Boletín de Matemáticas
Nueva Serie, Volumen II (1995), pp.141-165

CONJUNTO DE CONVERGENCIA DE LA FÓRMULA DE RECURRENCIA Y CONJUNTO TERNARIO DE CANTOR

YU TAKEUCHI(*)

Resumen. Se estudian los problemas de convergencia del sistema dinámico discreto general $X_{n+1} = f_n(X_n)$, donde la función de correlación depende de n. Se presentan numerosos ejemplos explícitos, y se estudian casos en que el conjunto de convergencia coincide con el ternario de Cantor.

Abstract. Several explicit examples of discrete general dynamical systems $X_{n+1} = f_n(X_n)$ are considered, and convergence problems are studied. The article includes cases in which Cantor's ternary set can be proved to be the convergence dominion.
Keywords. Discrete general dynamical systems, convergence, Cantor's ternary set.

1. Introducción

Sea (X_n) la solución de la fórmula de recurrencia de primer orden:

(1) $$X_{n+1} = f_n(X_n) \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

Supongamos que

(i) $f_n : I(\subseteq \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua (I es un intervalo),
(ii) la sucesión de funciones $(f_n(x); n = 1, 2, 3, \cdots)$ converge uniformemente en I a una función límite $f(x)$,
(iii) $f(x)$ tiene un punto fijo L en I, y $f(x)$ es derivable en L.

(*)Texto recibido 6/8/96, revisado 3/2/97. Yu Takeuchi, Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad Nacional de Colombia.

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TeX

Sabemos que si $|f'(L)| \neq 1$ entonces existe por lo menos una solución (X_n) de la fórmula (1) que converge al límite L (ver [1]). En el presente trabajo se obtienen criterios de convergencia de la solución (X_n) de la fórmula de recurrencia (1) a partir de los comportamientos de las funciones $(f_n(x); n = 1,2,3,\cdots)$ sin suponer la convergencia uniforme de la sucesión de funciones $(f_n; n = 1,2,3,\cdots)$; por esta razón sus resultados son aplicables a los casos en los que la sucesión de funciones $(f_n(X); n = 1,2,3,\cdots)$ es divergente, o ésta converge a la función idéntica.

Un conjunto $T(\subseteq I)$ se llama *conjunto de convergencia* de la fórmula de recurrencia (1) si

$$X_1 \in T \quad \text{si y sólo si la solución} \quad (X_1, X_2, X_3, \cdots) \quad \text{converge.}$$

En la sección 2 de este artículo se trata el caso en que cualquier solución de la fórmula converge, o sea que el conjunto de convergencia es igual al intervalo I, aunque las soluciones puedan converger a varios límites diferentes.

En la sección 3 se trata el caso en que el conjunto de convergencia de la fórmula de recurrencia es un conjunto cerrado no vacío, que puede ser un conjunto unitario, o un intervalo cerrado, en algunos casos similar al conjunto ternario de Cantor (fractal de dimensión 1).

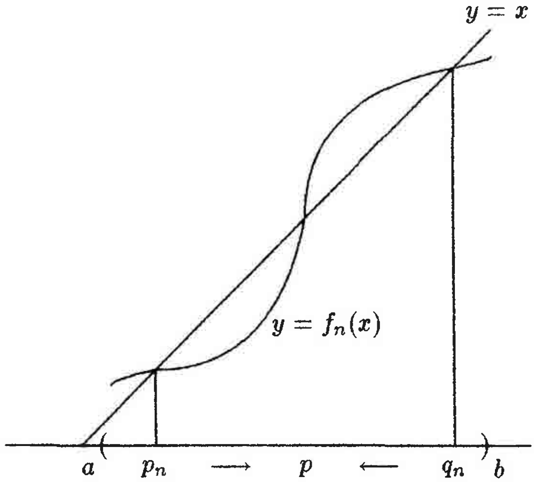
En la sección 4 se presentan las situaciones en que el conjunto de convergencia de la fórmula de recurrencia puede ser vacío, o puede ser fractal de dimensión uno; se muestra un ejemplo donde el conjunto de convergencia es precisamente igual al conjunto ternario de Cantor en el sentido clásico.

2. Primer caso, convergencia de cualquier solución de la fórmula de recurrencia

Teorema 1. *Consideremos la fórmula de recurrencia de primer orden:*

$$X_{n+1} = f_n(X_n)$$
$$f_n : I = (a,b) \longrightarrow \mathbb{R} \quad (n = 1,2,3,\cdots),$$

donde las funciones $f_n(x)$ $(n = 1,2,3,\cdots)$ satisfacen las siguientes condiciones $(Fig.1)$:



$(Fig.1)$

(i) *$x < f_n(x) < q_n$ si $x < p_n$, y $p_n < f_n(x) < x$ si $x > q_n$, donde p_n es el mínimo punto fijo de $f_n(x)$, q_n es el máximo punto fijo de $f_n(x)$ en el intervalo $I = (a,b)$, y $(p_n),(q_n) \longrightarrow p \in \bar{I} = [a,b]$.*

(ii) *$p_n \leqslant f_n(x) \leqslant q_n$ en $p_n \leqslant x \leqslant q_n$.*

Entonces, dado cualquier $X_1 \in I$ la solución $(X_n; n = 1,2,3,\cdots)$ converge en $\bar{I} = [a,b]$.

Observación 1. El dominio I de las funciones $f_n(x)$ $(n = 1,2,3,\cdots)$ puede ser otro tipo de intervalo, por ejemplo, $[a,b], (-\infty,b]$, etc. *Observación 2.* En el teorema 1 no es necesario suponer la continuidad de las funciones $f_n(x)$ $(n = 1,2,3,\cdots)$ en I.

Demostración.

I. Si $X_k \in I$ entonces $X_{k+1} \in I$. En efecto, si $X_k > q_k$ entonces $p_k < f_k(X_k) = X_{k+1} < X_k$; si $X_k < p_k$ entonces $X_k < f_k(X_k) = X_{k+1} < q_k$, y si $p_k \leqslant X_k \leqslant q_k$ entonces $p_k \leqslant f_k(X_k) = X_{k+1} \leqslant q_k$, por lo tanto se tiene que $X_{k+1} \in I$. Por inducción se obtiene:

(2) $$\text{si} \quad X_1 \in I \quad \text{entonces} \quad X_n \in I \quad \text{para todo } n.$$

II. Supongamos que la sucesión (X_n) no converge al límite p, o sea que existe $\epsilon > 0$ (podemos suponer que $(p-\epsilon, p+\epsilon) \subset I$) tal que:

(3) $$\text{para cualquier } m \text{ existe} \quad k \geqslant m \quad \text{con} \quad X_k \notin (p-\epsilon, p+\epsilon).$$

Por otra parte, como $(p_n),(q_n) \longrightarrow p$ entonces existe N tal que:

$$(4) \qquad p_n, q_n \in (p-\epsilon, p+\epsilon) \quad \text{para todo } n \geqslant N.$$

Tenemos que $X_N \notin (p-\epsilon,p+\epsilon)$. En efecto, si $X_N \in (p-\epsilon,p+\epsilon)$ entonces se tendría que $X_k \in (p-\epsilon,p+\epsilon)$ para todo $k \geqslant N$ (por un razonamiento similar a I), lo cual es absurdo.

Supongamos que $X_N \geqslant p+\epsilon$. Como $X_N > p-\epsilon$ entonces $X_n > p-\epsilon$ para todo $n \geqslant N$ (por un razonamiento similar a I). Se demuestra que $X_n \geqslant p+\epsilon$ para todo $n \geqslant N$. En efecto, si $X_m < p+\epsilon$ para algún $m > N$ entonces $X_m \in (p-\epsilon,p+\epsilon)$, luego $X_k \in (p-\epsilon,p+\epsilon)$ para todo $k \geqslant m$, y se contradice la hipótesis (3).

De la desigualdad $X_n \geq p+\epsilon > q_n$ para todo $n \geqslant N$, se tiene que $X_{n+1} = f_n(X_n) < X_n$ para todo $n \geqslant N$, así que la sucesión $(X_N, X_{N+1}, X_{N+2}, \cdots)$ es decreciente y acotada inferiormente por $p+\epsilon$, por lo tanto existe el límite $\lim_{n\to\infty} X_n \geq p+\epsilon$.

De la misma manera, si $X_N \leq p-\epsilon$ entonces la sucesión (X_n) es creciente a partir del término X_N, y acotada por $p-\epsilon$, por lo tanto existe el límite: $\lim_{n\to\infty} X_n (\leq p-\epsilon)$.

Ejemplo 1. $X_{n+1} = f_n(X_n) = a_n X_n + b_n$, donde $(b_n) \longrightarrow 0$ y $a_n = 1/2$ si n es impar, $a_n = 1/3$ si n es par.

(i) $p_n = \frac{b_n}{1-a_n}$ es único punto fijo de $f_n(x) = a_n x + b_n$ en $\mathbb{R}$, y $\lim_{n\to\infty} p_n = 0$.

(ii) $p_n > f_n(x) > x$ si $x < p_n$, $p_n < f_n(x) < x$ si $x > p_n$ ya que $0 < f_n'(x) = a_n < 1$.

Por el teorema 1, dado cualquier X_1 la solución $(X_n; n = 1,2,3,\cdots)$ converge. La fórmula de recurrencia para la sucesión (X_n) es de primer grado, por lo tanto se obtiene la siguiente solución general ([2],[3]):

$$\begin{aligned} X_{n+1} =& (a_1 a_2 \cdots a_n) \cdot \left[X_1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{a_1 a_2 \cdots a_k} \right] \\ \overrightarrow{n \to \infty} & \qquad \lim_{n\to\infty} (a_1 a_2 \cdots a_n) \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{a_1 a_2 \cdots a_n}. \end{aligned}$$

Tomando $A_n = \frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_n}$, $A_0 = 0$, tenemos:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(a_1a_2\cdots a_n)\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k}{a_1a_2\cdots a_k} &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{A_n}\cdot\sum_{k=1}^{n}A_k\cdot b_k\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}A_kb_k}{\sum_{k=1}^{n}(A_k-A_{k-1})}\\ &= \lim_{k\to\infty}\frac{A_kb_k}{A_k-A_{k-1}} \quad \text{(L'Hôpital)}\\ &= \lim_{k\to\infty}\frac{b_k}{1-a_k} = 0 \quad (= \lim_{n\to\infty}p_n).\end{aligned}$$

Esto es, la sucesión (X_n) converge al límite 0, dado cualquier valor de X_1. Nótese que la sucesión de funciones $(f_n(x); n = 1,2,3,\cdots)$ es divergente, para todo $x \neq 0$.

Ejemplo 2. $X_{n+1} = f_n(X_n) \quad n = 1,2,3\cdots,$

$$\text{donde} \quad f_n(x) = a_nx + b_n, \quad 0 < a_n < 1, \quad a_n \longrightarrow 1.$$

Supongamos que $\prod_{k=1}^{\infty} a_k$ converge ($\neq 0$) y $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{1-a_n} = L$ (existe).

(i) $p_n = \frac{b_n}{1-a_n}$ es único punto fijo de $f_n(x)$ en $\mathbb{R}$, y $\lim_{n\to\infty} p_n = L$.

(ii) $p_n > f_n(x) > x$ si $x < p_n$; $p_n < f_n(x) < x$ si $x > p_n$ ya que $0 < f_n'(x) = a_n < 1$.

Por el teorema 1, dado cualquier X_1 la solución (X_n) converge. Como la fórmula de recurrencia para (X_n) es de primer grado, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} X_n = \left(\prod_{k=1}^{\infty} a_k\right)\left[X_1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{a_1a_2\cdots a_k}\right]. \tag{5}$$

La convergencia del producto infinito $\prod_{k=1}^{\infty} a_k$ garantiza que la serie $\sum_{k=1}^{\infty}(1-a_k)$ converge; además, de la condición $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{1-a_n} = L$, se tiene que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ converge absolutamente, por lo tanto la serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{a_1a_2\cdots a_k} \qquad \text{converge absolutamente.}$$

De (5) se ve que el valor $\lim_{n\to\infty} X_n$ depende del valor de X_1, aún más, la sucesión (X_n) puede converger a cualquier valor si se escoge adecuadamente el valor de X_1. Especialmente, si $X_1 = \frac{L}{\prod_{k=1}^{\infty} a_k} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{a_1a_2\cdots a_k}$ entonces $(X_n) \longrightarrow L = \lim_{n\to\infty} p_n$.

Ejemplo 3. En el caso del ejemplo 2, supongamos que $\prod_{k=1}^{\infty} a_k = 0$ (el producto infinito diverge a 0) y $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{1-a_n} = L$ (existe). Por el teorema 1, dado cualquier X_1 la sucesión (X_n) converge.

Por el mismo cálculo usado en el ejemplo 1 se tiene:

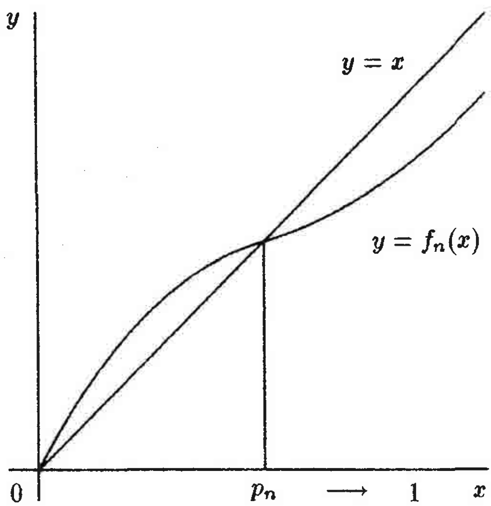
$$\lim_{n\to\infty} X_n = \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{1-a_n} = L,$$

esto es, la sucesión (X_n) converge al límite L independientemente de la escogencia del valor de X_1. Nótese que en los ejemplos 2 y 3 la sucesión de funciones $(f_n(x))$ converge uniformemente a la función idéntica $f(x) = x$.

Ejemplo 4. Consideremos la sucesión (X_n) dada por la fórmula de recurrencia

$$X_{n+1} = \frac{n^2}{(n+1)^2} X_n + \frac{2n}{(n+1)^2} \sqrt{X_n} \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots) \tag{7}$$

con $X_1 > 0$ $(Fig.2)$.



$(Fig.2)$

La función $f_n(x) = \frac{n^2}{(n+1)^2} x + \frac{2n}{(n+1)^2}\sqrt{x}$ tiene único punto fijo $p_n = \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^2$ en $(0, \infty)$, y $\lim_{n\to\infty} p_n = 1$ $(= p)$. Además: $p_n > f_n(x) > x$ si $x < p_n$, y $p_n < f_n(x) < x$ si $x > p_n$.

Por el teorema 1, dado cualquier $X_1 > 0$ la solución $(X_n; n = 1, 2, 3, \cdots)$ converge en $(0, \infty)$. Sean

$$b_n = \frac{2n}{(n+1)^2}\sqrt{X_n}, \qquad \lim_{n\to\infty} X_n = L,$$

entonces la fórmula de recurrencia (7) puede escribirse como sigue:

$$X_{n+1} = \frac{n^2}{(n+1)^2}X_n + b_n \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots).$$

Como $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = \prod_{n=1}^{\infty}(1 - \frac{2n+1}{(n+1)^2}) = 0$ (diverge a 0), entonces por el ejemplo 3 se tiene:

$$\lim_{n\to\infty} X_n = \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{1 - n^2/(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{2n+1}\sqrt{X_n} = \sqrt{L}.$$

Pero como $\lim_{n\to\infty} X_n = L$ entonces $L = \sqrt{L}$, o sea, $L = 1$ (ya que $L \in (0, \infty)$). Esto es, la sucesión (X_n) converge al límite $1 (= \lim_{n\to\infty} p_n)$, independientemente de la escogencia del valor de $X_1 > 0$. Nótese que si $X_1 = 0$ entonces la solución de la fórmula de recurrencia (7) es la sucesión nula $(0, 0, 0, \cdots)$.

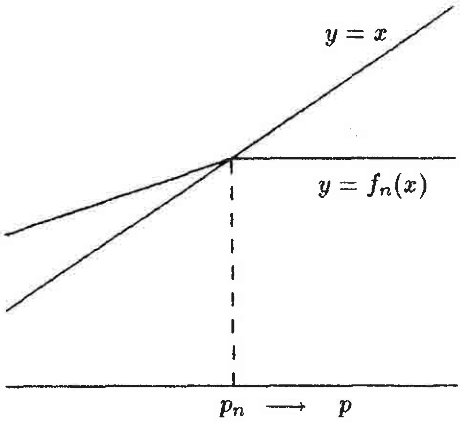
Cuando la sucesión de funciones $(f_n(x); n = 1, 2, 3, \cdots)$ converge uniformemente a la función límite $f(x)$, entonces se tiene que $p_n \longrightarrow p$ y $f_n(p_n) \longrightarrow f(p)$, en consecuencia $f(p) = p$, esto es, p es un punto fijo de la función límite $f(x)$. Por esta razón, es probable que existan soluciones (X_n) de la fórmula de recurrencia (1) que converjan al límite $p = \lim_{n\to\infty} p_n$, (en el caso de los ejemplos 1-4). Sin embargo, en el siguiente ejemplo se muestra un caso en el que no existe solución (X_n) que converge al límite $p = \lim_{n\to\infty} p_n$, a pesar de que todas las soluciones (X_n) convergen.

Ejemplo 5. Sea (p_n) una sucesión creciente tal que

$$p_n \longrightarrow p, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(p - p_n) = +\infty \qquad \text{(por ejemplo, } p_n = p - 1/n).$$

Se define $f_n(x)$ como sigue:

$$f_n(x) = \begin{cases} (1 - (\frac{1}{2})^n)x + (\frac{1}{2})^n p_n & \text{si} \quad x \le p_n \\ (\frac{1}{2})^n x + (1 - (\frac{1}{2})^n)p_n & \text{si} \quad x \ge p_n. \end{cases} \qquad (Fig.3)$$



$(Fig.3)$

Evidentemente la función $f_n(x)$ satisface todas las condiciones del teorema 1. Consideremos la sucesión (X_n) dada por la fórmula de recurrrencia

$$X_{n+1} = f_n(X_n) \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots). \tag{8}$$

(i) Si $X_n \geq p$ entonces existe $m(> n)$ tal que $X_m < p$. En efecto, si $X_k \geq p$ para todo $k \geq n$, entonces se tendría: $X_{k+1} = X_k - (1 - (\frac{1}{2})^k)(X_k - p_k) \leq X_k - (1 - (\frac{1}{2})^k)(p - p_k)$ para todo $k \geq n$. Sumando la desigualdad anterior con respecto a k, desde $k = n$ hasta $k = \infty$, se tendría: $\lim_{k\to\infty} X_k = X_\infty \leq X_n - \sum_{k=n}^{\infty}(1 - (\frac{1}{2})^k)(p - p_k) = -\infty$, lo cual es absurdo, por lo tanto debe existir algún $m(> n)$ tal que $X_m < p$.
(ii) Supongamos que $p_m \leq X_m < p$ para algún m, entonces existe $N(> m)$ tal que $X_N < p_N$. En efecto, si $p_k \leq X_k < p$ para todo $k(\geq m)$, entonces la sucesión $(X_m, X_{m+1}, X_{m+2}, \cdots)$ sería decreciente, mientras que la sucesión $(p_m, p_{m+1}, p_{m+2}, \cdots)$ es creciente y tiende al límite p, lo cual es absurdo.

$(Fig.4)$

(iii) Supongamos que $X_N < p_N$ para algún N; entonces $X_k < p_k$ para todo $k \geq N$; en efecto, si $X_k < p_k$ entonces $X_{k+1} = f_k(X_k) < f_k(p_k) = p_k < p_{k+1}$. La sucesión $(X_N, X_{N+1}, X_{N+2}, \cdots)$ es creciente, y tenemos: $X_{k+1} - X_k = f_k(X_k) - X_k = (\frac{1}{2})^k(p_k - X_k) < (\frac{1}{2})^k(p - X_k) < (\frac{1}{2})^k(p - X_N)$ para todo $k \geq N$. Sumando la desigualdad anterior, desde $k = N$ hasta $k = \infty$, se tiene que $X_\infty - X_N = \sum_{k=N}^{\infty}(X_{k+1} - X_k) < (p - X_N)\sum_{k=N}^{\infty}(\frac{1}{2})^k = (p - X_N)(\frac{1}{2})^{N-1} \leq p - X_N$, o sea: $X_\infty = \lim_{k\to\infty} X_k < p$.
De (i), (ii) y (iii) se ve que toda solución (X_n) de la fórmula de recurrencia converge a un límite estrictamente menor que p. Viceversa, mostremos:
(iv) Dado cualquier $L(< p)$, existe una solución de la fórmula de recurrencia que converge al límite L.

Demostración (iv). Como $p_n \longrightarrow p$, entonces existe m tal que $L < p_m$. Sea $(\tilde{X}_n; n = m, m+1, m+2, \cdots)$ la solución de la fórmula de recurrencia definida por la condición inicial $\tilde{X}_m = L$; entonces $\tilde{X}_m < p_m$, luego $\tilde{X}_n < p_n$ para todo $n \geq m$. La sucesión $(\tilde{X}_m, \tilde{X}_{m+1}, \tilde{X}_{m+2}, \cdots)$ es creciente y tiende a un límite menor que p, digamos $\tilde{L} = \lim_{n\to\infty} \tilde{X}_n > \tilde{X}_m = L$. Por la definición de la función f_n la sucesión $(X_n;\, n \geq m)$ satisface la fórmula de recurrencia:

$$\tilde{X}_{n+1} = (1 - (\frac{1}{2})^n)\tilde{X}_n + (\frac{1}{2})^n p_n \qquad (n = m, m+1, m+2, \cdots), \tag{9}$$

por lo tanto se tiene, para $n \geq m$ ([2],[3]):

$$\tilde{X}_{n+1} = \prod_{k=m}^{n}(1 - (\frac{1}{2})^k)\left[\tilde{X}_m + \sum_{k=m}^{n}\frac{(\frac{1}{2})^k p_k}{\prod_{j=m}^{k}(1 - (\frac{1}{2})^j)}\right].$$

En consecuencia se obtiene el límite de la sucesión $(\tilde{X}_n)$ como sigue:

$$\tilde{L} = \lim_{n\to\infty} \tilde{X}_n = \alpha[\tilde{X}_m + \sum_{k=m}^{\infty}(\frac{1}{2})^k p_k/\alpha_k],$$

donde

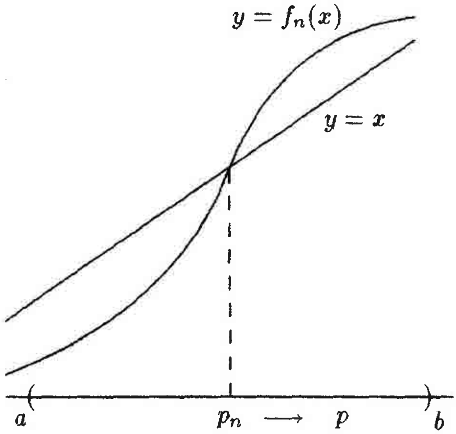
$$\alpha_k = \prod_{j=m}^{k}(1 - (\frac{1}{2})^j), \qquad \alpha = \lim_{k\to\infty}\alpha_k = \prod_{j=m}^{\infty}(1 - (\frac{1}{2})^j).$$

Sea $(X_n; n \geq m)$ la solución de la fórmula de recurrencia (8) definida por la condición inicial: $X_m = \frac{L}{\alpha} - \sum_{k=m}^{\infty}(\frac{1}{2})^k p_k/\alpha_k$. Como $L < \tilde{L}$ entonces $X_m < \tilde{X}_m < p_m$, en consecuencia se tiene que $X_n < p_n$ para todo $n \geq m$. Por lo tanto la sucesión $(X_n; n \geq n)$ satisface la fórmula de recurrencia (9), y su límite es:

$$\lim_{n\to\infty} X_n = \alpha[X_m + \sum_{k=m}^{\infty}\frac{(\frac{1}{2})^k p_k}{\alpha_k}] = L.$$

3. Segundo caso, conjunto de convergencia cerrado y no vacío

Teorema 2. *Consideremos la fórmula de recurrencia de primer orden (1), donde las funciones $f_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ satisfacen las siguientes condiciones:*
(i) $f_n(x)$ tiene un punto fijo p_n en $I = (a, b)$, y $\lim_{n\to\infty} p_n = p \in \bar{I} = [a, b]$.
(ii) $f_n(x) < x$ si $x < p_n$, $f_n(x) > x$ si $x > p_n$ $(Fig.5)$.



$(Fig.5)$

(iii) $f_n(x)$ es continua y creciente en I.
Entonces existe un intervalo cerrado $T = [c, d] (\subset I)$ tal que si $X_1 < c$ la solución $(X_n; n = 1, 2, 3, \cdots)$ es decreciente (a partir de algún término) y ésta no converge al límite p, si $X_1 \in T = [c, d]$ la solución $(X_n; n = 1, 2, 3, \cdots)$ converge al límite p, y si $X_1 > d$ la solución $(X_n; n = 1, 2, 3, \cdots)$ es creciente (a partir de algún término) y ésta no converge al límite p. Nótese que la solución (X_n) puede converger a algún límite distinto de p en caso de que $X_1 \notin T = [c, d]$ (Ejemplo 8).
Supongamos adicionalmente que las funciones $f_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ satisfagan la desigualdad:

$$f_n(y) - f_n(x) \geq y - x \text{ si } x < y \qquad (\text{para todo } n); \tag{10}$$

entonces el intervalo T se reduce al conjunto unitario $T = \{c\}$, donde

$$c = \lim_{n\to\infty} f_1^{-1}(f_2^{-1}(\cdots f_n^{-1}(p)\cdots)). \tag{11}$$

Si $f_n(x)$ $(n = 1,2,3,\cdots)$ son derivables y $f_n'(x) \geq 1$, entonces se cumplen las dos condiciones (iii) y (10).

Demostración. Sean $s_n = inf\{p_n, p_{n+1}, p_{n+2}, \cdots\}$, $t_n = sup\{p_n, p_{n+1}, p_{n+2}, \cdots\}$, $D_n = [s_n, t_n]$ $(n = 1,2,3,\cdots)$; entonces (s_n) es creciente, y (t_n) es decreciente, luego:

(12) $$D_{n+1} \subseteq D_n \quad \text{para todo } n.$$

Además, $(s_n), (t_n) \longrightarrow p$, o sea, $\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n = \{p\}$. Evidentemente, $p_k \in D_n$ para todo $k = n, n+1, n+2, \cdots$.

Por la condición (ii) y la continuidad de las funciones $f_n(x)$ tenemos las siguientes contenencias:

(13) $$f_n((s_n, t_n)) \supset (s_n, t_n) \qquad \text{para todo } n,$$

(14) $$D_n \supset f_n^{-1}(D_n) \qquad \text{para todo } n.$$

En efecto, sea $y \in (s_n, t_n)$; si $y \leq p_n$ entonces $f_n(y) \leq y \leq p_n = f_n(p_n)$; por el teorema del valor intermedio existe $x \in [y, p_n]$ tal que $f_n(x) = y$. De la misma manera, si $y \geq p_n$ existe $x \in [p_n, y]$ tal que $f_n(x) = y$, por lo tanto se obtiene la contenencia (13).

Por otra parte, si $x < s_n$ entonces $f_n(x) < x < s_n$, o sea que $f_n(x) \notin D_n$. De la misma manera, si $x > t_n$ entonces $t_n < x < f_n(x)$, o sea que $f_n(x) \notin D_n$. Por lo tanto se obtiene la contenencia (14). Sea $T_n = \{x \in I | (f_n \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1)(x) \in D_n\} = f_1^{-1}(f_2^{-1}(\cdots(f_n^{-1}(D_n))\cdots)$ $(n = 1,2,3,\cdots)$; por (13) se tiene que $T_n \neq \emptyset$. Además, T_n es un intervalo cerrado ya que la función $(f_n \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1)$ es continua y creciente. Se obtiene: $T_{n+1} \subseteq T_n$ para todo n. En efecto, $T_{n+1} = f_1^{-1}(f_2^{-1}(\cdots f_n^{-1}(f_{n+1}^{-1}(D_{n+1}))\ \cdots)) \subset f_1^{-1}(f_2^{-1}(\cdots f_n^{-1}(D_{n+1})\cdots)) \subset f_1^{-1}(f_2^{-1}(\cdots f_n^{-1}(D_n)\cdots)) = T_n$ (usamos (12) y (14)). Sea $T = \bigcap_{n=1}^{\infty} T_n$; por el teorema del encaje de Cantor se tiene que T es un intervalo cerrado (no vacío), digamos $T = [c, d]$. De (14) obtenemos:

(15) $$T = [c, d] \subset D_1 = [s_1, t_1].$$

Si $X_1 \in T$ entonces $X_1 \in T_n$ para todo n, por lo tanto: $X_{n+1} = (f_n \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1)(X_1) \in D_n$ para todo n, en consecuencia: $(X_n) \longrightarrow p$.

Si $X_1 \notin T$ entonces existe m tal que $X_1 \notin T_m$, por lo tanto:

$$X_{n+1} = (f_n \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1)(X_1) \notin D_m = [s_m, t_m].$$

Si $X_{m+1} < s_m$ (se puede presentar este caso cuando $X_1 < c$ ya que f_k es creciente par todo k), entonces $X_{m+1} < p_{m+1}$, luego $X_{m+2} = f_{m+1}(X_{m+1}) <$

X_{m+1}. Tenemos también que $X_{m+2} < s_m < p_{m+2}$, luego $X_{m+3} = f_{m+2}(X_{m+2}) < X_{m+2}$; así sucesivamente se obtiene: $s_m > X_{m+1} > X_{m+2} > X_{m+3} > \cdots$, por lo tanto la sucesión (X_n) es decreciente a partir del término X_{m+1}, y ésta no converge al límite p. De la misma manera, si $X_{m+1} > t_m$ (se presenta este caso cuando $X_1 > d$) entonces la sucesión (X_n) es creciente a partir del término X_{m+1}, y ésta no converge al límite p.

Ahora, supongamos que las funciones $f_n(x)$ satisfacen la desigualdad (10) en el intervalo D_1. Sea $g_n = (f_n \circ \cdots f_2 \circ f_1)$, entonces se tiene la desigualdad:

$$g_n(y) - g_n(x) \geq y - x \qquad \text{para } x, y \in D_1 \text{ con } x < y. \tag{16}$$

Como $T_n = g_n^{-1}(D_n)$, entonces la longitud del intervalo T_n es menor o igual a la longitud del intervalo D_n, en consecuencia el diámetro de $T = \bigcap_{n=1}^{\infty} T_n$ debe ser cero, esto es, T es un conjunto unitario. Como $p \in D_n$ para todo n, entonces $f_1^{-1}(f_2^{-1}(\cdots f_n^{-1}(p)\cdots)) \in T_n$ para todo n, por lo tanto se tiene que $T = \{c\}$ donde $c = \lim_{n\to\infty} f_1^{-1}(f_2^{-1}(\cdots f_n^{-1}(p)\cdots))$.

Ejemplo 6. Consideremos la sucesión dada por la fórmula de recurrencia

$$X_{n+1} = f_n(X_n) = (n+1)X_n - (n+2) \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots) \tag{17}$$

La función $f_n(x) = (n+1)x - (n+2)$ tiene un punto fijo $p_n = \frac{n+2}{n}$ y $(p_n) \longrightarrow 1 (= p)$. Evidentemente, $f_n(x)$ satisface todas las condiciones del teorema 2; como también satisface la desigualdad (10), por lo tanto existe $c \in [p, p_1] = [1, 3]$ tal que $X_1 = c$ si y sólo si $(X_n) \longrightarrow 1$. En realidad, la fórmula de recurrencia (17) es de primer grado, por lo tanto su solución es:

$$X_{n+1} = (n+1)! \cdot \left[X_1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{k+2}{(k+1)!}\right].$$

Como $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+2}{(k+1)!} = 2e - 3$, entonces se tiene: si $X_1 \neq 2e - 3$ entonces $(X_n) \longrightarrow + - \infty$, y si $X_1 = 2e - 3$ entonces :

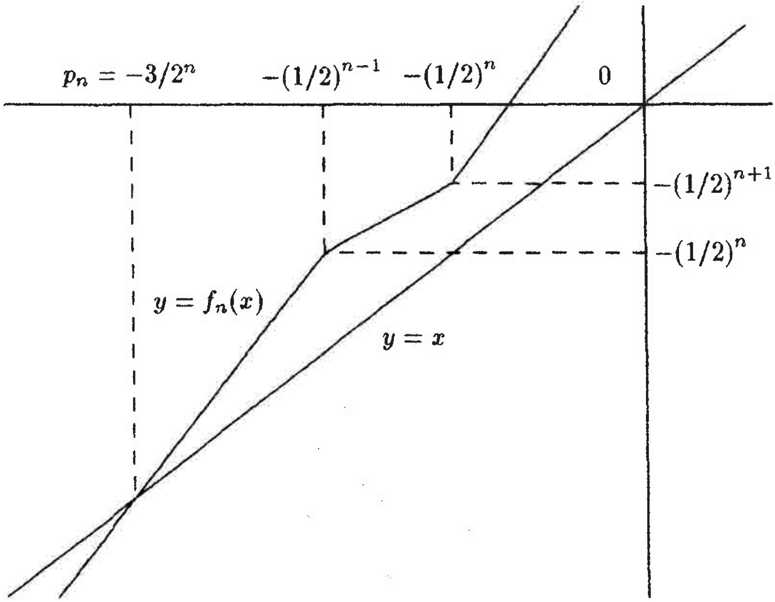
$$X_{n+1} = (n+1)! \cdot \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{k+2}{(k+1)!} = \frac{\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{k+2}{(k+1)!}}{\sum_{k=n+1}^{\infty} [\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}]}$$

$$\xrightarrow{(n \longrightarrow \infty)} \qquad \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{k+2}{(k+1)!}}{\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}} = 1 \quad \text{(Regla de L'Hôpital)}.$$

Obsérvese que la sucesión de funciones $(f_n(x); n = 1, 2, 3, \cdots)$ es divergente, y que el conjunto unitario $T = \{2e - 3\}$ es el conjunto de convergencia de la fórmula de recurrencia (17).

Ejemplo 7. $X_{n+1} = f_n(X_n)$ donde

$$f_n(x) = \begin{cases} 2x + 3/2^n & \text{si } x \leqslant -(\frac{1}{2})^{n-1} \\ x/2 & \text{si } -(\frac{1}{2})^{n-1} \leqslant x \leqslant -(\frac{1}{2})^n \\ 2x + 3/2^{n+1} & \text{si } -(\frac{1}{2})^n \leqslant x. \end{cases}$$



$(Fig.6)$

La función $f_n(x)$ tiene único punto fijo $p_n = -3 \cdot (\frac{1}{2})^n$ y $p_n \longrightarrow 0(= p)$. Evidentemente, $f_n(x)$ satisface todas las condiciones del teorema 2.

Se observa que $f_n : \left[-(\frac{1}{2})^{n-1}, -(\frac{1}{2})^n\right] \longrightarrow \left[-(\frac{1}{2})^n, -(\frac{1}{2})^{n+1}\right]$ es sobre, por lo tanto, si $X_1 \in \left[-1, -\frac{1}{2}\right]$ entonces $X_n \in \left[-(\frac{1}{2})^{n-1}, -(\frac{1}{2})^n\right]$ y $(X_n) \longrightarrow 0$. Si $X_1 < -1$, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $X_1 < -1 - \epsilon$; podemos demostrar, por inducción, que $X_n < -(\frac{1}{2})^{n-1} - 2^{n-1} \cdot \epsilon$, por lo tanto se tiene que $(X_n) \longrightarrow -\infty$. Si $X_1 > -\frac{1}{2}$, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $X_1 > -\frac{1}{2} + \epsilon$; podemos demostrar, por inducción, que $X_n > -(\frac{1}{2})^n + 2^{n-1} \cdot \epsilon$, por lo tanto se tiene que $(X_n) \longrightarrow +\infty$. Por lo tanto, el intervalo cerrado $T = [-1, -\frac{1}{2}]$ es el conjunto de convergencia de la fórmula de recurrencia.

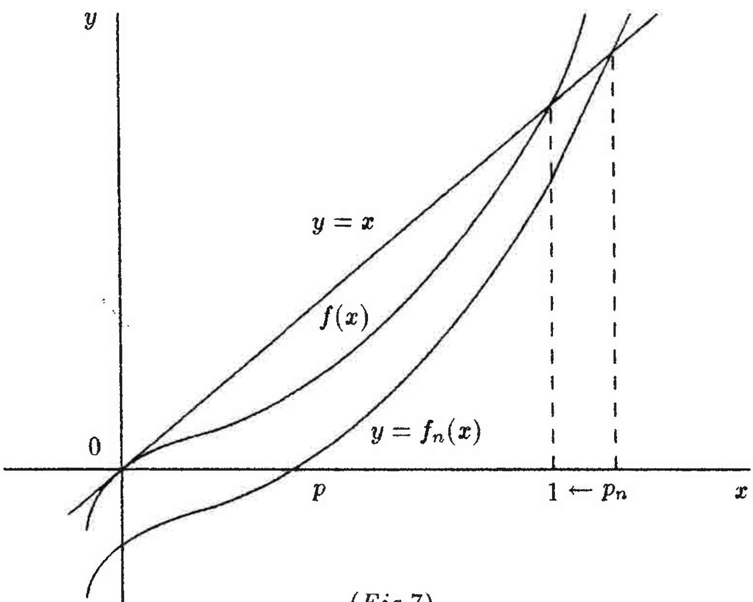
Ejemplo 8. Consideremos la sucesión

$$X_{n+1} = f_n(X_n) = (X_n)^3 - (X_n)^2 + X_n - (\frac{1}{4})^n. \tag{18}$$

Tenemos:

$$f_n(x) = x^3 - x^2 + x - (\frac{1}{4})^n \longrightarrow f(x) = x^3 - x^2 + x$$

uniformemente en $\mathbb{R}$. La función $f(x)$ tiene dos puntos fijos, 0 y 1, sin embargo la función $f_n(x)$ tiene un único punto fijo $p_n(> 1)$ en $\mathbb{R}$ (ver la $(Fig.7)$), y $(p_n) \longrightarrow 1(= p)$.



$(Fig.7)$

Se ve inmediatamente que la función $f_n(x)$ satisface todas las condiciones del teorema 2 ya que $f_n'(x) = 3x^2 - 2x + 1 > 1$ para todo $x \geqslant 1$, por lo tanto existe c con $1 < c < p_1$ tal que $X_1 = c$ si y sólo si $(X_n) \longrightarrow 1$. Si $X_1 = 1(< c)$, entonces la sucesión $(X_n; n = 1, 2, 3, \cdots)$ no converge al límite 1 puesto que (X_n) es decreciente; sin embargo ésta converge al límite 0. En efecto, tenemos:

$$f(x) = x^3 - x^2 + x \geqslant \frac{3}{4}x \quad \text{para} \quad x > 0,$$

luego

$$X_{n+1} = f(X_n) - (\frac{1}{4})^n \geqslant \frac{3}{4}X_n - (\frac{1}{4})^n \quad \text{para } X_n > 0,$$

por lo tanto ([2],[3])

$$\begin{aligned} X_{n+1} &\geqslant (\frac{3}{4})^n \cdot \left[X_1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(\frac{1}{4})^k}{(\frac{3}{4})^k}\right] \\ &= (\frac{3}{4})^n \cdot \left[X_1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k}\right]. \end{aligned}$$

Como $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{2}$, entonces $X_{n+1} > 0$ para todo n cuando $X_1 \geqslant \frac{1}{2}$. Se observa que la sucesión (X_n) es decreciente cuando $X_1 < c$; entonces $(X_n) \longrightarrow 0$ cuando $\frac{1}{2} \leqslant X_1 < c$. Nótese que 0 es un punto fijo de la función $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, y que $f'(0) = 1$.

Evidentemente, si $X_1 = 0$ entonces $(X_n) \longrightarrow -\infty$. Sean

$$U_n = \{x | (f_n \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1)(x) \geqslant 0\}, \qquad U = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n;$$

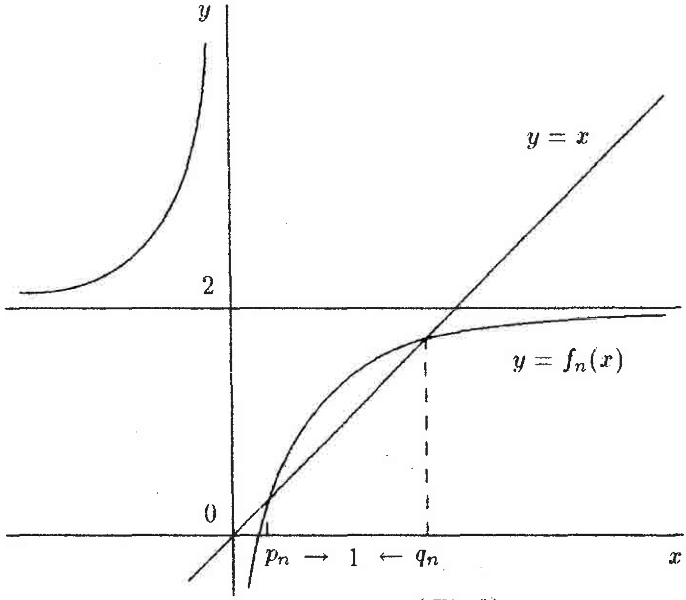
entonces U es un intervalo cerrado de la forma $U = [\rho, \infty)$. Como $1 \in U$, entonces $\rho < c$, por lo tanto se tiene:

$$\begin{cases} \text{si } X_1 < \rho \text{ entonces } (X_n) \longrightarrow -\infty, \\ \text{si } \rho \leqslant X_1 < c \text{ entonces } (X_n) \longrightarrow 0, \\ \text{si } X_1 = c \text{ entonces } (X_n) \longrightarrow 1, \\ \text{si } c < X_1 \text{ entonces } (X_n) \longrightarrow +\infty. \end{cases}$$

Por lo tanto el conjunto de convergencia de la fórmula de recurrencia (18) es igual al intervalo cerrado $[\rho, c]$. Por un cálculo numérico se obtiene aproximadamente:

$$\rho = 0.45\cdots, \qquad c = 1.126\cdots.$$

Ejemplo 9. Considérese $X_{n+1} = f_n(X_n) = 2 - \frac{b_n}{X_n}$, $0 < b_n < 1$, $b_n \longrightarrow 1$. La función $f_n(x) = 2 - b_n/x$ tiene dos puntos fijos en $\mathbb{R}$: $p_n = 1 - \sqrt{1-b_n}$, $q_n = 1 + \sqrt{1-b_n}$, $p_n < 1 < q_n$ para todo n, y $(p_n),(q_n) \longrightarrow 1$.



$(Fig.8)$

(i) En el intervalo $[1,\infty)$ la función $f_n(x)$ tiene un único punto fijo q_n, y $(q_n) \longrightarrow 1$; además: $x < f_n(x) < q_n$ si $x < q_n$, $q_n < f_n(x) < x$ si $x > q_n$. Por el teorema 1, dado cualquier $X_1 \geq 1$ la solución $(X_1, X_2, X_3, \cdots)$ converge al límite 1. Se tiene el mismo resultado tomando X_m (para cualquier m) como el primer término de la solución, por lo tanto si $X_m \geq 1$ para algún m, entonces $(X_n) \longrightarrow 1$

(ii) En el intervalo $(0,1]$ la función $f_n(x)$ es continua y creciente, y $f_n(x)$ tiene único punto fijo $p_n, (p_n) \longrightarrow 1$. Además: $f_n(x) < x$ si $x < p_n$, $f_n(x) > x$ si $x > p_n$. Por el teorema 2, existe un intervalo cerrado $[c,d](\subset (0,1])$ tal que:

(1) si $X_1 \in [c,d]$ entonces $(X_n) \longrightarrow 1$;

(2) si $X_1 > d$ entonces (X_n) es creciente a partir de algún término, por lo tanto existe m tal que $X_m \geq 1$ y por (i) la solución (X_n) converge a 1;

(3) si $X_1 < c$ entonces (X_n) es decreciente a partir de algún término, por lo tanto existe algún m tal que $X_m < 0$. De la fórmula de recurrencia se ve que $X_{m+1} > 2$; de nuevo la solución (X_n) converge al límite 1;

(4) si $X_1 = 0$, $X_2 = \pm\infty$, $X_3 = 2$, por (i) la solución converge al límite 1.

En resumen, cualquier solución de la fórmula de recurrencia converge al límite 1. Podemos considerar que $\mathbb{R}$ es el conjunto de convergencia.

En el teorema 2 se supone que las funciones $f_n(x)$ $(n = 1,2,3,\cdots)$ son crecientes y tienen un único punto fijo en el intervalo I. Eliminando estas condiciones se obtiene la siguiente generalización del teorema 2 (propuesta por el profesor Roberto Quicazán):

Corolario. *(generalización del teorema 2). Supongamos que las funciones* $f_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ *satisfacen las siguientes condiciones:*
(i) $f_n(x) < x$ *si* $x < p_n$; $f_n(x) > x$ *si* $x > q_n$, *donde* p_n *es el mínimo punto fijo de* $f_n(x)$ *y* q_n *el máximo punto fijo de* $f_n(x)$ *en* I, *tales que* $(p_n), (q_n) \longrightarrow p \in \bar{I}$,
(ii) $f_n(x)$ *es continua en* I.
Entonces existe un conjunto cerrado no vacío $T(\subset I)$ *tal que* $X_1 \in T$ *si y sólo si la solución* $(X_n; n = 1, 2, 3, \cdots)$ *de la fórmula de recurrencia (1) converge al límite* p.

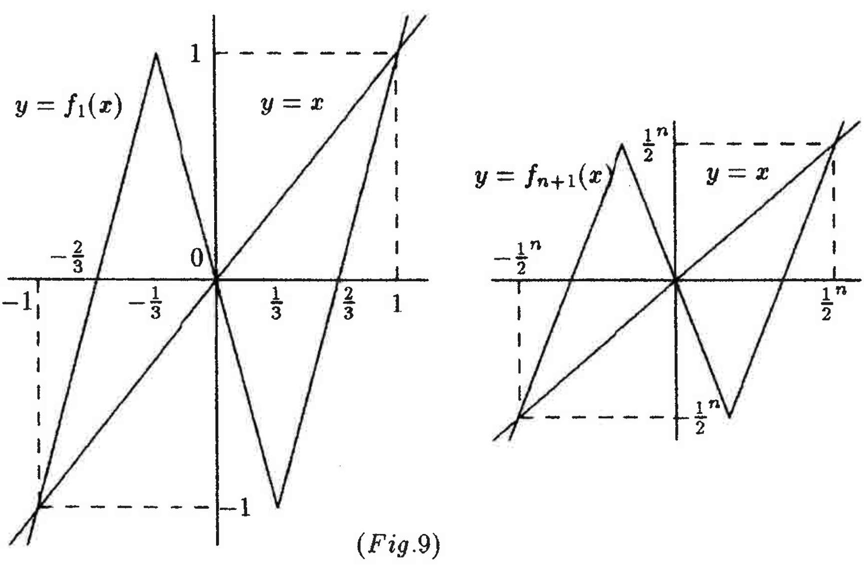
La demostración es igual a la del teorema 2, tomando: $s_n = inf\,\{p_n, p_{n+1}, p_{n+2}, \cdots\}$, $t_n = sup\,\{q_n, q_{n+1}, q_{n+2}, \cdots\}$.

Ejemplo 10. Consideremos $X_{n+1} = f_n(X_n)$, donde

$$f_1(x) = \begin{cases} 3x + 2 & \text{si } x \leqslant -\frac{1}{3} \\ -3x & \text{si } -\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant \frac{1}{3} \\ 3x - 2 & \text{si } \frac{1}{3} \leqslant x \end{cases}$$

$$f_{n+1}(x) = \frac{1}{2} f_n(2x).$$

Se observa que se obtiene la gráfica de la función $f_{n+1}(x)$ reduciendo la gráfica de la función $f_1(x)$ con una escala de $1 : 2^n$ (ver $(Fig.9)$).



$(Fig.9)$

La función $f_n(x)$ tiene tres puntos fijos 0, $p_n = -(\frac{1}{2})^{n-1}$, $q_n = (\frac{1}{2})^{n-1}$, $(p_n),(q_n) \longrightarrow 0$.

Evidentemente, la función $f_n(x)$ satisface todas las condiciones del corolario del teorema 2, por lo tanto existe un conjunto cerrado no vacío T tal que $X_1 \in T$ si y sólo si $(X_n) \longrightarrow 0$. Como la sucesión de funciones $(f_n(x); n = 1, 2, 3, \cdots)$ converge uniformemente a la función lineal $3x$, entonces 0 es el único límite posible de la sucesión (X_n). En consecuencia tenemos: si $X_1 \notin T$ entonces $(X_n) \longrightarrow \pm\infty$, o sea que T es el conjunto de convergencia de la fórmula de recurrencia.

A continuación, vamos a demostrar que T es un conjunto similar al conjunto ternario de Cantor (fractal de dimensión 1).

(i) Sean $D_n = [p_n, q_n] = \left[-(\frac{1}{2})^{n-1}, (\frac{1}{2})^{n-1}\right]$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$, $I = D_1 = [-1, 1]$, $T_n = \{x|(f_n \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1)(x) \in D_n\} = f_1^{-1}(f_2^{-1}(\cdots f_n^{-1}(D_n)\cdots))$, $T = \bigcap_{n=1}^{\infty} T_n$. Como $f_{k+1}(x) = \frac{1}{2}f_k(2x)$ (para todo k), entonces $(f_{n+1} \circ \cdots \circ f_3 \circ f_2)(x) = \frac{1}{2} \cdot (f_n \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1)(2x)$; teniendo en cuenta que $D_{n+1} = \frac{1}{2}D_n$ se obtiene la siguiente igualdad: $f_2^{-1}(f_3^{-1}(\cdots f_{n+1}^{-1}(D_{n+1})\cdots)) = \frac{1}{2} \cdot f_1^{-1}(f_2^{-1}(\cdots f_n^{-1}(D_n)\cdots)) = \frac{1}{2}T_n$. Por lo tanto se obtiene:

$$T_{n+1} = f_1^{-1}(f_2^{-1}(\cdots f_{n+1}^{-1}(D_{n+1})\cdots)) = f_1^{-1}(\frac{1}{2} \cdot T_n). \tag{19}$$

(ii) Las funciones inversas de las tres partes de la función $f_1(x)$, $y = 3x+2$, $y = -3x$, $y = 3x - 2$, son respectivamente: $h^{(0)} : [-1, 1] \longrightarrow [-1, -\frac{1}{3}]$, $t \longmapsto \frac{1}{3}t - \frac{2}{3}$; $h^{(1)} : [-1, 1] \longrightarrow [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$, $t \longmapsto -\frac{1}{3}t$; $h^{(2)} : [-1, 1] \longrightarrow [\frac{1}{3}, 1]$, $t \longmapsto \frac{1}{3}t + \frac{2}{3}$. Si un conjunto C está en $I = [-1, 1]$ entonces:

$$f_1^{-1}(C) = h^{(0)}(C) \bigcup h^{(1)}(C) \bigcup h^{(2)}(C). \tag{20}$$

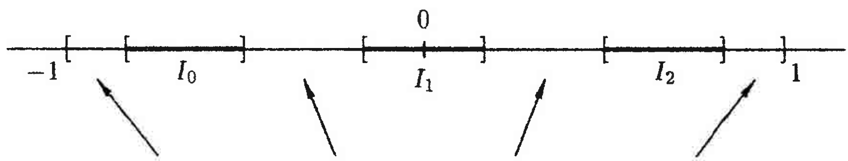
Tenemos: $T_1 = f_1^{-1}(D_1) = D_1 = [-1, 1](= I)$, $m(t_1) = 2$ (m: medida).

(iii) $T_2 = f_1^{-1}(\frac{1}{2}T_1) = f_1^{-1}(\frac{1}{2}I) = f_1^{-1}([-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]) = I(0) \bigcup I(1) \bigcup I(2)$ donde

$$I(0) = h^{(0)}([-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]) = [-5/6, -3/6],$$
$$I(1) = h^{(1)}([-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]) = [-1/6, 1/6],$$
$$I(2) = h^{(2)}([-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]) = [3/6, 5/6], \qquad m(T_2) = 1.$$

Para obtener los tres intervalos disyuntos $I(0), I(1), I(2)$ a partir del intervalo $I = [-1, 1]$ se puede proceder como sigue.

Se divide el intervalo cerrado $I = [-1, 1]$ en doce partes iguales, la primera se elimina, las dos siguientes forman el intervalo cerrado $I(0)$, las dos siguientes se eliminan, las dos siguientes forman el intervalo cerrado $I(1)$, las dos siguientes se eliminan, las dos siguientes forman el intervalo cerrado $I(2)$, y la última se elimina. (Ver $(Fig.10)$)



se eliminan estos subintervalos de I

$(Fig.10)$

(iv) Ahora, supongamos que T_n es la unión disyunta de $3^n - 1$ intervalos cerrados:

$$(21) \qquad T_n = \bigcup_{k_1,\cdots,k_{n-1}=0}^{2} I(k_1,\cdots,k_{n-1}) = \bigcup_{k_2,\cdots,k_n=0}^{2} I(k_2,\cdots,k_n),$$

donde

$$(22) \qquad I(k_1,k_2,\cdots,k_{n-1}) = h^{(k_1)}(\frac{1}{2}I(k_2,\cdots,k_n)) \qquad (k_1 = 0,1,2).$$

Además, supongamos que $I(k_1,\cdots,\ k_{n-2},0)$, $I(k_1,\cdots,\ k_{n-2},1)$, $I(k_1,\cdots,$ $k_{n-2},2)$ son tres subintervalos cerrados del intervalo $I(k_1,\cdots,\ k_{n-2})$ obtenidos por el mismo procedimiento descrito en (iii) $(Fig.10)$.
De (19) y (20) tenemos: $T_{n+1} = f_1^{-1}(\frac{1}{2}T_n) = \bigcup_{k_2,\cdots,k_n=0}^{2} f_1^{-1}(\frac{1}{2}I(k_2,\cdots,k_n))$ $= \bigcup_{k_1=0}^{2}\bigcup_{k_2,\cdots,k_n=0}^{2} h^{(k_1)}(\frac{1}{2}I(k_2,\cdots,k_n)) \;\; = \bigcup_{k_1,k_2,\cdots,k_n=0}^{2} I(k_1,k_2,\cdots,k_n)$ donde $I(k_1,k_2,\cdots,k_n) = h^{(k_1)}(\frac{1}{2}I(k_2,\cdots,k_n))$ $(k_1,k_2,\cdots,k_n = 0,1,2)$. Tenemos: $I(k_1,\cdots,k_n) = h^{(k_1)}(\frac{1}{2}I(k_2,\cdots,k_n)) \subset h^{(k_1)}(\frac{1}{2}I(k_2,\cdots,k_{n-1})) =$ $I(k_1,k_2,\cdots,k_{n-1})$. Como $I(k_2,\cdots k_{n-1},k_n)$ $(k_n = 0,1,2)$ son subintervalos del intervalo cerrado $I(k_2,\cdots,k_{n-1})$ obtenidos por el mismo procedimiento descrito en (iii) (por la hipótesis de la inducción) y las funciones $h^{(k_1)}(k_1 = 0,1,2)$ son lineales de pendiente $\pm 1/3$, entonces los intervalos $I(k_1,\cdots,k_{n-1},k_n)$ $(k_n = 0,1,2)$ son subintervalos cerrados de $I(k_1,\cdots,k_{n-1})$ obtenidos por el mismo procedimiento descrito en (iii) $(Fig.10)$. Por inducción, para todo n

son válidas las igualdades (21) y (22), y el método para obtener los intervalos cerrados $I(k_1, \cdots, k_{n-1}, k_n)$.
(v) Tenemos inmediatamente que $m(I(k_1, k_2, \cdots, k_n)) = 2 \cdot (\frac{1}{6})^n, m(T_{n+1}) = (\frac{1}{2})^{n-1}$, por lo tanto, $m(T) = \lim_{n\to\infty} m(T_{n+1}) = 0$.
(vi) Dado $x \in [0,1]$ se puede desarrollar el número real x en el sistema ternario como sigue: $x = 0 \cdot k_1 k_2 k_3 \cdots\cdots \quad (k_n = 0, 1, 2)$. Como $I(k_1) \supset I(k_1, k_2) \supset I(k_1, k_2, k_3) \supset \cdots\cdots$ entonces al número real x se le hace corresponder un punto del conjunto T dado por:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I(k_1, k_2, \cdots, k_n),$$

por lo tanto la cardinalidad del conjunto T es igual a $\mathbf{c}$, o sea que T no es enumerable. Obsérvese que el complemento del conjunto T es denso en $\mathbb{R}$. T es un conjunto ternario de Cantor en el sentido extendido.
Observación. En el presente ejemplo, como $f_k(D_k) = D_k, f_k^{-1}(D_k) = D_k$ para todo k, entonces el conjunto de convergencia T está determinado solamente por el comportamiento de la función $f_k(x)$ en D_k (para todo k). Por esta razón, la siguiente fórmula de recurrencia: $X_{n+1} = F_n(X_n)$ $n = 1, 2, 3, \cdots$, donde

$$F_{n+1}(x) = \begin{cases} f_{n+1}(x) & \text{si } |x| \le (\frac{1}{2})^n \\ 4^n \cdot x^3 & \text{si } |x| \ge (\frac{1}{2})^n \end{cases} \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

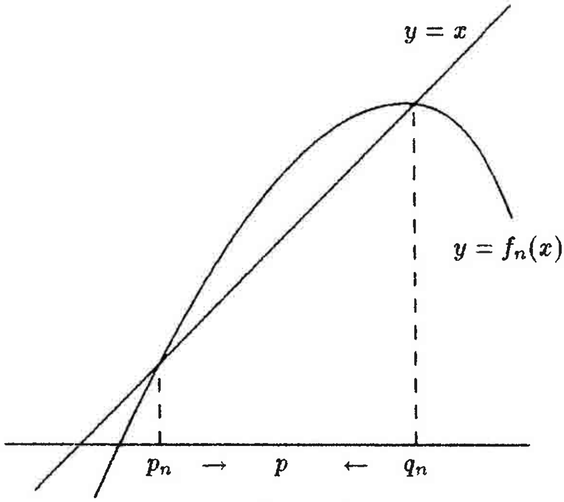
tiene el mismo conjunto de convergencia que el obtenido en el presente ejemplo. En cambio, en el caso de la fórmula de recurrencia: $X_{n+1} = G_n(X_n)$ $n = 1, 2, 3, \cdots$, donde

$$G_{n+1}(x) = \begin{cases} f_{n+1}(x) & \text{si } |x| \leqslant (\frac{1}{2})^n \\ (\frac{1}{\sqrt{2}})^n \cdot \sqrt{x} & \text{si } x \geqslant (\frac{1}{2})^n \\ -(\frac{1}{\sqrt{2}})^n \cdot \sqrt{|x|} & \text{si } x \leqslant -(\frac{1}{2})^n, \end{cases} \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots),$$

su conjunto de convergencia es igual a $\mathbb{R}$ por el teorema 1. La sucesión de funciones $(F_n(x); n = 1, 2, 3, \cdots)$ diverge para todo $x \neq 0$, y la sucesión de funciones $(G_n(x); n = 1, 2, 3, \cdots)$ converge a la función nula 0.

3. Conjunto ternario de Cantor

En la fórmula de recurrencia $X_{n+1} = f_n(X_n) \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$, supongamos que las funciones $(f_n(x); n = 1, 2, 3, \cdots)$ satisfacen las condiciones del corolario del teorema 2, reemplazando $f_n(x) < x$ si $x < p_n$, $f_n(x) > x$ si $x > q_n$, por la condición uniforme $f_n(x) < x$ si $x \notin [p_n, q_n]$. (*Fig.*11)



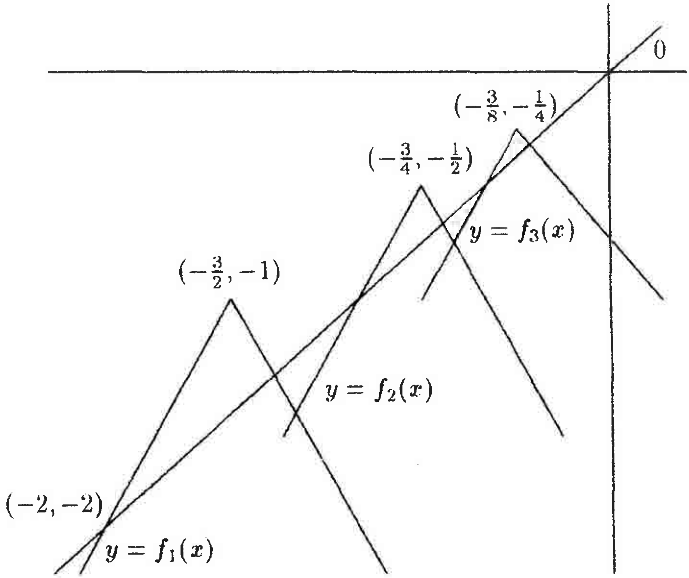
$(Fig.11)$

En este caso, el conjunto de convergencia puede ser vacío (ejemplo 11), pero en el ejemplo 12 se muestra que el conjunto de convergencia es el conjunto ternario de Cantor en el sentido clásico.

Ejemplo 11. Consideremos $X_{n+1} = f_n(X_n)$ donde

$$f_n(x) = \begin{cases} 2x + (\frac{1}{2})^{n-2} & \text{si } x \leqslant -3/2^n \\ -2x - (\frac{1}{2})^{n-3} & \text{si } x \geqslant -3/2^n. \end{cases}$$

La función $f_n(x)$ tiene dos puntos fijos: $p_n = -(\frac{1}{2})^{n-2}$, $q_n = -\frac{1}{3 \cdot 2^{n-3}}$; se observa que $(p_n), (q_n)$ son crecientes y $(p_n), (q_n) \longrightarrow 0$.



$(Fig.12)$

Nótese que la sucesión de funciones $(f_n(x); n = 1, 2, 3, \cdots)$ converge uniformemente a la función límite $-2|x|$. Tenemos: $f_n(x) < x$ si $x < p_n$ o $x > q_n$; además, si $p_n < x < q_n$ entonces $f_n(x) < f_n(-3/2^n) = -(\frac{1}{2})^{n-1} = p_{n+1}$. Tenemos que $(X_n; n = 1, 2, 3, \cdots) \longrightarrow -\infty$, dado cualquier $X_1 \in \mathbb{R}$. En efecto, si $X_n \leqslant p_n$ entonces $X_{n+1} = f_n(X_n) \leq X_n < p_{n+1}$, luego: $X_n > X_{n+1} > X_{n+2} > X_{n+3} > \cdots \longrightarrow -\infty$. Si $X_n \geq q_n$ entonces $X_{n+1} = f_n(X_n) \leq q_n < p_{n+1}$, luego $X_{n+1} > X_{n+2} > X_{n+3} > \cdots \longrightarrow -\infty$. Si $p_n < X_n < q_n$, entonces $X_{n+1} = f_n(X_n) < p_{n+1}$, luego $X_{n+1} > X_{n+2} > X_{n+3} > \cdots \longrightarrow -\infty$. Por lo tanto, el conjunto de convergencia es vacío.

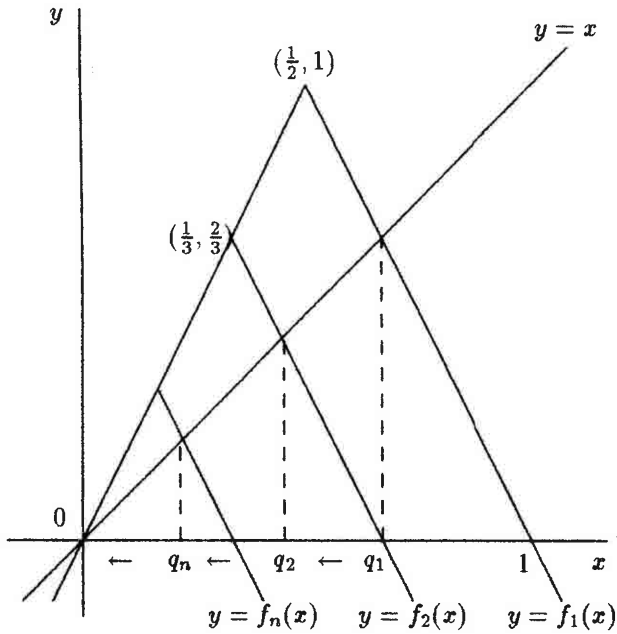
Ejemplo 12. Consideremos $X_{n+1} = f_n(X_n)$ donde:

$$f_n(x) = \begin{cases} 2x \text{ si } x \leqslant \frac{1}{2}(\frac{2}{3})^{n-1} \\ -2x + 2 \cdot (\frac{2}{3})^{n-1} \text{ si } x \geqslant \frac{1}{2}(\frac{2}{3})^{n-1}. \end{cases}$$

Se demuestra inmediatamente la siguiente igualdad:

$$f_{k+1}(x) = \frac{2}{3} f_k(\frac{3}{2} x) \text{ para todo } k. \tag{23}$$

La función $f_n(x)$ tiene dos puntos fijos: $p_n = 0$, $q_n = (\frac{2}{3})^n$, $(p_n), (q_n) \longrightarrow 0$. Se observa que $f_n(x) < x$ si $x < 0$ o $x > q_n = (\frac{2}{3})^n$; además, la sucesión de funciones $(f_n(x); n = 1, 2, 3, \cdots)$ converge uniformemente a la función límite $-2|x|$ (igual al caso del ejemplo 11).



$(Fig.13)$

Sean $D_n = \left[0, (\frac{2}{3})^{n-1}\right]$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$, $I = D_1 = [0, 1]$. Entonces

$$(24) \qquad f_n(D_n) = D_n, \quad f_n^{-}1(D_n) = D_n, \quad D_{n+1} = \frac{2}{3} \cdot D_n.$$

Se define: $T_n = \{x | (f_n \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1)(x) \in D_n\} = f_1^{-1}(f_2^{-1}(\cdots f_n^{-1}(D_n) \cdots))$. Entonces T_n es un conjunto cerrado no vacío y $T_n \supset T_{n+1}$ para todo n. Sea $T = \bigcap_{n=1}^{\infty} T_n$; T es un conjunto cerrado y no vacío, y se tiene: si $X_1 \in T$ entonces $(X_n; n = 1, 2, 3, \cdots) \longrightarrow 0$, si $X_1 \notin T$ entonces $(X_n; n = 1, 2, 3, \cdots) \longrightarrow -\infty$, esto es, T es el conjunto de convergencia de la fórmula de recurrencia.

En efecto, evidentemente se tiene que $(X_n) \longrightarrow 0$ si $X_1 \in T$. Si $X_1 \notin T$ entonces $X_1 \notin T_m$ para algún m, luego $X_{m+1} \notin D_m$. Si $X_{m+1} < 0$, entonces $X_{m+1} > X_{m+2} > X_{m+3} > \cdots \longrightarrow -\infty$. Si $X_{m+1} > (\frac{2}{3})^{m-1}$, entonces $X_{m+2} < -(2/3)^m$, luego $X_{m+2} > X_{m+3} > X_{m+4} > \cdots \longrightarrow -\infty$. Como en el caso del ejemplo 10, de (23) y (24) obtenemos la siguiente igualdad:

$$(25) \qquad T_{n+1} = f_1^{-1}(\frac{2}{3} T_n) \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots).$$

La función $f_1(x)$ está formada de dos partes, $y = 2x$, $y = -2x+2$; las funciones inversas de éstas son respectivamente: $h^{(0)} : [0,1] \longrightarrow [0,\frac{1}{2}]$, $t \longmapsto \frac{1}{2}t$; $h^{(1)} : [0,1] \longrightarrow [\frac{1}{2},1]$, $t \longmapsto -\frac{1}{2}t+1$. Si un conjunto C está en el intervalo [0,1] entonces $f_1^{-1}(C) = h^{(0)}(C) \cup h^{(1)}(C)$. Tenemos: $T_1 = f_1^{-1}(D_1) = [0,1] = I$, $T_2 = f_1^{-1}(\frac{2}{3} \cdot T_1) = f_1^{-1}([0,\frac{2}{3}]) = I(0) \cup I(1)$ donde $I(0) = [0,1/3], I(1) = [2/3,1]$. Para obtener los intervalos $I(0), I(1)$ se divide el intervalo $I = [0,1]$ en tres partes iguales y se elimina el subintervalo central, quedando asílos subintervalos cerrados disyuntos $I(0)$ y $I(1)$ (Ver $(Fig.14)$).

$(Fig.14)$

Ahora por inducción podemos demostrar que T_{n+1} es la unión disyunta de 2^n intervalos cerrados: $T_{n+1} = \bigcup_{k_1,k_2\cdots,k_n=0}^{1} I(k_1,k_2,\cdots,k_n)$ donde $I(k_1,k_2,\cdots,k_{n-1},0)$, $I(k_1,k_2,\cdots,k_{n-1},1)$ son subintervalos cerrados del intervalo $I(k_1,k_2,\cdots,k_{n-1})$ obtenidos por el mismo método descrito anteriormente $(Fig.14)$. De esta manera, se ve que el conjunto de convergencia T es el conjunto ternario de Cantor, en el sentido clásico.

Nótese que el conjunto de convergencia está determinado por el comportamiento de la función $f_k(x)$ en D_k; si la función $F_k(x)$ satisface

$$\begin{cases} F_{k+1}(x) = f_{k+1}(x) \quad \text{en} \quad D_{k+1} = [0,(\frac{2}{3})^k] \\ F_{k+1}(x) < x \quad \text{si} \quad x < 0; \quad F_{k+1}(x) < 0 \quad \text{si} \quad x > (\frac{2}{3})^k, \end{cases}$$

entonces el conjunto de convergencia de la fórmula de recurrencia $X_{n+1} = F_n(X_n)$ $(n+1,2,3,\cdots)$ es también el conjunto ternario de Cantor.

Referencias

1. Y. Takeuchi, "Convergencia de sucesiones dadas por la fórmula de recurrencia del primer orden", Rev.Col.Mat XXVII (1993), 111-125.
2. Y. Takeuchi, "Regla de L'Hôpital para series", Boletín de Matemáticas (Nueva Serie) 1 (1995), 17-34.

3. Y. Takeuchi, "Estudios sistemáticos de algunas sucesiones", Matemática Enseñanza Universitaria 20 (1982), 3–74.
4. Y. Takeuchi, *Notas de seminarios sobre sucesiones y series*, Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 1994.