Boletín de Matemáticas
Volumen VI Nº 2 pp. 1 - 10

ESTABILIDAD DE LYAPUNOV

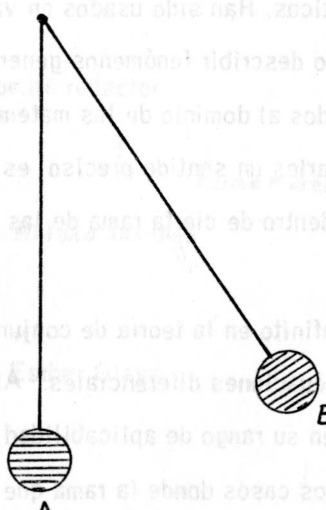
J. L. ARRAUT

Conceptos como infinito, continuidad, estabilidad y otros, no tuvieron origen en las matemáticas. Han sido usados en varias ramas del saber humano para expresar ideas o describir fenómenos generalmente interesantes. Algún día fueron incorporados al dominio de las matemáticas. En el proceso de incorporación hubo que darles un sentido preciso, es decir, definirlos en términos de otros conceptos dentro de cierta rama de las matemáticas.

Por ejemplo, infinito en la teoría de conjuntos, continuidad en análisis y estabilidad en las ecuaciones diferenciales. Al ser "matematizados" estos conceptos, restringen su rango de aplicabilidad, pero a cambio actúan poderosamente en aquellos casos donde la rama que los contiene sirve de modelo para el fenómeno que se estudia. Aquí vamos a hablar someramente sobre una de las formas en que el concepto de estabilidad ingresó a las matemáticas ; digo una porque lo ha hecho en varias y muy importantes todas ellas. La estabilidad de Lyapunov debe su nombre al matemático ruso A. M. Lyapunov que realizó contribuciones importantes en esta dirección a fines del siglo pasado.

Supongamos que un barco bien construido se encuentra navegando en aguas tranquilas. Mientras las aguas permanezcan tranquilas, el barco conservará su posición vertical. Si de pronto y por un lapso corto, surge un oleaje fuerte (pero no tanto) el barco empezará a inclinarse de un lado a otro. Pasado el oleaje el barco tenderá poco a poco a recuperar su posición vertical. Estamos tentados a decir que la posición vertical en el agua de un barco bien construido es estable.

Consideremos un péndulo, es decir, un hilo tenso asido a un punto fijo en un extremo y el otro extremo, con una pequeña masa libre.



La posición de reposo A del péndulo es la posición vertical con la pequeña masa abajo. Si perturbamos dicha posición un poco, por ejemplo a B, entonces el péndulo empezará a oscilar y poco a poco tenderá nuevamente a la posición A. Decimos por eso que la posición de reposo A del péndulo es estable.

La trayectoria de la tierra alrededor del sol está regida por un campo gravitacional. Si en algún instante fuera separada un poco de su órbita, por ejemplo por el impacto de un gran meteoro, nos gustaría poder decir que la nueva trayectoria seguida por la tierra fuera muy cercana a la original. Es decir, que la trayectoria de la tierra alrededor del sol es estable.

Sea R^n el espacio euclideano de dimensión n. Los puntos de R^n son colecciones ordenadas $x = (x^1, \ldots, x^n)$ de n números reales. Consideremos un sistema de n ecuaciones diferenciales de primer orden :

$$\begin{aligned} \dot{x}^1 &= f^1(x^1, \ldots, x^n) \\ &\vdots \\ \dot{x}^n &= f^n(x^1, \ldots, x^n) \end{aligned} \qquad (*)$$

donde las f^i, $i = 1, \ldots, n$, son funciones numéricas de clase C^k, $(k \geq 1)$[(1)] definidas en una región A de R^n. Recordemos que una solución de (*) es una curva $\varphi : I \to \mathbb{R}$, donde I es un intervalo abierto de la recta real, tal que $\varphi^i(t) = (\varphi^1(t), \ldots, \varphi^n(t))$, $i = 1, \ldots, n$ para todo $t \in I$. Si $x \in A$ denotamos por $\varphi_x(t)$ la solución de (*) que cumple la condición $\varphi_x(0) = x$. Se dice que $\varphi_x(t)$ es la solución con condición inicial x. Un punto $x \in A$ donde $f(x) = 0$ se llama una posición de

---

(1) Si escribimos $\dot{x} = (\dot{x}^1, \ldots, \dot{x}^n)$ y $f = (f^1, \ldots, f^n)$ entonces (*) se puede escribir así : (1) $\dot{x} = f(x)$.

reposo. Si x es una posición de reposo la solución con condición inicial x, $\varphi_x(t)$ es dada por $\varphi_x(t) = x$ para toda t en el intervalo de definición.

Definición. Sea $\varphi_x(t)$ una solución de (*) . Se dice que $\varphi_x(t)$ es estable (en el sentido de Lyapunov) si ocurre lo siguiente :

1. Existe $\gamma > 0$ tal que si $|y - x| < \gamma$, la solución $\varphi_y(t)$ está definida para todo $t \geq 0$.

2. Dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ con $\delta > \gamma$ tal que $|y - x| < \delta$ implica que $|\varphi_y(t) - \varphi_x(t)| < \varepsilon$ para toda $t \geq 0$.

Si $\varphi_x(t)$ es estable y además $|y - x| < \delta$ implica que

$$|\varphi_y(t) - \varphi_x(t)| \to 0 \quad \text{con} \quad t \to \infty$$

entonces se dice que $\varphi_x(t)$ es asintóticamente estable.

Aquí vamos a analizar solamente el caso en el cual la solución es $\varphi_x(t) = x$ para toda t, (x es una posición de reposo .)

Primero tomemos el caso más simple, que se presenta cuando el sistema (*) es un sistema lineal homogéneo,

$$\dot{x} = Bx \tag{*}$$

donde B es una matriz $(n \times n)$ de coeficientes reales constantes. El origen $0 = (0, \ldots, 0)$ es una posición de reposo de $(+)$.

Teorema . Si todos los valores característicos de la matriz B tienen parte real negativa, entonces el origen 0, es una posición de reposo asintóticamente estable y en particular estable.

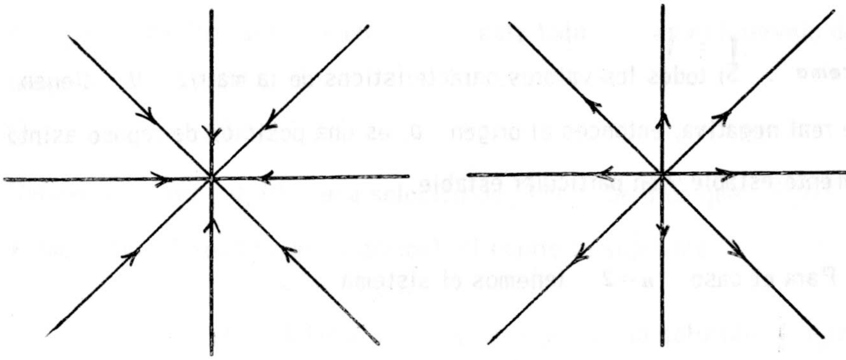
Para el caso $n = 2$ tenemos el sistema :

$$\frac{dx}{dt} = ax + by \qquad\qquad B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

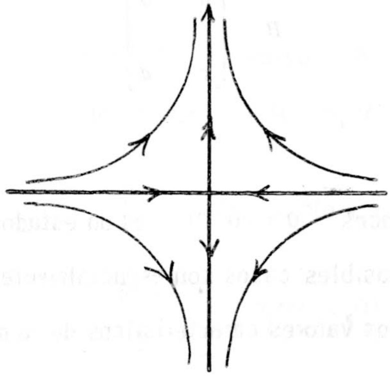
$$\frac{dy}{dt} = cx + dy$$

Si suponemos que $\det B \neq 0$, entonces $0 = (0, 0)$ es un estado de reposo aislado. En esta situación los posibles casos son esencialmente los siguientes : si λ_1, λ_2 denotan los valores característicos de la matriz B entonces

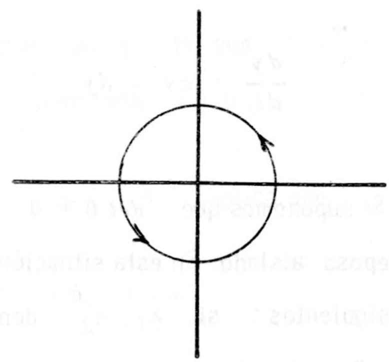
1) λ_1, λ_2 reales y de mismo signo : nodo
2) " " reales y signos opuestos : punto silla
3) " " imaginarios puros : vórtice
4) " " complejos con parte real $\neq 0$: espiral



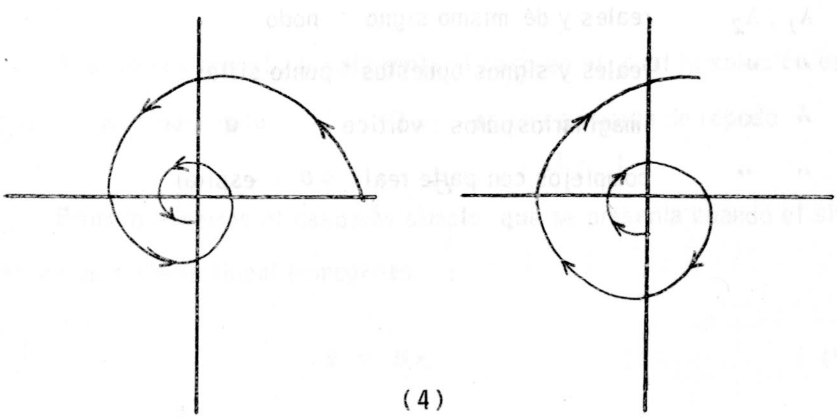
(a) $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ (I) (b) $\lambda_1, \lambda_2 > 0$



(2) $\lambda_1 < 0,\ \lambda_2 > 0$

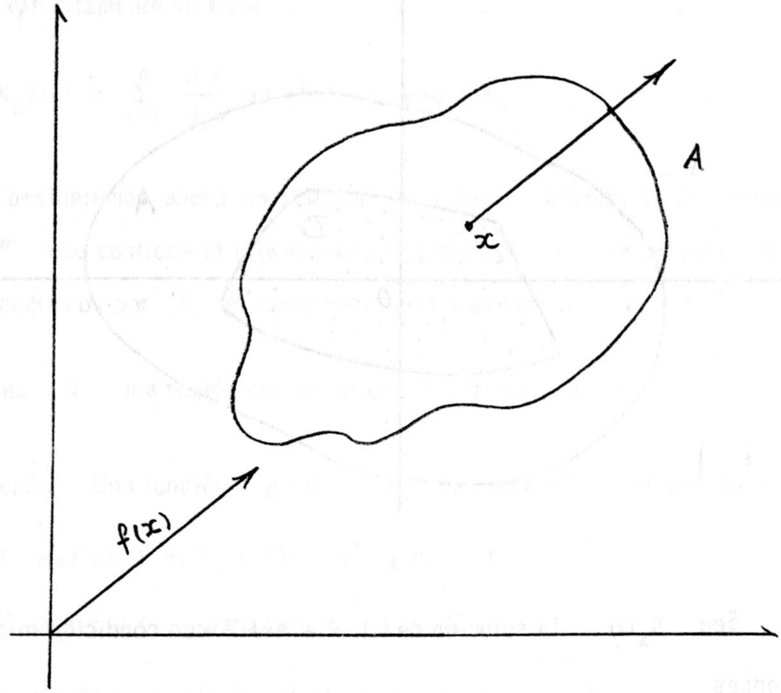


(3)



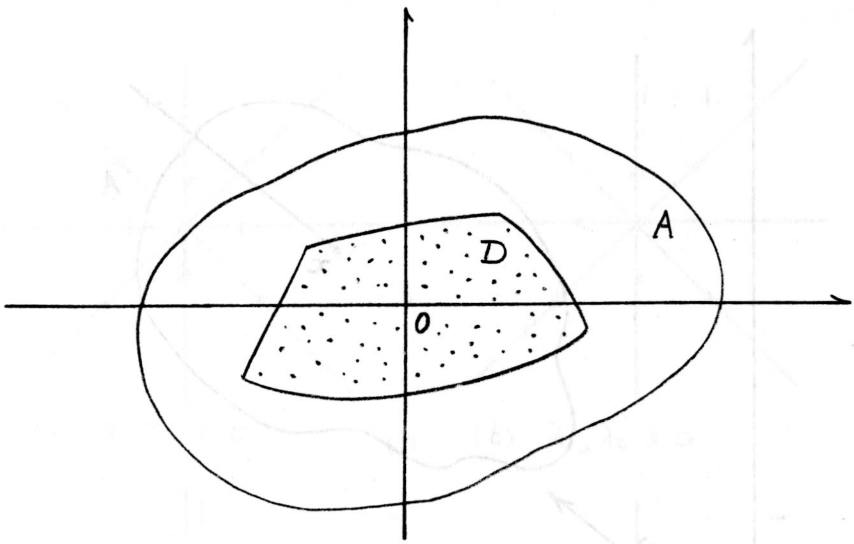
(4)

$Re(\lambda_1) < 0\ , Re(\lambda_2) < 0$



El origen es asintóticamente estable en los casos : 1º . 4º. El origen es estable en los casos 1º , 3º y 4º.

Sea $\dot{x} = f(x)$ un sistema definido en una región A de R^n. Para cada $x \in A$, $f(x)$ es un vector de R^n. Si el vector $f(x)$ lo colocamos con origen en x, obtenemos un campo de vectores en A. Este campo lo denotaremos por X_x será el vector $f(x)$ con origen en x (Ver figura en esta página).



Sea $\varphi_x(t)$ la solución de $\dot{x} = f(x)$ con condición inicial x entonces

$$\dot{\varphi}_x(0) = \frac{d}{dt}(\varphi_x)(0) = X_x$$

es decir, X_x es el vector tangente a la solución $\varphi_x(t)$ para $t = 0$. Es claro pues que un sistema $\dot{x} = f(x)$ en una región A de R^n es lo mismo que un campo vectorial X en A.

Sea $g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase $C^k (k \geq 1)$ la derivada de g con respecto a un campo x es la función xg definida así: $(xg)(x)$ es la derivada de g en la dirección de X_x

$$(X_g)(\dot{x}) = X_x(g) = \frac{d}{dt} g(\varphi_x(t))(0)$$

Explícitamente se tiene :

$$(X_g)(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x^i}(x)\, f^i(x) = \langle\, grad\ ,\ X_x \,\rangle$$

Consideremos ahora un sistema $\dot{x} = f(x)$ definido en una región A de $\mathbb{R}^n$ que contiene el origen y supongamos que 0 es un punto de reposo. Denotemos por X el campo vectorial asociado a $\dot{x} = f(x)$.

Sea D una región contenida en A y con $0 \in D$.

Definición. Una función $g : D \to R$ de clase C^∞ que satisface :

i) $g(x) > 0$ si $x \neq 0$ y $g(0) = 0$

ii) $X_x(g) < 0$ para todo $x \in D - \{ 0 \}$

iii) tiende a un valor constante en la frontera de D.

Se llama una función de Lyapunov.

Teorema . El origen es asintóticamente estable en la región D si y solo si existe una función de Lyapunov definida en D.

Ejemplo : Consideremos el sistema

$$\frac{dx}{dt} = y + x\,(x^2 + y^2 - 1)$$

$$\frac{dy}{dt} = -x + y\,(x^2 + y^2 - 1)$$

Es fácil verificar que la función $g(x, y) = x^2 + y^2$ es una función de

Lyapunov para dicho sistema. De hecho se tiene que

$$X_g = (x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - 1)$$

luego g es una función de Lyapunov en el interior del círculo unitario.

* * *

Naturaleza de los axiomas

También hay quien considera *los axiomas como convenios arbitrarios* y *los conceptos primitivos como nombres convencionales de las cosas con que que se opera.* Este modo de pensar encierra algún fondo de verdad, pues es cierto que dentro de la *Lógica pura,* no existe fundamento alguno para enunciar tales o cuales axiomas, pero algunos autores se han mostrado tan exageradamente exclusivistas en este sentido, que la axiomática ha venido a seguir aquella dirección filosófica que los antiguos llamaron *nominalismo*, y que tiene por norma prescindir en absoluto de la esencia de las cosas, dando importancia solamente al esquema lógico que permite operar con los nombres o signos que las representan.

. . . .

Lejos de compartir la concepción nominalista, creemos que lleva aparejada la muerte de la ciencia y que *los axiomas de la Geometría no son proposiciones arbitrarias, sino razonables, que tienen su origen en la intuición espacial y cuyos pormenores están regulados por razones de conveniencia.*

Felix Klein
Matemática Elemental