BOLETÍN DE MATEMATICAS
VOLUMEN III No. 6

EL GRUPO DE POINCARÉ Y REVESTIMIENTOS DE UN GRUPO TOPOLÓGICO

por

Alberto MEDINA PEREA

Esta nota divulgativa tiene por objeto el estudio del grupo de Poincaré de un grupo topológico, lo mismo que de ciertas propiedades de los revestimientos conexos y localmente arcoconexos de un grupo topológico.

§1. GRUPO DE POINCARÉ DE UN GRUPO TOPOLÓGICO.

DEFINICIÓN 1. Dado un espacio topológico X se llama <u>camino</u> en X a toda aplicación continua ω del intervalo $[0,1]$ de $\mathbb{R}$ en X. Si $\omega(0) = \omega(1) = x_o$ diremos que ω es un <u>lazo en</u> x_o

DEFINICIÓN 2. Dados dos caminos ω y ω' en X se dice que ellos son <u>homótopos</u> si existe una aplicación continua F,

$$F: [0,1] \times [0,1] \to X$$

tal que

$$F(t,0) = \omega(t) \quad ; \quad F(t,1) = \omega'(t), \quad \text{para todo } t \in [0,1]$$
$$F(0,t') = \omega(0) = \omega'(0); \; F(1,t') = \omega(1) = \omega'(1), \quad \text{para todo } t' \in [0,1].$$

Se puede demostrar que la relación «ser homótopo a» es una relación de equivalencia entre caminos. Notaremos $[\omega]$ la clase de equivalencia del camino ω según la relación de equivalencia anterior y escribiremos $\omega \simeq \omega'$ si ω es homótopo a ω'.

DEFINICIÓN 3. Si ω, σ son dos caminos en X tales que $\omega(1) = \sigma(0)$, definimos el <u>camino compuesto de ω y σ</u> poniendo

$$(\omega * \sigma)(t) = \begin{cases} (2t) & 0 \leq t \leq 1/2 \\ (2t - r) & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Se demuestra que si $\omega \sim \omega'$, $\sigma \sim \sigma'$ y $\omega(1) = \sigma(0)$, $\omega'(1) = \sigma'(0)$ entonces

$$\omega * \sigma \sim \omega' * \sigma'$$

(Véase [1] , pág. 46, lema 6)

Por consiguiente si $\pi(X, x_0)$ designa el conjunto de las clases de equivalencia de todos los lazos en x_0 , la operación

$$[\omega] * [\sigma] = [\omega * \sigma]$$

está bien definida y hace de $\pi(X, x_0)$ un grupo (Véase [2] , pág. 167) que se denomina el <u>grupo fundamental</u>, o <u>de Poincaré</u>, de X en x_0.

Por otra parte, si $f: X \to Y$ es una aplicación continua tal que $f(x_0) = y_0$, f induce un homomorfismo

$$f_\# : \pi(X, x_0) \to \pi(Y, y_0)$$

dado por

$$f_\# ([\omega]) = [f\omega]$$

Finalmente recordemos que dados dos espacios topológicos X y Y , $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ la aplicación η ,

$$\pi (X \times Y , (x_0\, y_0)) \to \pi (X, x_0) \times \pi (Y, y_0) \quad \text{tal que}$$

$$(1) \quad \eta([\omega]) = (p_\# [\omega] , q_\# [\omega])$$

(en donde p y q designan las proyecciones sobre X y Y resp.) es un isomorfismo (Véase [3] , pág. 15)

Sean ahora $i : X \to X \times Y$, $j: Y \to X \times Y$ aplicaciones tales que

$$i(x) = (x, y_0) , \; j(y) = (x_0 , y)$$

se tiene entonces la siguiente proposición :

<u>Proposición 1.</u> La aplicación

$\theta : \pi(X, x_0) \times \pi(Y, y_0) \rightarrow \pi(X \times Y, (x_0, y_0))$, <u>definida por</u>

$$\theta([\sigma], [\tau]) = i_{\#}[\sigma] * j_{\#}[\tau] ,$$

<u>es un isomorfismo tal que</u>

$$i_{\#}[\sigma] * j_{\#}[\tau] = j_{\#}[\tau] * i_{\#}[\sigma] \qquad (2)$$

<u>Demostración</u> Si ξ_x designa el lazo constante en x, se tiene :

$$\eta(\theta([\sigma],[\tau])) = \eta(i_{\#}[\sigma] * j_{\#}[\tau])$$
$$= (p_{\#}(i_{\#}[\sigma] * j_{\#}[\tau]), q_{\#}(i_{\#}[\sigma] * j_{\#}[\tau]))$$
$$= ((p\circ i)_{\#}[\sigma] * p_{\#} j_{\#}[\tau], q_{\#} i_{\#}[\sigma] * (q\circ j)_{\#}[\tau])$$
$$= ((I_X)_{\#}[\sigma] * [\xi_{x_0}], [\xi_{y_0}] * (I_Y)_{\#}[\tau]) = ([\sigma],[\tau])$$

Pero, por otra parte

$$\theta(\eta[\omega]) = \theta(p_{\#}[\omega], q_{\#}[\omega])$$
$$= i_{\#}(p_{\#}[\omega]) * j_{\#}(q_{\#}[\omega])$$
$$= [(i\circ p\circ\omega) * (j\circ q\circ\omega)]$$

y como

$p\{(i\circ p\circ\omega) * (j\circ q\circ\omega)\} = (p\circ i)\circ(p\circ\omega) * \xi x_0$
$= (p\circ\omega) * \xi x_0 \sim p\circ\omega$ y
$q\{(i\circ p\circ\omega) * (j\circ q\circ\omega)\} = (q\circ i)\circ(p\circ\omega)\circ(q\circ j)\circ$
$(q\circ\omega) = \xi y_0 * (q\circ\omega) \sim q\circ\omega$

Se tiene que Θ es el inverso de la aplicación η definida en (1) y por tanto es un isomorfismo.

Finalmente debemos ver que

$$i\sigma * j\tau \sim j\tau * i\sigma$$

lo cual es inmediato ya que

$p(i\sigma * j\tau) \sim \sigma$, $p(j\tau * i\sigma) \sim \sigma$

y $q(i\sigma * j\tau) \sim \tau$, $q(j\tau * i\sigma) \sim \tau$

(Véase [4] , pág. 77)

Proposición 2. Asumamos que G es un espacio topológico, $\mu : G \times G \to G$ es una aplicación continua y $e \in G$ es tal que la siguiente condición se tiene :

Para todo $x \in G$, $\mu(x, e) = \mu(e, x) = x$

Sean i, j las aplicaciones dadas por

$$i : G \to G \times G \qquad j : G \to G \times G$$
$$x \to (x, e) \qquad y \to (e, y)$$

entonces para cualquier par de elementos $[\omega]$ y $[\sigma]$ de $\pi(G, e)$ tenemos :

$$\mu_{\#}(i_{\#}[\omega] * j_{\#}[\sigma]) = [\omega] * [\sigma] \tag{3}$$

Demostración. Dadas las aplicaciones i, j , ellas inducen los siguientes homomorfismos entre grupos

$$i_{\#} : \pi(G, e) \to \pi(G \times G, (e, e))$$

$$j_{\#} : \pi(G, e) \to \pi(G \times G, (e, e))$$

y $$\mu_{\#} : \pi(G \times G, (e, e)) \to \pi(G, e).$$

Nuestro problema se reduce entonces a demostrar que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\pi(G, e) \times \pi(G, e) \arrow[r, "\theta"] \arrow[dr, "\theta'"'] & \pi(G \times G, (e, e)) \arrow[d, "\mu_{\#}"] \\
& \pi(G, e)
\end{tikzcd}$$

con $\theta'([\omega], [\sigma]) = [\omega] * [\sigma]$

es conmutativo.

Consideremos los siguientes casos :

a) $\omega \sim \xi_e$.

En este caso, tenemos :

$$i_{\#}[\xi_e] * j_{\#}[\sigma] = [\xi_{(e,e)}] * j_{\#}[\sigma]$$

y por consiguiente

$$\mu_{\#}(i_{\#}[\xi_e] * j_{\#}[\sigma]) = \mu_{\#}[\xi_{(e,e)}] * \mu_{\#}(j_{\#}[\sigma])$$
$$= [\xi_e] * [\sigma] = [\sigma]$$

b) $\sigma \sim \xi_e$

La demostración es análoga al caso a)

c) ω y σ son arbitrarios.

Como $([\omega], [\sigma]) = ([\omega], [\xi_e]) \,\square\, ([\xi_e], [\sigma])$

en donde $\square$ designa el producto en $\pi(G, e) \times \pi(G, e)$ tenemos :

$$\theta([\omega], [\sigma]) = \theta\big(([\omega], [\xi_e]) \,\square\, ([\xi_e], [\sigma])\big)$$
$$= \theta([\omega], [\xi_e]) * \theta([\xi_e], [\sigma])$$
$$= (i_{\#}[\omega] * j_{\#}[\xi_e]) * (i_{\#}[\xi_e] * j_{\#}[\sigma])$$

y por lo tanto

$$\mu_{\#}(\theta([\omega], [\sigma])) = \mu_{\#}(i_{\#}[\omega] * j_{\#}[\xi_e]) * \mu_{\#}(i_{\#}[\xi_e] * j_{\#}[\sigma]) = [\omega] * [\sigma]$$

(Casos a) y b))

TEOREMA 1. $\pi(G , e)$ es un grupo abeliano.

De la proposición 1 se tiene :

$$i_{\#}[\omega] * j_{\#}[\sigma] = j_{\#}[\sigma] * i_{\#}[\omega]$$

de donde

$$\underbrace{\mu_{\#}(i_{\#}[\omega] * j[\sigma])}_{[\omega] * [\sigma]} = \underbrace{\mu_{\#}(j_{\#}[\sigma] * i_{\#}[\omega])}_{[\sigma] * [\omega]}$$

NOTA. i) Si G es un grupo topológico arco convexo el grupo fundamental de G en cualquier punto es abeliano (Véase [1] , pág. 51, teorema 3)

ii) El resultado dado en el teorema 1 puede demostrarse también directamente (ver apéndice)

§ 2. REVESTIMIENTOS DE GRUPOS TOPOLOGICOS

Def. 4 Sean X, $\tilde{X}$ dos espacios topológicos; Si p es una aplicación continua , $p : \tilde{X} \to X$, tal que existe una familia $\mathcal{U}$ de abiertos de X que verifica: <<Para todo U de $\mathcal{U}$, $p^{-1}(U)$ es la reunión de una familia de abiertos disyuntos de $\tilde{X}$ tales que cada uno de ellos es aplicado, por p, homeomorfamente sobre U >> diremos que p es una proyección revestimiento, en cuyo caso la pareja $(\tilde{X}, p)$ se dice un revestimiento de X. Además para todo $x \in X$, $p^{-1}(x)$ es llamado la fibra sobre x.

Trataremos a continuación de demostrar que si $(\tilde{G}, p)$ es un revestimiento de un grupo topológico G con $\tilde{G}$ conexo y localmente arco-conexo y $\tilde{e}$ es un elemento en la fibra sobre e, existe una única estructura de grupo topológico sobre $\tilde{G}$ para la cual $\tilde{e}$ es el elemento unidad y p es un homomorfismo. Para nuestro propósito utilizaremos el siguiente :

TEOREMA 2. Consideremos la siguiente situación :

$$\begin{tikzcd}
 & (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \arrow[d, "p"] \\
(Y, y_0) \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, dashed, "f'"] & (X, x_0)
\end{tikzcd}$$

en donde Y es un espacio conexo y localmente conexo por arcos, X localmente conexo, p una proyección revestimiento y f una aplicación continua tales que

$$f(y_0) = x_0 \quad , \; p(\tilde{x}_0) = x_0$$

Entonces, existe un levantamiento continuo f' de

f ($pf' = f$) si y solo si

$$f_{\#}(\pi(Y, y_0)) \subset P_{\#}(\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$$

(Véase [3] , pág. 22, teorema 6 - 1)

Se demuestra además, de manera fácil, que si f' y f'' son dos levantamientos de f, el conjunto

$$\{ y \in Y \mid f'(y) = f'(y) \}$$

que no es vacío, puesto que contiene por lo menos a y_0, es abierto y cerrado en Y y por consiguiente el levantamiento si existe es único.

<u>Proposición 3.</u> Sean G un espacio topológico con una multiplicación continua μ tal que

$$\mu(x, e) = \mu(e, x) - x$$

para todo $x \quad G$ y $p : \tilde{G} \to G$ una proyección revestimiento con $\tilde{G}$ conexo y localmente arco-conexo.

Si $\tilde{e}$ es un punto en la fibra sobre e, existe una única multiplicación continua $\tilde{\mu} : \tilde{G} \to \tilde{G}$ para la cual $\tilde{e}$ es elemento unidad.

Demostración. Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\tilde G \times \tilde G, (\tilde e, \tilde e) \arrow[r, "\tilde\mu"] \arrow[d, "p \times p"'] & (\tilde G, \tilde e) \arrow[d, "p"] \\
(G \times G, (e, e)) \arrow[r, "\mu"] & (G, e)
\end{tikzcd} \qquad (3)$$

Existe un levantamiento $\tilde\mu$ de $\mu \circ (p \times p)$ si y solo si

$$\mu_{\#} (p \times p)_{\#} \left[\pi(\tilde G \times \tilde G, (\tilde e, \tilde e)) \right] \subset p_{\#} (\pi (\tilde G, \tilde e))$$

Pero para ver que ésta condición se tiene basta verificar que si σ, τ **son dos lazos en e tales que**

$$[\sigma], [\tau] \in p_{\#}(\pi(\tilde G, \tilde e))$$ **entonces**

$$\mu_{\#}\left(i_{\#}[\sigma] * j_{\#}[\tau] \right) \in p_{\#}\left(\pi(\tilde G, \tilde e)\right)$$

pero esto se tiene inmediatamente por (3)

Comprobemos ahora que el levantamiento $\tilde\mu$ verifica

$$\tilde\mu(\tilde x, \tilde e) = \tilde x \qquad (4)$$

para todo $\tilde x \in \tilde G$.

En el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\tilde G \times \{\tilde e\} \arrow[r, dashed] \arrow[d, "p \times C_e"'] & \tilde G \arrow[d, "p"] \\
G \times \{e\} \arrow[r, "\mu_e"] & G
\end{tikzcd}$$

en donde $\mu_e = \mu|_{G \times \{e\}}$ y $C_e : \{\tilde e\} \to \{e\}$

es claro que $\mu_e \circ (p \times C_e)$ admite un levantamiento $\tilde\mu_e = \tilde\mu | \tilde G \times \{\tilde e\}$

Pero por otra parte, si se define

$$\tilde{\mu}'_e(\tilde{x}, \tilde{e}) = \tilde{x}$$

Se verifica que

$$p \circ \tilde{\mu}'_e = \mu_e (p \times C_e)$$

Como $\tilde{G}$ es conexo se debe tener entonces

$$\tilde{\mu}'_e = \tilde{\mu}_e$$

y por lo tanto

$$\tilde{\mu}(\tilde{x}, \tilde{e}) = \tilde{\mu}_e(\tilde{x}, \tilde{e}) = \tilde{\mu}'_e(\tilde{x}, \tilde{e}) = \tilde{x}$$

Obsérvese además que como el diagrama (3) es conmutativo, se tiene que dados $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{G}$ $\mu(p \times p(\tilde{x}, \tilde{y})) = \mu(p(\tilde{x})\, p(\tilde{y})) = p(\tilde{\mu}(\tilde{x}, \tilde{y}))$ (5)

o sea que p conmuta con la multiplicación en $\tilde{G}$ y en G.

<u>Proposición 4.</u> Sean G un espacio topológico con una multiplicación continua μ y $(\tilde{G}, p)$ un revestimiento de G con $\tilde{G}$ conexo y localmente arco-conexo. Si μ es asociativa, también lo es $\tilde{\mu}$.

<u>Demostración.-</u> Consideremos el siguiente diagrama :

$$\begin{tikzcd} & \tilde{G} \arrow[d, "p"] \\ \tilde{G} \times \tilde{G} \times \tilde{G} \arrow[ur, dashed, "\theta_1"] \arrow[r, "\eta_1"'] & G \end{tikzcd}$$

en donde $\eta_1(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \mu(p(\tilde{x}), \mu(p(\tilde{y}), p(\tilde{z})))$

El levantamiento de la aplicación η_1 (que existe) llamémoslo θ viene dado por

$$\theta_1(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \tilde{\mu}(\tilde{x}, \tilde{\mu}(\tilde{y}, \tilde{z}))$$

En efecto :

$$p\, O(\tilde{z}, \tilde{y}, \tilde{z}) = p\tilde{\mu}(\tilde{x}, \tilde{\mu}(\tilde{y}, \tilde{z}))$$

$$(p \times p(\tilde{x}, \tilde{\mu}(\tilde{y}, \tilde{z}))) = \mu(p(\tilde{x}), p\tilde{\mu}(\tilde{y}, \tilde{z}))$$

$$= \mu(p(\tilde{x}), \mu\, p \times p(\tilde{y}, \tilde{z})) = \mu(p(\tilde{x}), \mu(p(\tilde{y}), p(\tilde{z})))$$

Análogamente si se considera el diagrama :

$$\begin{tikzcd} & \tilde{G} \arrow[d, "p"] \\ \tilde{G}\times\tilde{G}\times\tilde{G} \arrow[ur, dashed, "\theta_2"] \arrow[r, "\eta_2"'] & G \end{tikzcd}$$

con $\eta_2(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \mu(\mu(p(\tilde{x}), p(\tilde{y})), p(\tilde{z}))$

Se puede comprobar que el levantamiento θ_2 está definido por

$$\theta_2(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \tilde{\mu}(\tilde{\mu}(\tilde{x}, \tilde{y}), \tilde{\mu}(\tilde{z}))$$

Ahora bien, como por hipótesis $\eta_1 = \eta_2$ se deberá tener que $\theta_1 = \theta_2$ (por ser levantamiento de la misma aplicación) o sea que,

$$\tilde{\mu}(\tilde{x}, \tilde{\mu}(\tilde{y}, \tilde{z})) = \tilde{\mu}(\tilde{\mu}(\tilde{x}, \tilde{y}), \tilde{z})$$

<u>Proposición 5.</u> Sea G un espacio topológico con una multiplicación continua cuyo elemento unidad es e.

Si existe, $c : G \to G$, continua que verifique

$\mu(x, c(x)) = e = \mu(c(x), x)$ para todo $x \in G$ entonces

$$c_{\#}([\omega]) = [\omega]^{-1} \qquad (6)$$

cualquiera que sea $[\omega] \in \pi(G, e)$

<u>Demostración .</u> Consideremos el producto $[\omega] * c_{\#}[\omega]$

por la proposición se tiene :

$$[\omega] * c_{\#}[\omega] = \mu_{\#}\left(i_{\#}[\omega] * j_{\#}\, c_{\#}[\omega] \right) = \mu_{\#}\left[(\omega, c\omega)\right]$$

Pero

$$\mu_{\#}\left[(\omega, c\omega)\right] = \left[\xi_e\right]$$

ya que

$$\mu(\omega(t), c\omega(t)) = e \quad \forall_t \in I$$

con lo cual queda demostrada la proposición (Teorema 1)

<u>TEOREMA 3 .</u> Sean G un grupo topológico para la operación μ y $\tilde{G}$ un espacio conexo y localmente conexo por arco

Si $(\tilde{G}, p)$ es un revestimiento de G y $\tilde{e}$ es un elemento en la fibra sobre e ; existe una única estructura de grupo topológico sobre $\tilde{G}$ para la cual $\tilde{e}$ es el elemento unidad.

<u>Demostración</u>. Sea $\tilde{\mu}$ el levantamiento de la aplicación $\mu \circ (p \times p)$ obtenido en la proposición 3. Entonces se tiene

$$\tilde{\mu}(\tilde{x}, \tilde{e}) = \tilde{x} = \tilde{\mu}(\tilde{e}, \tilde{x}) \quad \forall\, \tilde{x} \in \tilde{G}$$

y

$\tilde{\mu}$ es asociativa (proposición 4)

Queda por ver entonces que en $\tilde{G}$ existen inversos para la ley $\tilde{\mu}$.

Consideremos para ello el siguiente diagrama :

$$\begin{tikzcd}
 & & \tilde{G} \arrow[d, "p"] \\
\tilde{G} \arrow[r, "p"'] \arrow[urr, dashed, "\tilde{c}"] & G \arrow[r, "p"'] & G
\end{tikzcd} \qquad (7)$$

en donde $c(x) = x^{-1}$ para $x \in G$

Por (6) tenemos :

$$C_{\#}[p\omega] = [p\omega]^{-1} = p_{\#}[\omega^{-1}]$$

si $[\omega] \in \pi(\tilde{G}, \tilde{e})$.

y por lo tanto

$$(c \circ p)_{\#}(\pi(\tilde{G}, \tilde{e})) \subset p_{\#}(\pi(\tilde{G}, \tilde{e}))$$

de lo que se deduce que cop admite un levantamiento $\tilde{C}$

Sea ahora el diagrama

$$\begin{tikzcd} \tilde{G} \times \tilde{G} \arrow[rr, dashed] \arrow[d, "p \times p"'] & & \tilde{G} \arrow[d, "p"] \\ G \times G \arrow[r, "I_G \times c"] & G \times G \arrow[r, "\mu"] & G \end{tikzcd} \qquad (8)$$

en donde I_G designa la aplicación idéntica de G

Si $\eta = \mu \circ (I_G \times C) \circ (p \times p)$ es fácil ver que η tiene un levantamiento θ. Definiendo

$$\theta' : \tilde{G} \times \tilde{G} \to \tilde{G}$$

por $\theta'(\tilde{x}, \tilde{y}) = \tilde{\mu}(\tilde{x}, \tilde{c}(\tilde{y}))$

se tiene :

$$p\,O(\tilde{x}, \tilde{y}) = p\tilde{\mu}(\tilde{x}, \tilde{e}(\tilde{y})) = \mu\, p \times p(\tilde{x}, \tilde{e}(\tilde{y}))$$

$$= \mu(p(\tilde{x}), p\,\tilde{e}(\tilde{y}))$$

Pero por el diagrama (7)

$$\tilde{\mu}(p(\tilde{x}), p\,\tilde{c}(\tilde{y})) = \mu(p(\tilde{x}), c\,p(\tilde{y}))$$

$$= \eta(\tilde{x}, \tilde{y})$$

o sea que θ' es un levantamiento de y entonces $\theta' = \theta$, es decir

$$\theta(\tilde{x}, \tilde{y}) = \tilde{\mu}(\tilde{x}, \tilde{c}(\tilde{y}))$$

Por otra parte, si $\eta_A = \eta/_{A\tilde{G} \times \tilde{G}}$

en donde $A\tilde{G} \times \tilde{G}$ designa la diagonal de $\tilde{G} \times \tilde{G}$, η_A, tiene un levantamiento que es necesariamente $\theta|_{A\tilde{G} \times \tilde{G}}$ (Véase eldiagrama (8))

Definiendo $\theta''(\tilde{x}, \tilde{x}) = \tilde{e}$ se verifica inmediatamente que O es un levantamiento de η_A; luego:

$$\theta''(\tilde{x}, \tilde{x}) = \tilde{e} = \theta/_{A\tilde{G} \times \tilde{G}}(\tilde{x}, \tilde{x}) = \tilde{\mu}(\tilde{x}, \tilde{c}(\tilde{x}))$$

Conclusión. Hemos mostrado que $\tilde{G}$ es un grupo para la operación $\tilde{\mu}$ para el cual $\tilde{e}$ es el elemento identidad y $\tilde{x}^{-1} = \tilde{c}(\tilde{x})$ para $\tilde{x} \in \tilde{G}$.

Además se ha mostrado que la aplicación

$$\begin{aligned} \tilde{G} \times \tilde{G} &\longrightarrow \tilde{G} \\ (\tilde{x}, \tilde{y}) &\longmapsto \tilde{\mu}(\tilde{x}, \tilde{y}^{-1}) \end{aligned}$$

es continua.

Por lo tanto, $(\tilde{G}, \tilde{u})$ es un grupo topológico.

TEOREMA 4. La aplicación p del teorema anterior es un homomorfismo de grupo topológico y el núcleo de p es un subgrupo normal discreto de $\tilde{G}$ que está contenido en el centro de $\tilde{G}$.

Demostración. El hecho de que p es un homomorfismo resulta inmediatamente de la conmutatividad del diagrama (3).

De otro lado es claro que

$$\tilde{H} = \{\tilde{x} \in \tilde{G} \mid p(\tilde{x}) = e\}$$

es un subgrupo normal de $\tilde{G}$ que resulta discreto por ser la fibra en e.

Finalmente, veamos que $\tilde{H}$ está contenido en el centro de $\tilde{G}$

Sean $\tilde{x} \in \tilde{H}$ y V una vecindad de $\tilde{x}$ en $\tilde{G}$ tales que $V \cap \tilde{H} = \{\tilde{x}\}$

Tomemos W una vecindad de $\tilde{e}$ en $\tilde{G}$ con la condición de que

$W \tilde{x} W^{-1} \subset V$

Como $\tilde{H}$ es normal tenemos

$$\tilde{y} \; \tilde{x} \; \tilde{y}^{-1} = \tilde{x}$$

para todo $\tilde{y} \in W$

Ahora bien, como los elementos de $\tilde{G}$ que conmutan con $\tilde{x}$ forman un subgrupo $\tilde{G}' \subset \tilde{G}$ se tiene que $W \subset \tilde{G}'$ y como $\tilde{G}$ es conexo, $\tilde{G}' = \tilde{G}$ ($*$)

($*$) Si $\tilde{G}$ es conexo, $\tilde{G}$ es engendrado por toda vecindad de $\tilde{e}$.

A P E N D I C E

Mostraremos en este apéndice que si G es un espacio topológico dotado de una multiplicación continua u y e es un elemento de G tal que

$$u\ (x\ ,\ e)\ =\ u\ (e\ ,\ x)\ =\ x$$

para todo $x \in G$, entonces dados dos elementos cualesquiera $[\omega]$, $[\sigma]$ $\in \pi\ (G,\ e)$

se tiene

$$[\omega] * [\sigma] * [\omega^{-1}] * [\sigma^{-1}] = [\xi_e]$$

Designemos con I el intervalo $[0,\ 1]$ y consideremos la aplicación g de I en la frontera de I x I definida por

$$g(t) = \begin{cases} (8\ t,\ 0) & ,\ 0 \leq t \leq 1/8 \\ (1,\ 8(t - 1/8)) & 1/8 \leq t \leq 1/4 \\ (1 - 4(t - 1/4)\ ,\ 1) & 1/4 \leq t \leq 1/2 \\ (0,\ 1 - 2\ (t - 1/2))\ , & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Claramente g es continua y $g|(0,\ 1)$ es homeomorfismo de $(0,\ 1)$ en $F_r\ (I \times I - \{(0,\ 0)\}\ )$.

Sea ahora $f : F_r\ (I \times I) \rightarrow G$ definida de manera que

$$f|\ I \times \{0\} = \omega\ , \qquad f|\ \{1\} \times I = \sigma$$

$$f|\ I \times \{1\} = \omega^{-1}\ , \qquad f|\ \{0\} \times I = \sigma^{-1}$$

Notando τ la función f o g tenemos $(f \circ g)(t) = \tau\ (t) =$ $(\omega * \sigma * \omega^{-1} * \sigma^{-1})\ (t)$

Ahora bien se sabe que f puede extenderse a I x I si y solo si f o g es homótopa al lazo constante en f(o, o) = e

(Véase [1]) pero, definiendo F por

$$F(t, t') = u(\tau(t), \tau(t'))$$

para t, t' $\in$ I , se verifica inmediatamente que F es bien una extensión de f

Por consiguiente aplicando el resultado enumerado se recibe

$$\omega * \sigma * \omega^{-1} * \sigma^{-1} \sim \xi_e .$$

R E F E R E N C I A S

[1] Algebraic Topology, Edwin H; Spanier, Mc graw Hill

[2] Topología, John G Hocking y Gail S. Young, Editorial Reverté 1966

[3] Lectures on Algebraic Topology, Marvin Greenberg, W. A. Benjamin Inc 1967

[4] Algebraic Topology, William S. Massey, Harbrace College Mathematics Series 1967

Departamento de Matemáticas
Universidad Nacional

(Recibido en Julio de 1.969)