Boletín de Matemáticas
Volumen V (1971) págs. 16 - 20

ALGEBRA - NOTAS DE CLASE

por

FRANCISCO CAYCEDO

En el Departamento de Matemáticas de la Universidad Nacional se ha adoptado como texto para los cursos regulares de álgebra abstracta el libro "Topics in Algebra" de I. N. Herstein. Este libro, bastante bueno para los primeros cursos, presenta a veces el inconveniente de plantear problemas bastante difíciles para los alumnos.

En este Boletín se tratarán algunos de esos problemas por su dificultad y (o) su interés. No se espere pues originalidad.

En el Capítulo III sobre Teoría de Anillos, se proponen entre otros los tres problemas siguientes :

1) Demuestre que R es un anillo conmutativo si $x^2 = x$ para todo $x \in R$. [Pág. 91]

2) Demuestre que R es un anillo conmutativo si $x^3 = x$ para todo $x \in R$ [Pág. 98].

3) Demuestre que R es un anillo conmutativo si $x^4 = x$ para todo $x \in R$ [Pág. 129].

Estos 3 problemas son casos particulares del Teorema siguiente :

TEOREMA [I. N. Herstein] ([1]). Sean R un anillo y Z su centro. R es conmutativo si para todo $x \in R$, existe un entero positivo $n = n(x)$ $n \geq 1$, tal que $x^{n(x)} + x \in Z$.

En la demostración de este teorema se utiliza el "Lema de Zorn", método que no usaremos.

Veamos, que en efecto, estamos en las condiciones del teorema. Afirmamos por tanto, que en estos 3 anillos se tiene que

$$\forall x \in R, \ \exists n = n(x) \quad \text{tal que} \quad x^n + x \in Z.$$

Sea $x \in R$ y $n(x) = 2$ cualquiera sea el caso. Bastará observar que :

Proposición 1. Si para todo $x \in R$, $x^2 + x \in Z$, entonces R es conmutativo.

Demostración.

$$(x + y)^2 + (x + y) = x^2 + x + y^2 + y + xy + yx$$

Como $x^2 + x$, $y^2 + y \in Z$ y Z es un subanillo

$$xy + yx \in Z \quad , \ \forall x, y \in R. \qquad \text{Se sigue que}$$

$$x(xy + yx) = (xy + yx)x \quad , \ \text{o sea,}$$

$$x^2 y + xyx = xyx + yx^2,$$

luego

$-x^2 y = yx^2$. Es decir $-x^2$ conmuta con y, para todo $y \in R$, por lo tanto $x^2 \in Z$ y como $x^2 + x \in Z$, $x \in Z$ para todo $x \in R$ ■

Demostraremos, por tanto, que en los anillos de los problemas enunciados $x^2 + x \in Z$.

Problema 1. Puesto que $x^2 = x$, $x = x^2 = (-x)^2 = -x$, entonces

$$x + x = 0 \ , \quad \forall\, x \in R \ ,$$

o sea

$$x^2 + x = 0 \ , \quad \forall\, x \in R \ ,$$

de donde $x^2 + x \in Z$, $\forall\, x \in R$ ■

NOTAS. a) Aquí el anillo es de característica 2.

b) Este problema puede hacerse por otros métodos, en particular sin la ayuda de la proposición 1.

Problema 2.

i) Puesto que $x^4 = x$, $x \in R$,

$$x = x^4 = (-x)^4 = -x \ ,$$

se sigue que

$$x + x = 0 \ , \quad \forall\, x \in R \ ,$$ es decir el anillo es de característica 2 .

ii) En este anillo, si $x^2 = 0$ entonces $x = 0$. En efecto :

$$x^4 = x^2 \ x^2 = 0 \ \ 0 = 0$$

y como $x = x^4$ se sigue la afirmación .

iii) Si $\alpha = a^2 + a$ entonces $\alpha^2 = \alpha$.

En efecto :

$$\alpha^2 = (a^2 + a)^2 = a^4 + 2a^3 + a^2 = a^4 + a^2 = a^2 + a = \alpha$$

pues $2a^3 = 0$ por i) y $a^4 = a$.

iv) A) $\alpha x \alpha = \alpha x$ $[\alpha = a^2 + a]$. En efecto :

$$(\alpha x \alpha - \alpha x)^2 = (\alpha x \alpha)(\alpha x \alpha) - (\alpha x \alpha)(\alpha x) - (\alpha x)(\alpha x \alpha) + (\alpha x)(\alpha x)$$

$$= \alpha x \alpha x \alpha - \alpha x \alpha x - \alpha x \alpha x \alpha + \alpha x \alpha x \quad \alpha^2 = \alpha = 0 .$$

Por ii) $\alpha x \alpha - \alpha x = 0$ de donde $\alpha x \alpha = \alpha x$.

B) Análogamente $\alpha x \alpha = x \alpha$. [Verificar que $(\alpha x \alpha - x \alpha)^2 = 0$].

De iv) se deduce por A) y B) que

$$\alpha x \alpha = \alpha x = x \alpha \qquad [\alpha = a^2 + a] \quad \forall x \in R \qquad \blacksquare$$

Problema 2) (R es conmutativo si $x^3 = x$, $\forall x \in R$)

En este anillo se tiene :

1) Si $x^2 = 0$, $x = 0$.

En efecto :

$$x = x^3 = x^2 x = 0 x = 0$$

2) $2A^2 = A$, donde $A = a^2 + a$ $(a \in R)$.

En efecto :

$$A = a^2 + a = (a^2 + a)^3 = (a^2 + a)^2 (a^2 + a) =$$

$$= (a^4 + 2a^3 + a^2)(a^2 + a) = (a^2 + 2a + a^2)(a^2 + a) =$$

$$= (2a^2 + 2a)(a^2 + a) = 2(a^2 + a)^2 = 2A^2 .$$

$$(a^4 = a^3 a = a a = a^2)$$

3) $\alpha)$ $\quad 2\,A\,x\,A - A\,x = 0 \qquad\qquad (\,A = a^2 + a\,).$

En efecto :

$$(2\,A\,x\,A - A\,x\,)^2 = (2\,A\,x\,A)(2\,A\,x\,A) - 2\,(A\,x\,A)\,A\,x - 2\,(A\,x)(A\,x\,A) +$$

$$(A\,x)\,(A\,x) = 2\,A\,x\,A\,x\,A - A\,x\,A\,x - 2\,A\,x\,A\,x\,A + A\,x\,A\,x = 0$$

$2\,A^2 = A$; $\beta)$ $2\,A\,x\,A - x\,A = 0$

Por lo 1º) $(\,2\,A\,x\,A - x\,A\,)^2 = 0$ luego por lo 1º , $2\,A\,x\,A = x\,A$.

De lo 3º) se deduce por α) y β) que $A\,x = x\,A$, $\forall x \in R$.

Luego $A = a^2 + a \in Z$, $\forall a \in R$ y entonces por la proposición 1) R es conmutativo ■

NOTA . Puede demostrarse que si $x^3 + x \in Z$, $\forall x \in R$, R es conmutativo .

REFERENCIAS :

[0] "Nonconmutative Rings" I. N. Herstein The Carus Mathematical Monographs.

[1] "Topics in Algebra" I. N. Herstein