerca al E. E. $x = 0$ cuando $t \to \infty$.

En términos físicos, esto significa que el sistema descrito por el S.A. vuelve al E. E. después de haber sido perturbado inicialmente por una fuerza.

El S. A. Lineal - Homogeneo con coeficientes constantes.

Como punto de partida y de referencia, consideremos el sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \\ \dot{x}_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \end{cases}$$

ó $$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\,\mathbf{x}$$

El E.E. $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es único si y solamente si

$$det\,(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

O, también, si los dos autovalores de A, λ_1 y λ_2 son diferentes de 0.

Supongamos, además, que sean reales y diferentes : entonces toda solución real del S. A. puede escribirse

$$\mathbf{x} = c_1 \mathbf{h}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \mathbf{h}_2 e^{\lambda_2 t}$$

donde $\mathbf{h}_1$ y $\mathbf{h}_2$ son los autovectores reales y linealmente independientes correspondientes a λ_1 y λ_2 respectivamente y c_1, c_2 son constantes reales.

En el plano H de los vectores generados por h_1 y h_2 se tiene $x = \xi_1 h_1 + \xi_2 h_2$ donde $\xi_1 = c_1 e^{\lambda_1 t}$; $\xi_2 = c_2 e^{\lambda_2 t}$.

(En general, h_1, h_2 no son ortogonales). Efectuamos entonces una transformación del plano de fase .

$$H \to H'$$

tal que $h_i \to e_i$, $i = 1, 2$.

Si analizamos la situación en H' podemos luego regresar a H.

Puesto que, conjuntamente con las ecuaciones $\xi_1 = c_1 e^{\lambda_1 t}$; $\xi_2 = c_2 e^{\lambda_2 t}$ podemos considerar $\xi_1 = \pm c_1 e^{\lambda_1 t}$; $\xi_2 = \mp c_2 e^{\lambda_2 t}$, basta analizar la situación en el primer cuadrante y completar el cuadro por reflexión sobre los ejes.

(a) $c_1 = c_2 = 0$, obtenemos el E. E. $(0, 0)$

(b) $c_1 > 0$, $c_2 = 0$, obtenemos el semieje positivo de abscisas.

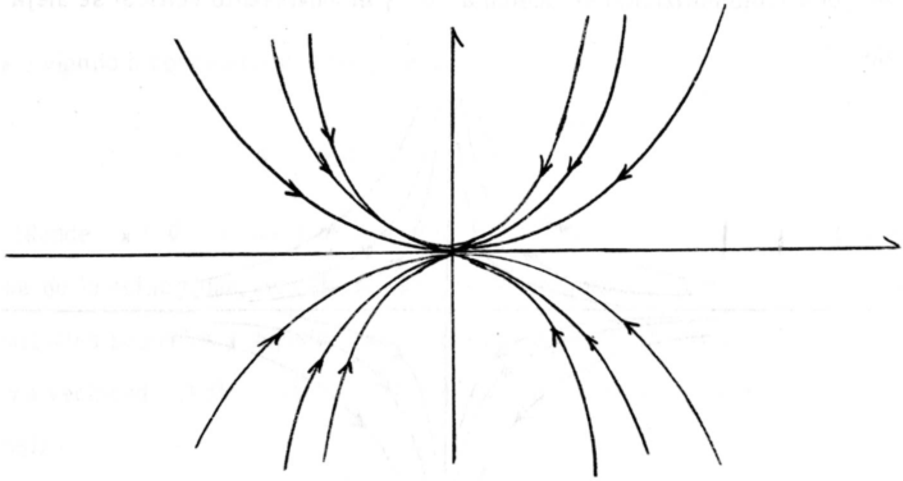
(c) $c_1 = 0$, $c_2 > 0$, obtenemos el semieje positivo de ordenadas.

(d) $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ obtenemos movimiento en el primer cuadrante que no toca los ejes.

En (b) si $\lambda_1 < 0$ el movimiento es hacia 0 y si $\lambda_1 > 0$ el movimiento es hacia $+\infty$. Análogamente en (c) .

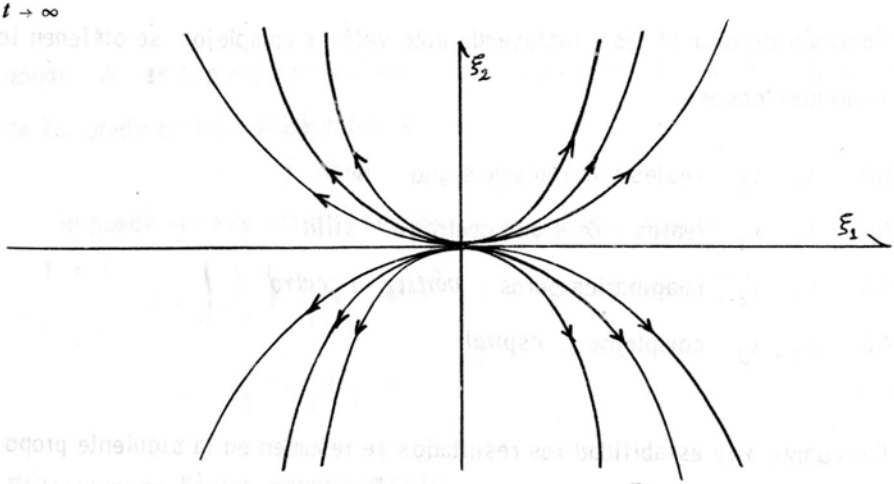
Si λ_1, λ_2 tienen el mismo signo, en particular $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$ y

$|\lambda_1| < |\lambda_2|$ entonces, en el primer cuadrante, cuando $t \to \infty$ podemos observar que se tiene : $\xi_1 \to 0$ y $\xi_2 \to 0$ más rápidamente, de modo que el eje de las abscisas es tangente en 0. Por reflexión se completa el diagrama :



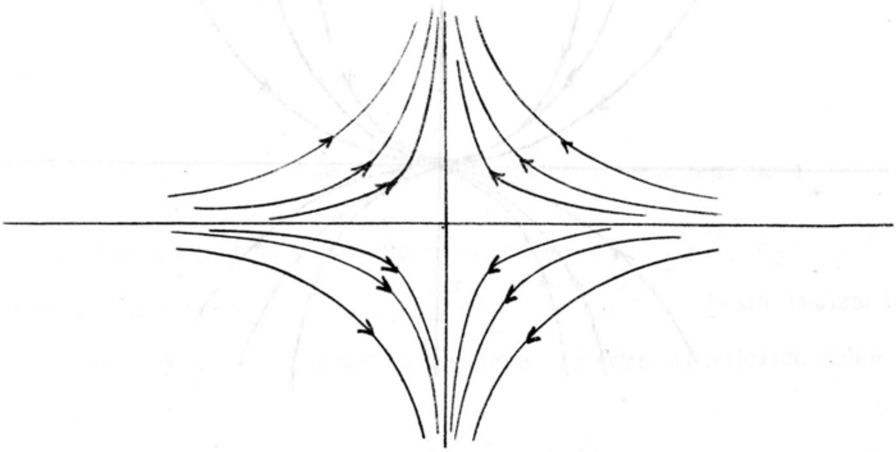
$(0,0)$ es un *nodo estable* .

Si λ_1, λ_2 son positivos, las trayectorias se alejan de $(0,0)$ cuando $t \to \infty$



$(0,0)$ es un *nodo inestable* .

Si λ_1, λ_2 tienen signos contrarios, por ejemplo si $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, sobre el eje positivo de las abscisas el movimiento se realiza hacia el origen. Sobre el eje positivo de las ordenadas, el móvil se aleja del origen. Otras trayectorias en el primer cuadrante se asemejan a hipérbolas, en las cuales el movimiento horizontal se acerca a 0 y el movimiento vertical se aleja de 0.



(0, 0) es un *punto silla* (inestable).

Continuando el análisis e incluyendo auto valores complejos, se obtienen los siguientes casos :

(a) λ_1, λ_2 reales y del mismo signo : *nodo*

(b) λ_1, λ_2 reales y de signo contrario : *silla*

(c) λ_1, λ_2 imaginarios puros : *vórtice o centro*

(d) λ_1, λ_2 complejos : *espiral*

En cuanto a la estabilidad los resultados se resumen en la siguiente proposición. Una condición necesaria y suficiente para que el E. E. *(0, 0)* sea estable es que λ_1 y λ_2 tengan partes reales negativas o nulas .

En este caso se dice que la *matriz* **A** *es estable* .

Sistemas no lineales .

Volviendo a considerar el caso general del S. A.

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) \qquad (iv)$$

(donde $\mathbf{x} = 0$ es un E. E.) con C. I. $\mathbf{x}(0) = \mathbf{c}$ con respecto al problema de la estabilidad, es natural empezar por estudiar el caso de perturbaciones iniciales pequeñas y suponer que las componentes de f sean analíticas en una vecindad $V(0)$. (Esto último es automático en el caso de un S. A. normal) .

En este caso, el S.A. puede escribirse :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\,\mathbf{x} + h(\mathbf{x}) \qquad (v)$$

donde **A** es una matriz constante y las componentes de h son por lo menos de 2o. grado en las componentes de $\mathbf{x}$.

Se puede ver más claro si escribimos el S. A. en la forma

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2)$$

El teorema de Taylor permite escribir

$$\dot{x}_1 = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)_0 x_1 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)_0 x_2 + b_1(x_1, x_2)$$

$$\dot{x}_2 = \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right)_0 x_1 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right)_0 x_2 + b_2(x_1, x_2)$$

$$\lim_{(x_1, x_2) \to (0,0)} \frac{b_1(x_1, x_2)}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = 0 = \lim_{(x_1, x_2) \to (0,0)} \frac{b_2(x_1, x_2)}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$$

Si $a_{ij} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_0 \quad ; \quad i, j = 1, 2$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

obtenemos la fórmula (2)

Es razonable suponer que el comportamiento asintótico de las soluciones del S. A. no lineal será bastante similar al correspondiente a las soluciones del S. A. lineal

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \ \mathbf{x}$$

cuya teoría conocemos.

Que esto sucede realmente ha sido establecido en el teorema de Liapounov–Poincaré :

Sea $\|x\| = \Sigma |x_i|$; si (1) $\|f(x)\| = 0(\|x\|$ cuando $\|x\| \to 0$ y (2) , $\mathbf{A}$ es estable .

Entonces : toda solución de (iv) para las cuales $\|\mathbf{c}\|$ es suficientemente pequeño, tiende a 0 cuando $t \to \infty$

Aparece claramente que las hipótesis de analiticidad de f , $\|\mathbf{c}\|$ suficientemente pequeño y $\mathbf{A}$ constante son muy restrictivas. Por esto, muchos esfuerzos se han dedicado a obtener criterios de estabilidad de mayor aplicabilidad .

El resultado más sobresaliente es el llamado *método directo de Liapounov* que exponemos brevemente a continuación .

Introducción. Conviene considerar los vectores $\mathbf{x}$ de componentes x_i como una matriz $n \times 1$ (vector columna).

El vector fila correspondiente, puede indicarse $\mathbf{x}'$.

Una forma cuadrática del vector $\mathbf{x}$ es una función $w(x) = \Sigma\, a_{ij} x_1 x_j$, donde $a_{ij} = a_{ji}$. Si $\mathbf{A} = (a_{ij}) = \mathbf{A}'$ entonces $w(x) = \mathbf{x}' \mathbf{A} \mathbf{x} \cdot w(x)$ es *definida positiva* si para $\mathbf{x} \neq 0$ se tiene $w(x) > 0$ y *definida negativa* si en el mismo caso $w(x) < 0$.

En los dos casos, $w(x) = 0$ si solamente si $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Sea $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ una solución del S. A. $\mathbf{x} = f(x)$ y $v(x)$ una función escalar de $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$. Así :

$$\dot{V}(x) = \Sigma\,(\partial v / \partial x_i)\, \dot{x}_i = \Sigma(\partial v / \partial x_i)\, f_i$$

Si podemos elegir la función $V(x)$ de manera que para todo x

$$\Sigma (\partial V/\partial x_i) f_i \leq -MV$$

donde M es una constante entonces, puesto que

$$\dot{V}(x)/V(x) \leq -M \text{ se tiene } V(x) \leq V(x(0))\, e^{-Mt}, \text{ para } t \geq 0$$

Si además $V(x)$ es una forma cuadrática definida positiva, entonces $V \to 0$ cuando $t \to \infty$ y por lo tanto $x \to 0$ cuando $t \to \infty$.

Entonces, el problema de estabilidad, se reduce a encontrar $V(x)$, lo cual no es trivial.

Referencias

Pontriagin, L. S. *Ordinary differential Equations*
Addison Wesley Publishing Company, Londres, 1962

Bellman, R. y Kalaba R. *The World of Lyapounov and Poincaré.*
Selected papers on mathematical trends. Control Theory
Dover Publ. 1964.

Danis, H. T. *Introduction to non-linear differential and Integral Equations.*
Dover Publ. 1962

Hurewicz, W. *Lectures on Ordinary differential Equations.*
M. I. T. Pren., 1963.

Mora L. *La teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales ordinarias.*
Revista de Matemáticas Elementales, Vol. III, Fasc. 4.