Boletín de Matemáticas
Nueva Serie, Volumen IV (1997), pp. 101–113

LAS OPERACIONES GENERALIZACIÓN Y RESTRICCIÓN DE CONCEPTOS

Otilio B. Mederos Anoceto
Antonio Martínez Fonseca(*)

Resumen. En la primera sección de este trabajo los autores dan una definición bastante amplia de las operaciones generalización y restricción de conceptos y de operadores, y proponen un procedimiento para la aplicación de estas operaciones. Las otras secciones se dedican a la aplicación del procedimiento propuesto en la sección uno para la obtención de diferentes generalizaciones del concepto de suma finita, y de los operadores adición finita e integración finita.

Abstract. Some abstract definitions about generalizing and restricting concepts are presented. Examples of the processes in generalization and restriction include the study of summation and integration from the finite to the infinite.

Keywords. Concepts, generalization, restriction, summability.

0. Introducción

Todo graduado universitario debe saber realizar las operaciones fundamentales con conceptos, es decir, debe saber definir, generalizar, restringir y clasificar correctamente. Sin embargo, en muy pocas carreras universitarias se desarrollan asignaturas en cuyos programas aparezca el estudio de estas operaciones y, lo que es peor, muchos de los profesores que se ven obligados a realizar estas operaciones en el desarrollo de sus cursos no tienen un dominio de las técnicas de trabajo con las mismas.

En el caso específico de la Enseñanza de la Matemática, desde los primeros grados de la Enseñanza Primaria es necesario introducir conceptos y antes de terminar esta enseñanza es necesario comenzar con la operación definición.

(*)Texto recibido 1/4/98, revisado 21/5/99. Otilio B. Mederos Anoceto, Antonio Martínez Fonseca, Departamento de Matemática, Facultad de Matemática, Física y Computación, Universidad Central de Las Villas, Santa Clara, Cuba.

Por ejemplo, en Cuba, se introducen conceptos desde el primer grado, se comienzan a definir conceptos en el sexto grado y a partir de este grado se hace uso reiterado de la operación definición. En la Enseñanza General se aplica de manera más limitada la operación generalización; sin embargo, en la enseñanza de la matemática universitaria es necesario aplicar constantemente esta operación, sobre todo en las carreras de ciencias y de ingeniería. En estas carreras es necesario realizar varias generalizaciones de un mismo concepto; en muchos casos no se explica a los estudiantes como cada una de estas generalizaciones es "mejor" que las restantes de acuerdo a un determinado criterio de "bondad". Este es el caso de los conceptos de derivada parcial, derivada direccional y matriz jacobiana que constituyen generalizaciones del concepto de derivada para funciones reales derivables de una variable real.

Otras de las dificultades que se presentan al aplicar la operación generalización se deben a que muchas veces no se ha estudiado bien el concepto que se generaliza y no se ha preparado para la generalización que se pretende; por ejemplo, muchas veces al estudiar el concepto de serie se define éste sin haber estudiado las sumas finitas y sin considerarlo como una generalización de éstas. La generalización de un concepto requiere que no sólo se prepare el concepto que se generaliza sino también que se preparen muchas de las propiedades que cumple éste; por ejemplo, las sumas finitas cumplen un conjunto de propiedades entre las que se encuentran la propiedade asociativa y la propiedad conmutativa. Es importante definir estas propiedades de forma tal que puedan ser generalizadas fácilmente a las sumas infinitas (series) y que se pueda probar si se mantienen o no estas propiedades en las series.

Muchas veces, al generalizar un concepto, se pretende que el concepto generalizado tenga la extensión más amplia posible y que al mismo tiempo mantenga el mayor número de propiedades del concepto de partida. En ocasiones, para dar cumplimiento a estos requisitos, es necesario realizar una primera generalización del concepto de partida, después una primera restricción del concepto generalizado que siga siendo una generalización del concepto de partida y así sucesivamente hasta llegar a una generalización que satisfaga nuestras necesidades.

El objetivo principal del presente trabajo es dar una definición bastante amplia de las operaciones generalización y restricción de conceptos y proponer un procedimiento para la utilización exitosa de estas operaciones y para el estudio posterior del concepto generalizado.

1. Definición de las operaciones

Se denomina extensión de un concepto a la colección $\mathcal{E}$ de todos los objetos que corresponden a ese concepto y se llama contenido de un concepto a una colección $\mathcal{C} = \{p_i\}$, $i \in I$, de propiedades que cumplen todos los elementos de $\mathcal{E}$ y sólo estos elementos. Un concepto se indica mediante un par $(\mathcal{E}, \mathcal{C})$ o por $\mathcal{E}$ cuando no haya dudas. Pueden encontrarse diferentes colecciones $\mathcal{C}$ de propiedades que sólo cumplen los elementos de $\mathcal{E}$. Cualquier otra colección $\mathcal{P}$ por la cual pueda sustituirse $\mathcal{C}$ sin alterar $\mathcal{E}$ recibe el nombre de caracterización del concepto $(\mathcal{E}, \mathcal{C})$.

Definición 1. Dado un concepto $(\mathcal{E}_1, \mathcal{C}_1)$ definido a partir del concepto $(\mathcal{E}, \mathcal{C})$, puede ser posible encontrar un concepto $(\mathcal{F}, \mathcal{D})$ y un conjunto de propiedades $\mathcal{D}_1$, tales que:

1. Existe un isomorfismo de conceptos f entre $\mathcal{E}$ y un subconjunto propio $\mathcal{E}^*$ de $\mathcal{F}$.
2. La colección $\mathcal{C}^*$ de propiedades que resultan de trasladar las propiedades de la colección $\mathcal{C}$, mediante f, implica $\mathcal{D}$.
3. $\mathcal{D}_1$ implica a $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}$ no implica a $\mathcal{D}_1$ y $\mathcal{D}_1$ determina un subconjunto propio $\mathcal{F}_1$ de $\mathcal{F}$ que tiene una intersección no vacía $\mathcal{E}_1^*$ con $\mathcal{E}$.
4. La colección $\mathcal{C}_1^*$, que resulta de restringir la colección $\mathcal{D}_1$ al conjunto $\mathcal{E}^*$, coincide con la colección de propiedades que resultan de trasladar la colección $\mathcal{C}_1$ mediante f; $\mathcal{C}_1^*$ implica $\mathcal{C}^*$ y $\mathcal{C}^*$ no implica $\mathcal{C}_1^*$.

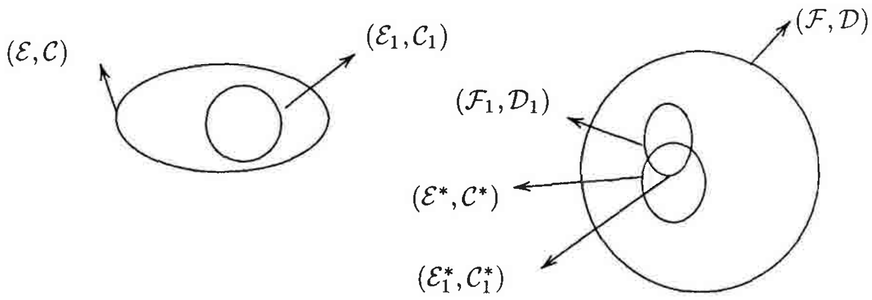

Figura 1

En tal caso se dice que el concepto $(\mathcal{F}_1, \mathcal{D}_1)$ determinado en esta forma es una *generalización* del concepto $(\mathcal{E}_1, \mathcal{C}_1)$; este último se denomina concepto de partida de la generalización o concepto que generaliza y el concepto $(\mathcal{F}_1, \mathcal{D}_1)$ recibe el nombre de concepto generalizado. Consecuentemente la generalización es una operación unaria que asocia, a un concepto, el concepto generalizado.

Las diferentes generalizaciones $(\mathcal{F}_1,\mathcal{D}_1)$ del concepto $(\mathcal{E}_1,\mathcal{C}_1)$ se logran debilitando C_1^* hasta adecuados niveles que resultan claros para el investigador que realiza la investigación.

Consideremos $(\mathcal{E},\mathcal{C}) = (\mathcal{F},\mathcal{D}) = (\mathcal{E}^*,\mathcal{C}^*)$ e iguales al concepto $F(A)$ de las funciones reales con dominio A, donde A es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}$, $(\mathcal{E}_1,\mathcal{D}_1) = (\mathcal{E}_1^*,\mathcal{C}_1^*)$ e iguales al concepto $D(A)$ de las funciones reales derivables con dominio A, $(\mathcal{F}_1,\mathcal{D}_1)$ se toma como el concepto $C(A)$ de funciones reales continuas sobre A y f como la identidad. Estos conceptos satisfacen las cinco propiedades de la definición de la operación generalización. Sin embargo, no debe considerarse que $C(A)$ constituye una generalización de $D(A)$ e independientemente de $D(A)$, es decir, no se ha obtenido aplicando las cinco propiedades de la definición de la operación de generalización.

Definición 2. Démonos un concepto $(\mathcal{F}_1,\mathcal{D}_1)$, que tiene por conjunto de partida a $(\mathcal{F},\mathcal{D})$ o que ha sido obtenido como resultado de la aplicación de la operación generalización a cierto concepto. Puede ser posible encontrar un concepto $(\mathcal{E},\mathcal{C})$ y un conjunto de propiedades $\mathcal{C}_1$ tales que:

1. Existe un isomorfismo de conjuntos f entre $\mathcal{E}$ y un subconjunto $\mathcal{E}^*$ de $\mathcal{F}$ que tiene una intersección $\mathcal{E}_1^*$ con $\mathcal{F}_1$ que es un subconjunto propio de $\mathcal{F}_1$ y de $\mathcal{E}^*$.
2. A la colección $\mathcal{C}_1$ corresponde un subconjunto $\mathcal{E}_1$ de $\mathcal{E}$ isomorfo a $\mathcal{E}_1^*$ por f.
3. A la colección $\mathcal{C}^*$ de propiedades que resultan de trasladar las propiedades de la colección $\mathcal{C}$ mediante f corresponde el subconjunto $\mathcal{E}^*$ en $\mathcal{F}$.
4. La intersección $\mathcal{E}_1^*$ de $\mathcal{E}^*$ con $\mathcal{F}_1$ es un subconjunto propio de $\mathcal{F}_1$ y de $\mathcal{E}^*$ isomorfo por f a $\mathcal{E}_1$.
5. $\mathcal{C}_1$ implica $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}$ no implica $\mathcal{C}_1$ y el traslado $\mathcal{C}_1^*$ de $\mathcal{C}_1$ por f implica $\mathcal{C}^*$ y $\mathcal{D}$, y $\mathcal{C}^*$ y $\mathcal{D}^*$ no implica $\mathcal{C}_1^*$.
6. A $\mathcal{C}_1^*$ le corresponde la extensión $\mathcal{E}_1^*$ en $(\mathcal{E}^*,\mathcal{C}^*)$.

En tal caso se dice que el concepto $(\mathcal{E}_1,\mathcal{C}_1)$ determinado en esta forma es una *restricción* del concepto $(\mathcal{F}_1,\mathcal{D}_1)$.

El concepto $(\mathcal{F}_1,\mathcal{D}_1)$ se denomina concepto de partida de la restricción y $(\mathcal{E}_1,\mathcal{C}_1)$ recibe el nombre de restricción del concepto $(\mathcal{F}_1,\mathcal{D}_1)$. La restricción es una operación unaria que asocia un concepto a otro concepto dado. Es la operación inversa de la generalización. Por razones similares a las explicadas después de la definición 1, dados dos conceptos $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$ definidos a partir de un mismo concepto $\mathcal{E}$ y tales que $\mathcal{E}_2 \subset \mathcal{E}_1$ no debe considerarse $\mathcal{E}_2$ como una restricción de $\mathcal{E}_1$.

2. Procedimientos para la aplicación correcta de las operaciones generalización y restricción de conceptos

En el desarrollo de la matemática la operación generalización se aplica más que la restricción. En muchas ocasiones se realiza un número importante de generalizaciones y restricciones para lograr una generalización fructífera de un concepto. El procedimento siguiente exhibe un conjunto de pasos para realizar un adecuado proceso de generalizaciones y restricciones y poder obtener una generalización con determinadas características.

a) Realizar un correcto estudio del concepto que se generaliza. Para dar cumplimiento a este paso hay que definir científicamente el concepto de partida de la generalización, conocer la mayor cantidad posible de propiedades de dicho concepto y prepararlo para su generalización.
b) Encontrar un concepto $(\mathcal{F}, \mathcal{D})$ y un conjunto de propiedades $\mathcal{D}_1$ que satisfagan las condiciones 1-4 de la definición de generalización.
c) Realizar un conjunto de generalizaciones y restricciones del concepto de partida. Cuando se quiere generalizar un concepto se persigue, desde el punto de vista lógico, uno (o ambos) de los objetivos siguientes:
    i- Lograr que el concepto generalizado mantenga un conjunto de propiedades similar al del concepto de partida.
    ii- Ampliar lo más posible la extensión del concepto que se generaliza.

Para el cumplimiento de estos dos objetivos se requiere, en general, realizar un conjunto de generalizaciones y restricciones. Cuando se hace una primera generalización es posible que el concepto generalizado no cumpla con una determinada propiedad del concepto de partida. Si se quiere lograr otra generalización en la que se cumpla dicha propiedad se debe determinar la restricción más amplia de la primera generalización en la que se cumpla la mencionada propiedad y esto se logra imponiendo condiciones más fuertes a la primera generalización. Luego es necesario restringir la extensión de la primera generalización a partir de un fortalecimiento del conjunto de propiedades que la caracterizan. La determinación de una generalización con tal característica muchas veces requiere de un proceso de restricción y generalización. Para dar cumplimiento al objetivo ii) se requiere de un conjunto de generalizaciones. El cumplimiento de este paso c) puede encontrarse permanentemente inconcluso, pues siempre cabe la posibilidad de una nueva generalización.

d) Utilizar un criterio de "bondad" para determinar la calidad de la(s) generalización(es) hecha(s).
   Los criterios usuales son:
    i- El cumplimiento por parte del concepto generalizado de un conjunto de propiedades del concepto de partida.

ii- La amplitud de la extensión del concepto generalizado. En este caso para determinar cuál de las extensiones de dos generalizaciones de un concepto es la más amplia y no es posible compararlas utilizando isomorfismos y la inclusión como orden, puede ser muy útil su comparación de acuerdo a la cardinalidad de las mismas.

3. Aplicaciones de las operaciones y del procedimiento

3.1 Conceptos y propiedades relacionadas con las sumas finitas.

En el trabajo [1] se preparan las sumas finitas para su generalización y se realizan varias de sus generalizaciones y restricciones. En [7] se prepara el diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
(a_1,\dots,a_n) \arrow[rrr] & & & \sum\limits_{i=1}^{n} a_i = \int\limits_{I_n} f d\mu \\
& R^n \arrow[r] & R & \\
& F(I_n) \arrow[u] \arrow[ur] & & \\
f \arrow[uuu] \arrow[uuurrr] & & &
\end{tikzcd}$$

Figura 2

para su generalización, es decir, se estudian y preparan para su generalización los objetos y morfismos de este diagrama. Como es conocido $\mathbb{R}^n$ es el conjunto de todos los elementos $(a_a,\dots,a_n)$ definidos por:

$$(a_1, a_2) = \{\{a_1\}, \{a_1, a_2\}\},$$

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{cases} (a_1, a_2) & \text{si } n = 2 \\ ((a_1, a_2, \dots, a_{n-1}), a_n) & \text{si } n > 2 \end{cases}$$

El conjunto $\mathbb{R}^n$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con la adición y el producto por un escalar definidos respectivamente por $((a_1,\dots,a_n),(b_1,\dots,b_n))$ $((a_1,\dots,a_n)+(b_1,\dots,b_n)) = (a_1+b_1,\dots,a_n+b_n)$ y $(\alpha(a_1,\dots,a_n))$ $\alpha(a_1,\dots,a_n) = (\alpha a_1,\dots,\alpha a_n)$.

La colección $F(I_n)$ de todas las funciones reales con dominio $I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con la suma y el producto por un escalar heredados de $\mathbb{R}$. El morfismo f_n definido sobre $F(I_n)$ por $f_n(g) = (g_{(1)}, \ldots, g_{(n)})$ es un isomorfismo entre los espacios vectoriales $F(I_n)$ y $\mathbb{R}^n$. El morfismo S_n se denomina operador adición sobre $\mathbb{R}^n$ y se define sobre $\mathbb{R}^n$ por $(a_1, \ldots, a_n)$ $S_n(a_1, \ldots, a_n) = \sum_{i=1}^{n} a_1$, y por $f \to \int_{I_n} f d\mu = \sum_{i=1}^{n} f(i)$, se define sobre $F(I_n)$ el morfismo $\int_{I_n} d\mu$ que recibe el nombre de operador integración finita. Los operadores S_n y $\int_{I_n} d\mu$ son aplicaciones lineales. Consecuentemente el diagrama 2 es un diagrama conmutativo en la categoría de los espacios vectoriales.

A continuación se expone un resumen de la preparación que se hace en [7] para la generalización de los objetos y los morfismos del diagrama 2, de forma tal que se obtenga un diagrama que generalice las sumas finitas a sumas infinitas. De acuerdo a la definición de $(a_1, \ldots, a_n)$ se tiene que $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \{\{a_1\}, \{a_1, \{\{a_2\}, \{a_2 \ldots \{\{a_{n-1}\}, \{a_{n-1}, a_n\} \ldots\}\}\}\}\}$. Esta igualdad sugiere la consideración de la colección $\mathbb{R}^\infty$ de todos los elementos de la forma $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots) = \{\{a_1\}, \{a_1, \{\{a_2\}, \{a_2 \ldots \{\{a_n\}, \{a_n, \ldots\} \ldots\}\}\}\}, a_i \in \mathbb{R}$, $i \in N$. Se trata de un espacio vectorial con la suma y el producto por un escalar definidos por $(a_1, \ldots, a_n, \ldots) + \{(b_1, \ldots, b_n, \ldots) = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n, \ldots)$ y $\alpha(a_1, \ldots, a_m, \ldots) = (\alpha a_1, \ldots, \alpha a_n, \ldots)$ respectivamente, que generaliza el espacio $\mathbb{R}^n$. En efecto, sean $(\mathcal{E}, \mathcal{C})$ la colección de los conjuntos de cardinalidad 2, cuyos elementos son conjuntos finitos, y $(\mathcal{F}, \mathcal{D})$ la colección de los conjuntos de cardinalidad 2, cuyos elementos son un conjunto finito y un conjunto infinito, y sean $(\mathcal{E}_1, \mathcal{C}_1) = \mathbb{R}^n$, $(\mathcal{F}_1, \mathcal{D}_1) = \mathbb{R}^\infty$, $(\mathcal{E}^*, \mathcal{C}^*) = \{(a_1, \ldots, a_n, \ldots);\ a_i \in \mathbb{R}$ y $a_k = 0,\ k > n\}$. Obviamente el isomorfismo f de la definición 1 se define aquí por $f(a_1, \ldots, a_n) = (a_1, \ldots, a_n, 0, \ldots)$. Debido a que los elementos de $\mathbb{R}^\infty$ son conjuntos complicados, prácticamente no se utiliza esta generalización de $\mathbb{R}^n$. Sin embargo, muchos no son capaces de explicar correctamente por qué no se utiliza la generalización y cómo se definen sus elementos $(a_1, \ldots, a_n, \ldots)$.

La generalización natural de $F(I_n)$ es el espacio $F(\mathbb{N})$ de todas las funciones reales definidas sobre $\mathbb{N}$; y la generalización natural de F_n es el isomorfismo f definido sobre $F(\mathbb{N})$ por $f(g) = (g(1), \ldots, g(n), \ldots)$. Como se verá después, la generalización de los operadores S_n y $\int_{I_n} d\mu$ no es tan fácil. Con ese objetivo se deben estudiar las propiedades fundamentales de estos operadores y de sus imágenes respectivas teniendo en cuenta que se quieren generalizar. Las propiedades deben plantearse de forma tal que se facilite su generalización. Consideramos que se deben estudiar las propiedades aditiva, de homogeneidad, de linealidad, conmutativa, triangular, distributiva, telescópica, asociativa, disociativa, de cancelación e inclusión de ceros, así como las desigualdades más importantes relacionadas con estos conceptos: desigualdad de Cauchy–Schwarz, Hölder, Minkowski y las relaciones entre las medias.

A continuación se preparan para su generalización alguna de estas propiedades.

Propiedad conmutativa. Esta propiedad de los elementos de $\mathbb{R}$ es usual enunciarla de la forma siguiente: la suma de n elementos es independiente del orden en que se sumen. De esta forma es muy difícil generalizarla a un número infinito de elementos de $\mathbb{R}$, en caso que esta suma tenga sentido. La propiedad conmutativa, en términos de los operadores S_n y $\int_{I_n} d\mu$ y de su imagen la suma, debe definirse de la forma siguiente:

Para toda biyección h de I_n en sí mismo se cumple que:

$$S_n(a_{h(1)}, \dots, a_{h(n)}) = S_n(a_1, \dots, a_n)$$
$$\int_{I_n} (foh)(k) d\mu(k) = \int_{I_n} f(k) d\mu(k)$$
$$\sum_{k=1}^{n} a_{h(k)} = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Las propiedades asociativa y disociativa. Una buena manera de definir estas propiedades con vistas a su generalización es la siguiente: si m y n son números naturales tales que $m < n$, $h : I_m \to I_n$ es una función estrictamente creciente, tal que $h_{(m)} = n$, $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $b_1 = \sum_{k=1}^{h(1)} a_k$, $b_2 = \sum_{k=h(1)+1}^{h(2)} a_k, \dots, b_m = \sum_{k=h(n-1)+1}^{h(n)} a_k$, entonces

$$\int_{I_n} f(k) d\mu(k) = \sum_{j=1}^{n} \int_{[h(j-1)+1, h(j)]} f(k) d\mu(k) = \sum_{j=1}^{m} g(j) d\mu(j)$$

donde $g(j) = \int_{[h(j-1)+1,h(j)]} f(k) d\mu(k)$, $b_n(a_1, \dots, a_n) = S_m(S_{h(1)}(a_1, \dots, a_{h(1)}), \dots, S_{h(m)-h(m-1)} \ (a_{h(m-1)+1}, \dots, a_{h(m)}))$ y $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{k=h(j-1)+1}^{h(j)} a_k \right) = \sum_{j=1}^{m} b_j$.

La suma $\sum_{j=1}^{m} b_j$ se dice que se obtuvo de la suma $\sum_{k=1}^{n} a_k$ por introducción de paréntesis y, recíprocamente, la suma $\sum_{k=1}^{n} a_k$ se dice que se obtuvo de la suma $\sum_{j=1}^{m} b_j$ por supresión de paréntesis.

La primera (segunda) de estas propiedades se llama propiedad asociativa (disociativa) de la suma de n números (m números).

Las propiedades de cancelación e introducción de ceros. Si $h : I_m \to I_n$, $m < n$, $m, n \in \mathbb{N}$ es una función estrictamente creciente, entonces

$$\sum_{j=1}^{m} a_j = \sum_{k=1}^{n} b_k \text{ donde } b_k = \begin{cases} a_j, & \text{si existe } j \text{ tal que } h(j) = k \\ 0, & \text{si no existe } j \text{ tal que } h(j) = k. \end{cases}$$

La suma de la derecha en la igualdad anterior se dice que es una suma que se obtiene incluyendo ceros entre los elementos de la suma de la izquierda y recíprocamente se dice que la suma de la izquierda es una suma que se obtiene de la suma de la derecha cancelando ceros. Obviamente:

$$S_m(a_1,\dots,a_m) = S_n(b_1,\dots,b_n) \text{ y si}$$

$$g(k) = \begin{cases} f(j), & \text{si existe } j \text{ tal que } h(j) = k \\ 0, & \text{si no existe } j \text{ tal que } h(j) = k \end{cases} \quad \text{entonces}$$

$$\int_{I_n} f(j)d\mu(j) = \int_{I_n} g(k)d\mu(k).$$

3.2 Las series numéricas.

En esta subsección se realiza la anunciada generalización de las sumas finitas, así como de los operadores S_n e $\int_{I_n} d\mu$.

3.2.1 Generalizaciones.

Dado un elemento f de $F(\mathbb{N})$ tal que $f(k) = a_k$, $a_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, es usual utilizar la notación $\{a_k\}$ para indicar f y darle el nombre de sucesión. Dada una sucesión $\{a_k\}$, para cada n de $\mathbb{N}$ se tiene que $(a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{R}^n$ y consecuentemente $S_n(a_1,\dots,a_n) = \sum_{k=1}^{n} a_k$ es un número que se indicia por s_n. Por lo tanto a cada elemento $\{a_k\}$ de $F(\mathbb{N})$ se le asocia el elemento $\{s_n\}$ de $F(\mathbb{N})$. La sucesión $\{a_k\}$ se dice que es sumable si y solo si $\{s_n\}$ converge. El límite s de $\{s_n\}$ recibe el nombre de suma de la sucesión $\{a_k\}$ y se indica por cualesquiera de los símbolos siguientes:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots, \sum a_k, \sum_{k\geq 1} a_k, \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Estos símbolos se utilizan también para denotar la sucesión $\{s_n\}$ que recibe el nombre de serie. La colección de los elementos (las sucesiones) de $F(\mathbb{N})$ sumables se indica por $S(\mathbb{N})$. La imagen por F de $S(\mathbb{N})$ se indica por $\mathbb{R}_S^{\infty}$. El operador S se define sobre $\mathbb{R}_S^{\infty}$ por $S(a_1,\dots,a_n,\dots) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = s$. Y el operador de integración se define por $\int_{k=1}^{\infty} f(k)$. Luego, se tiene el diagrama conmutativo:

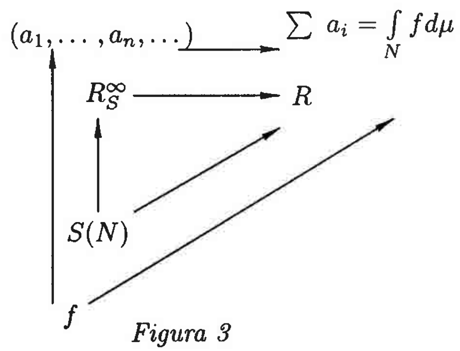

Figura 3

Se prueba en [7] que los vértices y las flechas de la figura 3 son las generalizaciones de los vértices y las flechas correspondientes en la figura 2.

3.2.2. Propiedades de los operadores S e $\int_N d\mu$ y de su imagen la suma.

1- La propiedad aditiva:
Sean $\{a_k\}$ y $\{b_k\}$ elementos de $\mathbb{R}_S^\infty$, f y g elementos de $S(\mathbb{N})$. Se tienen las igualdades:

$$S(\{a_k+b_k\}) = S(\{a_k\}) + S(\{b_k\})$$
$$\int_N (f+g)(k)d\mu(k) = \int_N f(k)d\mu(k) + \int_N g(k)d\mu(k)$$
$$\sum(a_k+b_k) = \sum a_k + \sum b_k.$$

2- La propiedad de homogeneidad.
Para todo $\{a_k\}$ de $\mathbb{R}_S^\infty$, $f \in S(\mathbb{N})$, $c \in \mathbb{R}$, se tiene que:

$$S(c\{a_k\}) = cS(\{a_k\})$$
$$\int_N (f+g)(k)d\mu(k) = \int_N f(k)d\mu(k) + \int_N g(k)d\mu(k)$$
$$\sum(a_k+b_k) = \sum a_k + \sum b_k.$$

3- La propiedad conmutativa:
Se denomina reordenación de un elemento $\{a_n\}$ de $\mathbb{R}_S^\infty$ (un elemento f de $S(\mathbb{N})$, una serie $\sum a_n$, respectivamente) a todo elemento $\{b_n\}$ de $\mathbb{R}_S^\infty$ (todo elemento g de $S(\mathbb{N})$, toda serie $\sum b_n$, respectivamente), para el cual existe una aplicación biyectiva $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que: $b_{h(n)} = a_n$, $n \in \mathbb{N}$, $(fog)\ (n) = g(n)$. Un elemento $\{a_n\}$ de $\mathbb{R}_S^\infty$, (un elemento f de $S(\mathbb{N})$, una serie $\sum a_n$ convergente respectivamente), tal que cualesquiera de sus reordenaciones $\{b_n\}$, (g, $\sum b_n$ respectivamente) pertenece a $\mathbb{R}_S^\infty$ (pertenece a $F(\mathbb{N})$, mantiene el mismo carácter respectivamente) y $S(\{a_n\}) = S(\{b_n\})(\int_N f(k)d\mu(k) = \int_N g(k)d\mu(k), \sum a_n$ y $\sum b_n$ convergen al mismo valor respectivamente), se dice que cumplen la ley conmutativa. Los elementos $\{a_n\}$ de $\mathbb{R}_S^\infty$ y f de $S(\mathbb{N})$ y las series convergentes $\sum a_n$ no cumplen en general la ley conmutativa.

Teorema (de Riemann). Para cualquier serie $\sum a_n$ condicionalmente convergente, su término se puede reordenar de tal forma que la nueva serie obtenida converja a cualquier número real o que sea divergente.

4- Las propiedades asociativa y disociativa.
Se dice que $\{b_n\}$ (g, $\sum b_n$ respectivamente) se obtiene de $\{a_n\}$ ($g, \sum a_n$ respectivamente) por supresión de paréntesis si existe una función estrictamente creciente $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que: $b_1 = g(1) = \sum_{k=1}^{h(1)} f(k) =$

$\sum_{k=1}^{h(1)} a_k$, $b_2 = \sum_{k=h(1)+1}^{h(2)} a_k, \dots, b_m = \sum_{k=h(n-1)+1}^{h(n)} a_k, \dots$ y consecuentemente se cumple que $\{b_n\} \in \mathbb{R}_S^\infty$ y $g \in S(\mathbb{N})$. Recíprocamente, se dice que $\{b_m\} \in \mathbb{R}_S^\infty$ ($g \in S(\mathbb{N})$, $\sum b_m$, respectivamente) cumple la propiedad disociativa, si toda $\{a_n\}$ (f, $\sum a_n$ respectivamente) que se obtiene de $\{b_n\}$ ($g, \sum b_n$ respectivamente) por supresión de paréntesis cumple: $S(\{a_n\}) = S(\{b_n\})$,($\int_N f(k)d\mu(k) = \int_N g(j)d\mu(j) = \sum_{j\geq 1} \int_{[h(j-1)+1,h(j)]} f(k)d\mu(k), h(0) = 1, \sum a_n = \sum b_m = \sum_{j\geq 1} \sum_{k=h(j-1)+1}^{h(j)}$, respectivamente).

Teorema. Los elementos $\{a_n\}$ (f respectivamente) de $\mathbb{R}_S^\infty$ ($S(\mathbb{N})$ respectivamente) y su imagen la serie cumplen las propiedades asociativas y disociativas.

Se cumple además que si $\sum a_n$ es una serie divergente tal que $\lim s_n = +\infty$ entonces toda serie $\sum b_n$ obtenida de $\sum a_n$ por introducción de paréntesis es divergente y $\lim s_n^k = +\infty$; o sea, que se cumple también para estas series la propiedad asociativa. En la serie divergente $\sum(-1)^n$, se pueden introducir paréntesis de dos formas diferentes y obtener dos nuevas series, una convergente a cero y otra convergente a uno, lo que nos permite afirmar que las series divergentes, sin suma infinita, no cumple en general la ley asociativa.

La propiedad disociativa de las sumas finitas y de los operadores S_n e $\int_{I_n}$ no se cumple para las series convergentes ni para S e $\int_N$. En efecto, de la serie convergente:

$$0 + 0 + \cdots + 0 + \cdots$$

que corresponde a la serie

$$(1-1) + \cdots + (1-1) + \cdots ,$$

se obtiene por supresión de paréntesis la serie divergente $\sum(-1)^{n+1}$; sin embargo, si se imponen restricciones adicionales a $\sum a_n$ y a la aplicación h, pueden suprimirse paréntesis.

Teorema. Si $\sum a_n$ se obtiene de $\sum b_m$ por supresión de paréntesis, si existe una constante positiva M tal que $h(n-1) - h(n) < M$ para todo número natural n y $\lim a_n = 0$, y si $\sum b_m$ es convergente, entonces $\sum a_n$ es convergente.

5- Las propiedades de cancelación e introducción de ceros.

Dada una sucesión $\{a_n\}$ ($g \in S(\mathbb{N})$) y una función estrictamente creciente $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$; la sucesión $\{b_n\}$ ($g \in S(\mathbb{N})$) definida por: $f(n) = b_n = \begin{cases} a_m, & \text{si existe } m \text{ tal que } h(m) = n \\ 0, & \text{si no existe } m \text{ tal que } h(m) = n \end{cases}$, se dice que es una sucesión (un elemento de $S(\mathbb{N})$) que se forma incluyendo ceros entre sus elementos (en su imagen). Dada la sucesión $\{b_n\}$ se dice que $\{a_n\}$ ($f \in S(\mathbb{N})$) se obtiene de $\{b_n\}$ mediante la supresión de ceros (eliminando el cero de la imagen de g).

3.2.3. Restricciones y generalizaciones de los conceptos de sucesión sumable, sucesión integrable y de serie convergente.

Las series convergentes (los elementos de $\mathbb{R}_S^\infty$, los elementos de $S(\mathbb{N})$, respectivamente) presentan dos dificultades:

1- No son muchas.

2- No cumple en general la ley conmutativa.

Para salvar estas dos dificultades hay que tomar direcciones contrarias. Para aumentar el número de estos elementos se debe generalizar el concepto respectivo y para que se cumpla la ley conmutativa hay que restringir estos conceptos.

Una restricción importante del concepto de sucesión sumable (sucesión integrable, serie convergente) es la siguiente:

- *Sucesiones absolutamente sumables, sucesiones absolutamente integrables y series absolutamente convergentes.* La convergencia de la serie $\sum b_n$ no implica la convergencia de la serie $\sum |b_n|$; por ejemplo, la serie $\sum (-1)^n \frac{1}{n}$ es convergente y se sabe que la serie de sus módulos $\sum \frac{1}{n}$ es divergente.

Teorema. Si $\{|b_n|\} \in \mathbb{R}_S^\infty$, entonces $\{b_n\} \in \mathbb{R}_S^\infty$ y se cumple además que $|\sum b_n| \leq \sum |b_n|$.

Definición. Un elemento $\{b_n\}$ de $\mathbb{R}_S^\infty$ se llama absolutamente sumable si $\{|b_n|\} \in \mathbb{R}_S^\infty$ y se denomina condicionalmente sumable si $\{b_n\} \in \mathbb{R}_S^\infty$ y $\{|b_n|\}$ no pertenece a $\mathbb{R}_S^\infty$. La colección de las sucesiones absolutamente sumables se indica por $\mathbb{R}_{as}^\infty$. Resulta fácil comprobar que se ha realizado una restricción de $\mathbb{R}_S^\infty$.

- *Sumabilidad Cesaro.* El siguiente resultado es una generalización del concepto de sucesión sumable.

Teorema. Si $\lim a_n = l$, entonces $\lim \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = l$ para $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Sumabilidad Cesaro de orden cero. Una sucesión $\{a_n\}$ es sumable Cesaro de orden cero si su imagen $\{s_n\}$ por el operador

$$T_0 = \begin{pmatrix} 100\cdots \\ 1100\cdots \\ 1110\cdots \\ \cdots\cdots \end{pmatrix} = \left(t_{nm}^{(0)}\right) \qquad t_{nm}^{(0)} = \begin{cases} 1 & \text{si } n \leq m \\ 0 & \text{si } n > m \end{cases}$$

es una sucesión convergente. Este proceso puede extenderse a cualquier orden k formando una cadena de generalizaciones [1].

Observaciones generales.

1. Los autores consideran que las definiciones de las operaciones generalización y restricción, por ellos presentadas, llenan un vacío en la Didáctica de la Matemática Superior, pues no existía una definición de estas operaciones lo suficientemente amplia para que todos los casos que se denominan generalizaciones (restricciones) de un concepto, correspondan a la aplicación de una operación definida con anterioridad.
2. Generalmente se define un concepto en una asignatura de matemática y se realizan las generalizaciones y restricciones, sin que quede claro que los nuevos conceptos obtenidos son generalizaciones del concepto original. En el caso de las series numéricas, la situación que muchas veces se presenta es que no se ha estudiado el concepto de suma finita o no se ha preparado para su generalización.
3. La operación de generalización y el procedimiento para su aplicación expuestos en el trabajo no deben confundir al investigador, pues no se puede afirmar que un concepto se obtuvo de otro por una generalización por el solo hecho de que su extensión contenga a la del otro.

Referencias

1. O. Mederos e I. García, "Fundamenteos de series numéricas, Cuadernos de investigación (Septiembre, 1995), Universidad Autónoma de Coahuila, México, 5–123.
2. S. Ballester y otros, *Metodología de la Enseñanza de la Matemática I*, Ciudad Habana. Ministerio de Educación, 1992.
3. K. Ballester y otros, *Metodología de la Enseñanza de la Matemática II*, México. Universidad de Sinaloa, 1993.
4. E. Geissler, *Metodología En la Enseñanza de la Matemática*, Ciudad Habana. Pueblo y Educación, 1979.
5. L. Kudriatsev, *Curso de Análisis Matemático*, Moscú: Mir, 1983.
6. N. Voroviob, *Teoría de series*, Moscú: Nauka (en ruso), 1979.
7. A. Martínez, *Aplicación de las técnicas de trabajo con conceptos al estudio de los dominios numéricos y las series en la formación de profesores en Matemáticas*, Tesis de maestría no publicada, UCLV, Cuba, 1997.