LA CONTINUIDAD EN LA ENSEÑANZA MEDIA

Ponencia presentada por el Doctor ALBERTO MEDINA P. de la Universidad Nacional. Departamento de Matemáticas.

El propósito de esta conferencia es tratar de presentar algunas ideas que puedan contribuir en cierta medida a facilitar la labor de los profesores de enseñanza media, lo mismo que a terminar con la idea, desgraciadamente existente en ciertos sectores, de que tópicos como la continuidad están y deben estar, solamente al alcance de especialistas en Matemática.

Con esta finalidad expondremos un breve resumen de algunas maneras de llevar a los estudiantes, la idea de función contínua, idea que sobra decir, es fundamental en Matemática. Notaremos con R el conjunto de los números reales y las funciones a las cuales nos referimos son de variable real a valor real y se suponen definidas en todo R.

En general, si $f: R \to R$ es una función y a es un punto de R, diremos, de manera intuitiva, que f es contínua en a si f transforma puntos vecinos de a en puntos vecinos de $f(a)$.

Para aclarar la idea de puntos vecinos, convenimos en dar la siguiente:

Definición. Sea a un punto de R. Si ϵ es un número real mayor que cero, llamemos ϵ-vecindad de a al intervalo abierto de R, $(a-\epsilon, a+\epsilon)$.

Nótese que puesto que

$$(a - \epsilon\ ,\ a + \epsilon) = \{\, x \mid a - \epsilon < x < a + \epsilon \,\}$$

se tiene que $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ es el conjunto de los puntos x de R que están a una distancia de a menor que ϵ (Fig 1)

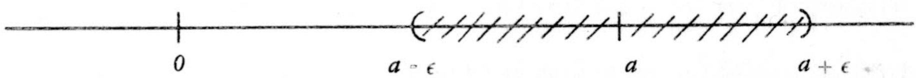

Figura 1

Presentamos entonces el

<u>*Primer método.*</u> Se dirá que $f : R \to R$ es contínua en un punto a de R si puntos vecinos de $f(a)$ pertenecientes al rango de f, son imágenes por f de puntos vecinos a a

O más correctamente, si se da cualquier ϵ - vecindad de $(f(a) - \epsilon\ ;\ f(a) + \epsilon)$ para que f sea contínua en a, deberá existir una ϵ' - vecindad de a de manera tal que si x, es cualquier elemento de la ϵ' - vecindad, $(a - \epsilon'\ ,\ a + \epsilon')$, $f(x)$ deberá ser un elemento de la ϵ - vecindad (Fig. 2)

En la Figura 3, se muestra una función que no es contínua, en el punto $a = 2$ puesto que se exhibe la 1 - vecindad, $(f(2) - 1\ ,\ f(2) + 1)$ sobre la cual no caen las imágenes de puntos de una ϵ' - vecindad $(2\ \ 2 + \epsilon')$.

<u>*Segundo*</u> <u>*método.*</u> Suponiendo la definición de sucesión de números reales conocida, se explica cuándo una sucesión se acerca a cero. Se dirá que

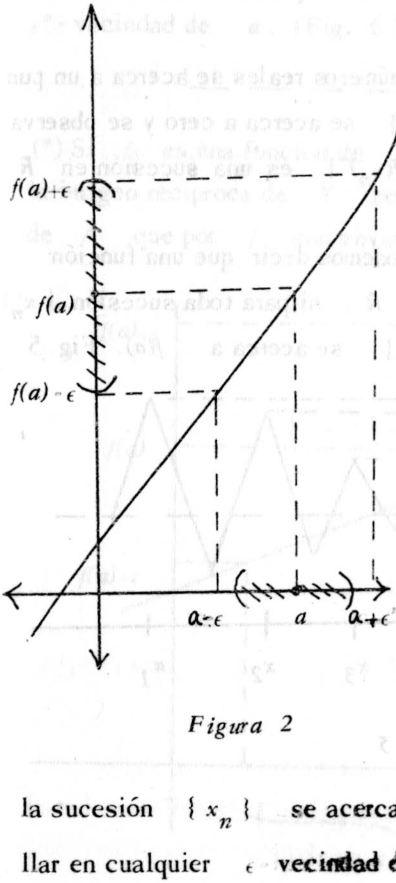

Figura 2

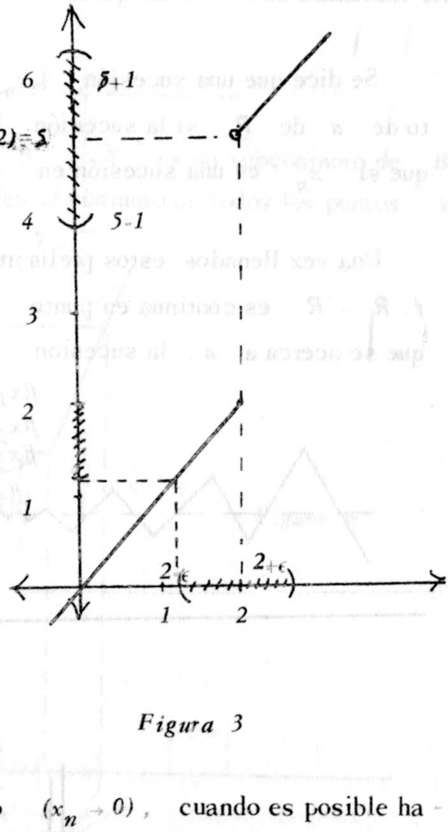

Figura 3

la sucesión $\{x_n\}$ **se acerca a cero** $(x_n \to 0)$, cuando es posible hallar en cualquier ϵ **vecindad de** 0 un elemento x_n de la sucesión, de tal manera que todos los elementos siguientes de la sucesión están en la ϵ vecindad (Fig 4).

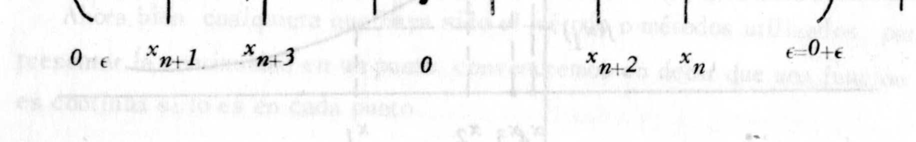

Figura 4

En este punto obsérvese que si $\{x_n\}$ se acerca a 0, por fuera de una ϵ vecindad de 0, solo queda un número finito de puntos de la sucesión.

Se dice que una sucesión $\{x_n\}$ de números reales se acerca a un punto de a de R si la sucesión $\{x_n - a\}$ se acerca a cero y se observa que si x_n es una sucesión en R, $\{f(x_n)\}$ es una sucesión en R.

Una vez llenados estos preliminares, podemos decir que una función $f: R \to R$ es contínua en punto a de R, si para toda sucesión $\{x_n\}$ que se acerca a a, la sucesión $\{f(x_n)\}$ se acerca a $f(a)$. Fig. 5.

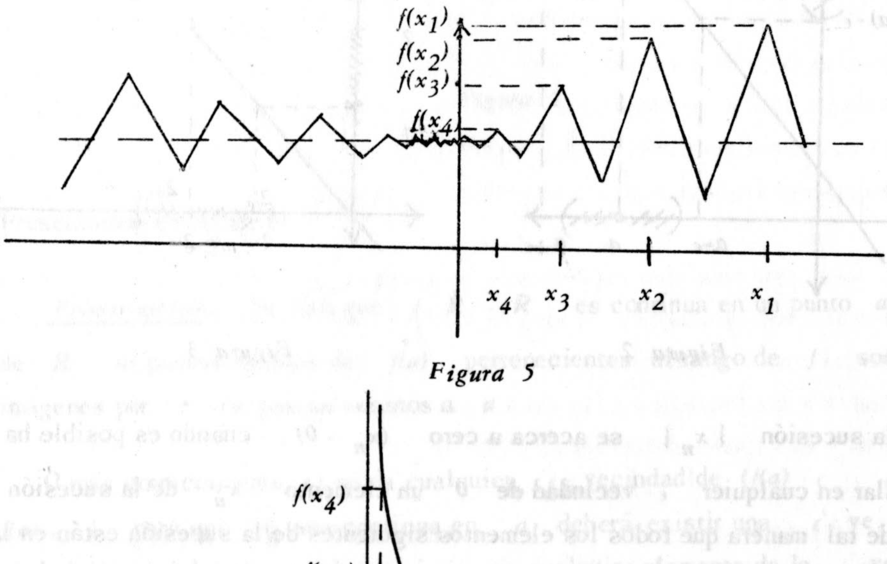

Figura 5

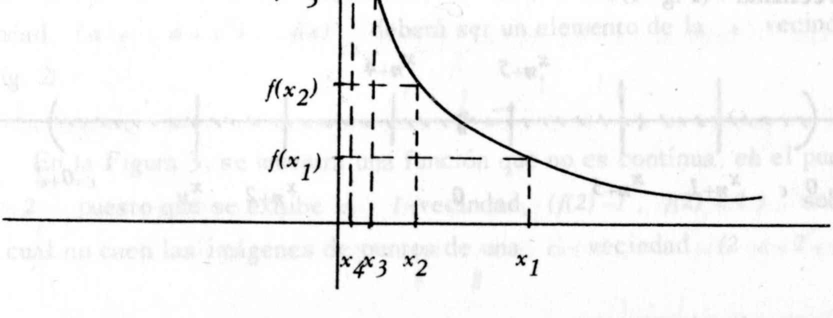

Figura 6

<u>*Tercer método*</u>. La función $f: R \to R$ es contínua en a si la imagen recíproca por f de toda ϵ- vecindad de $f(a)$ contiene una ϵ'- vecindad de a. (Fig. 6) (*)

(*) Si f es una función de A en B y Y es un subconjunto de B, la imagen recíproca de Y por f es el conjunto de todos los puntos x de A que por f son enviados en Y.

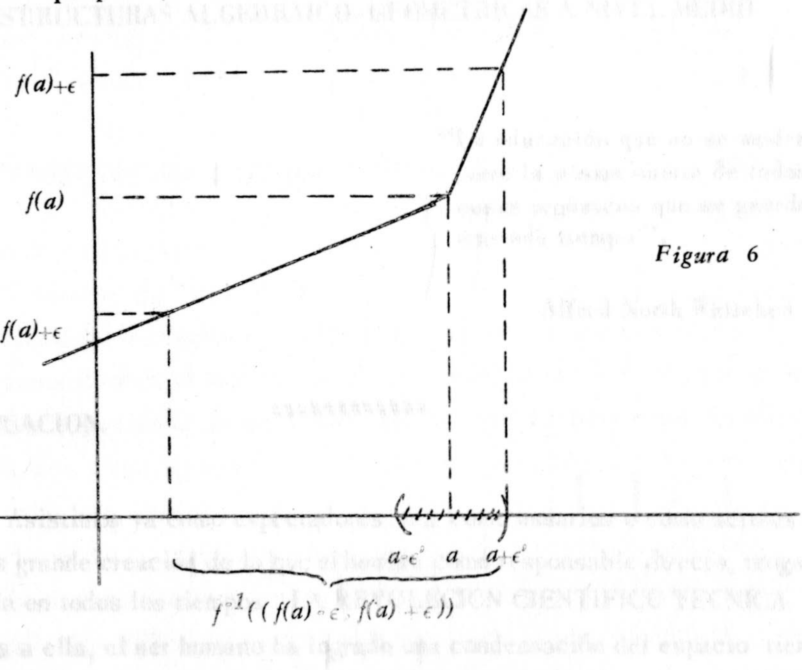

Figura 6

Es claro que para presentar a los estudiantes la continuidad en esta forma, es necesario haberlos hecho practicar suficientemente, sobre imágenes directas y recíprocas de conjuntos por medio de funciones.

Ahora bien, cualquiera que haya sido el método o métodos utilizados, para presentar la continuidad en un punto, convendremos en decir que una función es contínua si lo es en cada punto.

Agregamos que $f: [a, b] \to R$ es contínua si f es una parte de una función $\bar{f}: R \to R$ que es contínua en R.

Al decir que $\bar{f}$ es una parte de una función $f: R \to R$ quiero significar que si x es un punto cualquiera de $[a, b]$,

$$f(x) = \bar{f}(x).$$

############