Boletín de Matemáticas
Nueva Serie, Volumen II (1995), pp.173-179

SOBRE LA EXISTENCIA Y ESTABILIDAD DE UN SISTEMA NO LINEAL DE TIPO PARABÓLICO

MAURICIO BOGOYA(*)

Resumen. En este artículo se estudia la existencia y estabilidad de las soluciones de un sistema parabólico no lineal, el cual describe el fenómeno de reacción-difusión de flujo de neutrones en el interior de un reactor de fisión.

Abstract. The existence and stability of solutions of a non-linear parabolic system is studied. The system describes reaction-diffusion in a neutron flow.
Keywords. Non-linear parabolic system, existence, stability, reaction-diffusion, operator semigroups.

A Esperanza Hurtado

1. Preliminares

El sistema que estudiaremos es el siguiente:

(*)Texto recibido 15/1/96, revisado 15/3/97. Mauricio Bogoya, Departamento de Matemáticas, Universidad de los Andes; e-mail: mbogoya@zeus.uniandes.edu.co.

Typeset by $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}\mathcal{S}$-TEX

$$
(1.1)\begin{cases}
\frac{\partial}{\partial t}u_i(x,t) - \Delta u_i(x,t) = \\
\qquad \sum_{j=1}^{m} H_{ij}(x, u_{m+1}(x,t))u_j(x,t), \\
\qquad \text{en } \ \Omega \times (0,\infty), \ \ i = 1,2,\cdots,m, \\
\frac{\partial}{\partial t}u_{m+1}(x,t) - \Delta u_{m+1}(x,t) + C(x)u_{m+1}(x,t) = \\
\qquad \sum_{j=1}^{m} G_j(x, u_{m+1}(x,t))u_j(x,t), \quad \text{en } \ \Omega \times (0,\infty), \\
\qquad u_i(t,x) = 0 \quad \text{en} \quad \partial\Omega \times (0,\infty), \\
\qquad u_i(x,0) = u_{i_0}(x) \, \text{en} \, \overline{\Omega}, \quad i = 1,2,\cdots,m+1,
\end{cases}
$$

donde Ω es un dominio acotado en $\mathbb{R}^n$, n entero positivo, con frontera $\partial\Omega$ de clase $C^{2+\alpha}$, $0 < \alpha < 1$. Las funciones G_j, H_{ij}, son continuas en $\Omega \times \mathbb{R}$ para $i, j = 1,2,\cdots,m$. El dominio Ω representa el interior de un reactor, u_{m+1} denota la temperatura en el interior del reactor, y Δ es el laplaciano

$$\Delta := \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}.$$

Sobre este sistema se han realizado varias investigaciones ([3], [5], [7]). En [3] y [7] la estabilidad no ha sido analizada. En [5] se determinó un estado positivo de equilibrio de (1.1)suponiendo que las tasas de dispersión y reacción son en cierto sentido mayores que el primer valor propio principal de Δ en Ω. En [4] se estudia (1.1) con condiciones más débiles que las adoptadas en los artículos anteriores en donde H_{ij}, G_j son acotadas en $\Omega \times \mathbb{R}$, para $i, j = 1,2,\cdots,m$.

En este artículo, supondremos que H_{ij}, G_j no son necesariamente acotadas en $\Omega \times \mathbb{R}$, para $i, j = 1,2,\cdots,m$ y determinaremos una constante $L_0 > 0$ para la cual el origen es un estado de equilibrio asintóticamente estable de (1.1), esto es: para algunas condiciones iniciales en determinada vecindad de cero, las soluciones de (1.1) tenderán a cero en forma exponencial.

2. Ecuación de evolución asociada al sistema

Utilizaremos las siguientes notaciones:

$\mathbb{E} = \{u = Col(u_1, u_2, \cdots, u_{m+1}) | u_i \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}), u_i|_{\partial\Omega} \equiv 0, i = 1,2,\cdots,m+1\}$,

$\mathbb{F} = \{u = Col(u_1, u_2, \cdots, u_{m+1}) | u_i \in C^{\alpha}(\overline{\Omega}), i = 1,2,\cdots,m+1\}$,

$\mathbb{P} = \{u = Col(u_1, u_2, \cdots, u_{m+1}) | u \in \mathbb{F}, u_i \geq 0 \, \text{en} \, \overline{\Omega}, i = 1,2,\cdots,m+1\}$,

$X = \{u = Col(u_1, u_2, \cdots, u_{m+1}) | u \equiv 0 \, \text{en} \, \partial\Omega, u \in C(\overline{\Omega})\}$,

$A = \Delta = Col(\Delta, \Delta, \cdots, \Delta - C)$ (con $m+1$ veces Δ)

$D(A) = \{u | u \in w^{2,p}(\Omega), p > N, Au \in X, Au \equiv 0, \text{ en} \, \partial\Omega\}$.

Es conocido [6, p.217, teor.7.3.7] que A es el generador infinitesimal de un semigrupo analítico sobre X. Denotemos por $T(t)$ a este semigrupo para $t \geq 0$.

En el lema (3.1) demostraremos que existe $M_4 > 0$ tal que:

$$||T(t)||_{L(X,X)} \leq M_4 e^{-\lambda_0 t}$$

para todo $t \geq 0$ y $\lambda_0 \geq 0$. Sea

$$f_i(x,u) = \sum_{i=1}^{m} H_{ij}(x, u_{m+1}) u_j,$$

para $i = 1, 2, \cdots, m$ y $u \in X$,

$$f_{m+1}(x,u) = \sum_{j=1}^{m} G_j(x, u_{m+1}) u_j,$$

y sea

$$F(x,u) = Col = (f_1(x,u), f_2(x,u), \cdots, f_{m+1}(x,u))$$

para $u \in X$. Con las notaciones anteriores se tiene que la ecuación de evolución asociada al sistema parabólico no lineal (1.1) es:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{du}{dt} - Au = F(\cdot, u) & \text{en} \quad (0,\infty), \\ u(0) = u_0, \end{array} \right. \tag{2.1}$$

donde $u_0 = Col(u_{10}, u_{20}, \cdots, u_{(m+1)0})$.

3. Existencia y estabilidad

Se introducen las siguientes hipótesis:

B_1) Existen dos constantes $M_1 > 0$ y $\sigma > 0$ tales que:

$$|H_{ij}(x,n)| \leq M_1 n^{\sigma},$$

con $i, j = 1, 2, \cdots, m$, para $(x,n) \in \overline{\Omega} \times (0,\infty)$,

$$|G_j(x,n)| \leq M_1 n^{\sigma},$$

con $i, j = 1, 2, \cdots, m$, para $(x,n) \in \overline{\Omega} \times (0,\infty)$,

B_2) Para cada $\rho > 0$ existe una constante $C(\rho) > 0$ tal que: si n_1, $n_2 \in [0,\infty)$ y $0 \leq n_k \leq \rho$, $k = 1, 2$, entonces

$$|H_{ij}(x,n_1) - H_{ij}(x,n_2)| \leq C(\rho)|n_1 - n_2|,$$

para $i, j = 1, 2, \cdots, m$,

$$|G_j(x, n_1) - G_j(x, n_2)| \leq C(\rho)|n_1 - n_2|,$$

para $i, j = 1, 2, \cdots, m$, para todo $x \in \overline{\Omega}$.

B_3) Existen dos constantes $r > 0$, $L > 0$ tales que:

$$L > r + \frac{M_4 M_1}{\lambda_0} L^q,$$

donde $q = 1 + \sigma$, $\sigma > 0$, $M_1 = (m+1)m$, y M_4, λ_0 son dados por el lema (3.1).

Las constantes dadas en (B_3) existen, ya que si se toma

$$L = \left(\frac{\lambda_0}{q M_1 M_4}\right)^{1/\sigma} > 0$$

entonces se tiene

$$(L^{q-1}) \frac{q M_1 M_4}{\lambda_0} = 1,$$

de donde

$$(L^q) \frac{q M_1 M_4}{\lambda_0} = L > (L^q) \frac{M_1 M_4}{\lambda_0},$$

ya que $q = 1 + \sigma > 1$. Por lo tanto existe $r > 0$ tal que

$$L > r + (L^q) \frac{M_1 M_4}{\lambda_0}.$$

Lema 3.1. *Para cada $t \geq 0$, $T(t): X \to X$ es un operador lineal compacto y existe una constante M_4 tal que:*

$$\|T(t)\|_{L(X,X)} \leq M_4 e^{-\lambda_0 t}, \tag{3.2}$$

para todo $t \geq 0$.

La demostración se puede ver en [2].

A continuación enunciaremos y demostraremos el teorema principal de este artículo.

Teorema 3.2. *Existe $L_0 > 0$ tal que si $u_0 \in D(A)$ y $\|u_0\|_X \leq \min\{L_0, r/M_4\}$, entonces el problema (2.1) tiene una única solución*

$$u(t) \in C^1((0, r), X) \cap C([0, r], X)$$

tal que

(3.3) $$\|u(t)\|_X \leq L_0 e^{-\lambda_0 t} \leq L e^{-\lambda_0 t}.$$

Demostración. Se define la función:

$$\rho(s) = Cs^q + r,$$

donde $C = M_1 M_4/\lambda_0$. Por la hipótesis (B_3) se tiene que: $\rho(L) = CL^q + r < L$, y además $\rho(0) = r > 0$. La función $\rho(s)$ es derivable con derivada

$$\rho'(s) = qCs^{q-1},$$

$q - 1 > 0$, $\rho'(s) > 0$ para todo $s \geq 0$. De lo anterior se deduce que $\rho'(s)$ es una función creciente y $\rho'(0) = 0$; entonces existe $s_0 > 0$ tal que $\rho'(s_0) = 1$, esto es:

$$\rho'(s_0) = qC{s_0}^{q-1} = 1,$$

de donde

$$s_0 = \left(\frac{1}{qC}\right)^{1/(q-1)}.$$

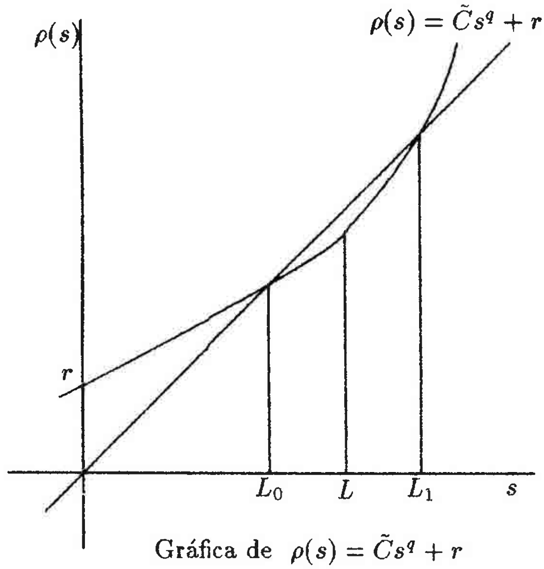
Si $s > s_0$ entonces $\rho'(s) > 1$. Si $s < s_0$ entonces $\rho'(s) < 1$. Por lo anterior y por el hecho de que $\rho(L) < L$ existen $L_1 > L_0 > 0$ tales que:

(3.4) $$\rho(s) < s \quad \text{si} \quad L_0 < s < L_1$$

y

(3.5) $$\rho(s) > s \quad \text{si} \quad 0 \leq s \leq L_0 \quad \text{o} \quad s > L_1.$$

El siguiente gráfico muestra el comportamiento de $\rho(s)$.



Gráfica de $\rho(s) = \tilde{C}s^q + r$

Sea $u_0 \in D(A)$ y $||u_0||_X \leq \min\{r/M_4, L_0\}$. Supongamos que $u(t)$ es la solución de (2.1) con $u(0) = u_0$; entonces por la fórmula de variación de constantes se tiene:

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s, u(s))ds. \tag{3.6}$$

Por (3.6), el lema (3.1) y la hipótesis (B_2) se tiene:

$$||u(t)||_X \leq M_4 e^{-\lambda_0 t}||u_0||_X + M_4 \int_0^t e^{-\lambda_0(t-s)} M_1 ||u(s)||_X^q ds. \tag{3.7}$$

Se define

$$h(t) = Sup_{0\leq s\leq t}\{||u(s)||_X e^{\lambda_0 s}\},$$

De (3.7) obtenemos que: $Sup_{0\leq s\leq t}\{||u(s)||_X e^{\lambda_0 s}\} \leq M_4||u_0||_X + M_1 M_4$ $Sup_{0\leq\tau\leq t}\{e^{\lambda_0\tau}\int_0^\tau e^{-\lambda_0(\tau-s)}||u(s)||_X^q ds\}$, y entonces

$$h(t) \leq r + C(h(t))^q \tag{3.8}$$

donde $C = M_1 M_4/\lambda_0$. De la definición de $\rho(s)$ y de (3.8) obtenemos:

$$h(t) \leq \rho(h(t)), \quad h(0) = ||u_0||_X \leq L_0. \tag{3.9}$$

De (3.5) y por ser $h(t)$ continua y $h(0) \leq L_0$, se tiene que $0 \leq h(t) \leq L_0$, para todo $t \geq 0$, por lo tanto

$$||u(t)||_X \leq L_0 e^{-\lambda_0 t} \leq L e^{-\lambda_0 t}, \tag{3.10}$$

para todo $t \geq 0$. De lo anterior, si $u_0 \in D(A)$, $||u_0||_X \leq \min\{r/M_4, L_0\}$ y $u(t)$ es una solución a priori de (2.1), entonces $u(t)$ satisface (3.10).

A continuación demostraremos la existencia de la solución de (2.1).

Sean $u = (u_1, u_2, \cdots, u_{m+1})$, $v = (v_1, v_2, \cdots, v_{m+1}) \in X$, tales que:

$$||u||_X \leq \rho, \quad ||v||_X \leq \rho, \tag{3.11}$$

y

$$f_i(x,u) = \sum_{i=1}^m H_{ij}(x, u_{m+1})u_j, \quad f_{m+1}(x,u) = \sum_{j=1}^m G_j(x, u_{m+1})u_j.$$

Por las hipótesis (B_1) y (B_2) obtenemos

$$\begin{aligned}||f_i(\cdot,u) - f_i(\cdot,v)|| &\leq \sum_{i=1}^m ||H_{ij}(\cdot)||_\infty ||u_j - v_j|| \\ &+ \sum_{j=1}^m ||H_{ij}(\cdot, v_{m+1}) - H_{ij}(\cdot, u_{m+1})||_X ||v_j|| \\ &\leq M_1\rho^\sigma ||u-v||_\infty + \sum_{j=1}^p \rho M_1 ||u_{m+1} - v_{m+1}||_X \\ &\leq C(\rho)||u-v||_\infty,\end{aligned} \tag{3.12}$$

para $j = 1, 2, \cdots, m$. Análogamente se tiene que:

$$\|f_{m+1}(\cdot, u) - f_{m+1}(\cdot, v)\| \leq C(\rho)\|u - v\|_{\infty}. \tag{3.13}$$

De (3.12) y (3.13), en combinación con el hecho de que la solución a priori de (2.1) satisface (3.10) y además se satisface

$$u(t) - v(t) = \int_0^t T(s-t)[f(s, u(s)) - f(s, v(s))]ds \tag{3.14}$$

y por un resultado conocido [1, p.14, prop.3.4], obtenemos la existencia de la solución de (2.1) para

$$\|u_0\|_X \leq \min\{r/M_4, L_0\}.$$

Esto termina la demostración. □

Referencias

1. H.Amann, "Periodic solutions of semilinear parabolic equations", en: *Non linear analysis (volume in honor of E.H. Rothe)*, New York: Academic Press, 1978.
2. M. Bogoya, *Sobre la existencia y estabilidad de un sistema no lineal de tipo parabólico*, Tesis de Magister, Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad Nacional, Bogotá, 1995.
3. A. Leung, G.S. Chen, "Elliptic and parabolic system for neutron fission and difussion", J. Math. Anal. Appl. 120 (1986).
4. L.S. Ortega, "Estabilidad de las soluciones de un sistema parabólico no lineal", Reporte interno No.34 (1993), Unidad de Investigación, Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad Nacional, Bogotá.
5. L.S. Ortega, "On the Leung-Chen feedback model for nuclear fission", Nonlinear Analysis Theory Method and Appl. 18 (1992), 353-360.
6. A. Pazy, *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, New York: Springer, 1983.
7. B.E. Villa, "Un problema de valores propios para un sistema parabólico periódico y aplicaciones", Revista Iberoamericana 8 (1992).