Boletín de Matemáticas
Nueva Serie, Volumen VI No. 1 (1999), pp. 53–67

TRABAJO DE GRADO

INTEGRACIÓN CON MARTINGALAS USANDO ANÁLISIS NO ESTÁNDAR

DWIGHT OSPINA(*)

Resúmen. Esbozamos una teoría de integración estocástica para martingalas usando análisis no estándar y se relaciona esta teoría con la teoría estándar.

Abstract. We sketch an stochastic integration theory for martigales using non standard analysis and relating this with the standard one.

Keywords Stochastic Integration, Martingales, Brownian Motion.

1. Introducción

Introducimos, inicialmente, la teoría de integración estocástica con análisis no estándar estableciendo la relación entre ésta teoría y la que usualmente se hace en análisis estándar. En primer lugar definimos la integral de X con respecto a Y

$$\int X dY,$$

donde X y Y son procesos estocásticos definidos sobre $\Omega \times T$, a valor en ${}^*\mathbb{R}$; entendiendo que Ω es un espacio de probabilidad hiperfinito $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, y que T es una línea hiperfinita de tiempo. Por su parte ${}^*\mathbb{R}$ es la extensión de $\mathbb{R}$,

(*) Trabajo recibido 131/05/00, revisado 2/06/00. Dwight Ospina, Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia; e-mail: dwighto@matematicas.unal.edu.co
Resumen de trabajo de grado (ver [8]), dirigido por Myriam Muñoz de Özak.

en la cual se incluyen números infinitesimales e infinitos, es decir, ${}^*\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}$ se relacionan mediante la inyección

$$\begin{aligned} * : V(\mathbb{R}) &\to V({}^*\mathbb{R}) \\ A &\mapsto {}^*A, \end{aligned}$$

donde $V({}^*\mathbb{R})$ es la superestructura obtenida a partir de ${}^*\mathbb{R}$.

En segunda instancia se consideran las λ^2-martingalas concentrando la teoría en lo que en análisis estándar corresponde a los espacios L^2. Los hechos centrales de esta sección son, primero que si M es una λ^2-martingala S-continua, entonces bajo ciertas condiciones sobre X, $\int XdM$ también es S-continua. El segundo hecho es que M es una λ^2-martingala S-continua si y sólo si su variación cuadrática lo es.

Introducir la noción de levantamiento será la siguiente tarea , nos daremos procesos estándar correspondientes a los no estándar, teniendo de esta manera asignación entre conceptos estándar y conceptos no estándar; *"predecible en estándar" es ser no anticipante en no estándar,* por ejemplo. Encontraremos que tener un proceso estándar continuo y adaptado equivale a tener un proceso no anticipante no estándar y éste es precisamente un levantamiento del proceso estándar.

Lo cuarto; encontrar representantes no estándar a la hora de integrar para los procesos estándar, es decir hallaremos Y con la característica bien de que

$$\int Xd\,{}^oM^+ = {}^o\left(\int YdM\right)^+,$$

o al menos que

$$\int XdN = {}^o\left(\int YdM\right)^+,$$

para algún proceso N relacionado con M.

El último paso consistirá en el estudio de la situación recíproca del literal anterior. Encontrar un representante estándar para un proceso no estándar dado. Nos limitaremos aquí al caso en que la martingala es la caminata aleatoria de Anderson, caso en el cual el proceso N resulta ser un movimiento browniano.

La matemática no estándar representa una herramienta que facilita la integración estocástica; es posible llevar preguntas de la integración estocástica estándar a la no estándar resolverlas de manera sencilla y regresar, si fuere necesario, a la matemática estándar.

2. Principios de análisis no estándar

Se introduce inicialmente un poco de matemática no estándar.

Definición 2.1. Un *objeto interno* A es un elemento de $V({}^*\mathbb{R})$ tal que $A = {}^*S$, o $A \in {}^*S$, $S \in V(\mathbb{R})$. Un conjunto en $V({}^*\mathbb{R})$ que no es interno se dice externo.

Proposición 2.1 (Principio de extensión). El conjunto ${}^*\mathbb{R}$ es una extensión propia de $\mathbb{R}$ y la aplicación $* : V(\mathbb{R}) \to V({}^*\mathbb{R})$ es una inyección tal que ${}^*r = r$ para todo $r \in \mathbb{R}$.

Proposición 2.2 (Principio de transferencia). Para toda fórmula Φ en el lenguaje de la teoría de conjuntos con cuantificadores acotados vale lo siguiente: Si $A_1,\ A_2, \dots A_n$ son elementos en $V(\mathbb{R})$, entonces $\Phi(A_1, \dots, A_n)$ vale en $V(\mathbb{R})$ si y solo si
$$\Phi({}^*A_1, \dots, {}^*A_n)$$
vale en $V({}^*\mathbb{R})$.

Definición 2.2 (κ-saturación). Sea κ un cardinal infinito. Una extensión no estándar se dice κ-saturada si para toda familia $\{X_i\}_{i \in I}$, con $card(I) < \kappa$, y propiedad de intersección finita, se tiene que $\cap_{i \in I} X_i \neq \emptyset$.

Proposición 2.3 (Principio de definición interna). Sea $\Phi(X, X_1, \dots, X_n)$ una fórmula con cuantificadores acotados, si $B,\ A_1, \dots, A_n$ son conjuntos internos, entonces el conjunto
$$\{b \in B : \Phi(b, A_1, \dots, A_n) \text{ vale en } V({}^*\mathbb{R})\}$$
es interno.

Proposición 2.4 ("Overflow"). Si ${}^*\mathbb{N} \supseteq A \supseteq \mathbb{N}$ y A es interno, entonces existe $H \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ tal que $H \in A$. Si un conjunto interno A contiene todos los infinitesimales positivos, entonces A contiene algún real estándar positivo.

Proposición 2.5 ("Underflow "). Si ${}^*\mathbb{N} \supseteq A \supseteq {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ y A es interno, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \in A$.

Proposición 2.6. Sea $\{C_n\}$ una sucesión contable de conjuntos internos, entonces $\{C_n\}$ se puede extender a una sucesión interna $\{C_n\}_{n \in {}^*\mathbb{N}}$.

Proposición 2.7 (Lema de Robinson). Sea $F : {}^*\mathbb{N} \to {}^*\mathbb{R}$ una función interna tal que para todo $n \in N$, $F(n) \approx 0$, entonces existe $\eta \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$, $\eta \in A$ tal que para todo $H \leq \eta$, se tiene que $F(H) \approx 0$.

El sistema $({}^*\mathbb{R}, {}^*+, {}^*\cdot, {}^*\leq)$ extiende a $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ como cuerpo ordenado. En general se omitirá el $*$ para las operaciones y la relación de orden.

Definición 2.3. Decimos que el conjunto T es S-denso en ${}^*[0,1]$ si se cumple que
$$\{\ {}^\circ t : t \in T,\ 0 \leq\ {}^\circ t \leq 1\} = [0,1]$$
y $ns(T) := \{s \in {}^*[0,1] : \exists t \in T \text{ con } s \approx t\}$. Con T denotaremos un subconjunto interno S-denso de ${}^*[0,1]$.

Definición 2.4. En $^*\mathbb{R}$ se distinguen tres tipos de números:
(a) $x \in {}^*\mathbb{R}$ es infinitesimal , si $|x| < r$ para cada $r \in \mathbb{R}^+$.
(b) $x \in {}^*\mathbb{R}$ es finito, si existe un número real $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $|x| < r$.
(c) $x \in {}^*\mathbb{R}$ es infinito, si $|x| > r$ para cada $r \in \mathbb{R}^+$. Para cada número finito $x \in {}^*\mathbb{R}$ asociamos un único número real $r := st(x) := {}^o x$ tal que $x = r + \epsilon$, donde ϵ es infinitesimal. Decimos que x esta infinitamente cerca de y y escribimos $x \approx y$ si y sólo si $x - y$ es infinitesimal.

Las letras mayúsculas H, F, X, etc. denotarán funciones internas y procesos, las minúsculas funciones y procesos estándar. Con $\mathbb{N}$ denotamos el conjunto de los naturales $\{1, 2, \dots\}$, sin el cero y $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Los elementos de $\mathbb{N}_0$ se denotan con $n, m, l, etc \dots$, mientras que los elementos de $^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ se denotarán con η, N, etc ... .

Definición 2.5. Para un conjunto dado A, $^*A$ es la extensión elemental de A. $ns(^*A)$ denota los puntos que están "estándar cerca"de $^*A$, es decir,

$$x \in {}^*A \Leftrightarrow \exists y \in A \text{ tal que } x \approx y.$$

Para una función dada f, $^*f$ se define como la extensión elemental de f.

Definición 2.6. Sea $A \subseteq {}^*\mathbb{R}$ un conjunto interno. A es hiperfinito si existen $H \in {}^*\mathbb{N}$ y una biyección interna $F : A \to \{0, 1, \dots, H - 1\}$. En este caso A tiene cardinalidad interna H y escribimos $|A| = H$.

Proposición 2.8. Sean A y B conjuntos hiperfintos con cardinalidades interna H y N respectivamente; entonces:
(i) $A \times B$ es hiperfinito con $|A \times B| = HN$.
(ii) $B^A = \{F : A \to B \,:\, F \text{ es función interna}\}$ es hiperfinito y su cardinalidad es N^H.
(iii) $A \cup B$, $A \cap B$ son hiperfinitos.
(iv) Si A es hiperfinito y $C \subseteq A$ es interno, entonces C también es hiperfinito.

Definición 2.7. Sea Ω un conjunto hiperfinito, sobre Ω definimos lo siguiente:
(a) $\mathfrak{A} = \{A \subseteq \Omega \,:\, A \text{ es interno }\}$.
(b) Si $A \in \mathfrak{A}$, definimos una aplicación a valor no estándar por $\bar{P}(A) := \frac{|A|}{|\Omega|}$.

$\mathfrak{A}$ es una $^*\sigma$-álgebra, es un álgebra, pero no es una σ-álgebra (no es cerrada para uniones enumerables sino para hiperfinitas). Se define a partir de $\bar{P}$ una función a valor real P sobre $\mathfrak{A}$ por medio de la fórmula:

$$P(A) := st(\bar{P}(A)).$$

P es finitamente aditiva y toma valores en $[0, 1]$.

Definición 2.8. Sea $A \subseteq \Omega$, se define la *probabilidad interior* de A como:

$$P_{in}(A) = \sup\{P(B) \,:\, B \text{ es interno y } B \subseteq A\},$$

análogamente la probabilidad exterior de A se define como

$$P_{ex}(A) = \inf\{P(B) \ : \ B \text{ es interno y } B \supseteq A\}.$$

Decimos que A es *Loeb medible* si $P_{in}(A) = P_{ex}(A)$ y en este caso denotamos por $L(P)(A)$ el valor común. El conjunto de todos los subconjuntos de Ω que son Loeb medibles se denota por $L(\Omega)$.

Se puede extender, por Caratheodory, este espacio de manera que se obtenga un espacio completo, mediante el siguiente teorema.

Teorema 2.1. $(\Omega, L(\Omega), L(P))$ *es un espacio de probabilidad completo que extiende a* $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$.

Representación de la medida de Lebesgue

Sea $H \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ y $\delta = 1/H!$, δ es infinitesimal positivo. Sea

$$T = \{0, \delta, 2\delta, \ldots, (H! - 1)\delta, 1\},$$

T es hiperfinito de cardinalidad $H! + 1$. T es una línea discreta. Se puede obtener un espacio de probabilidad $(T, L(T), L(P))$ y establecer relación entre este espacio y el espacio $([0,1], \mathfrak{L}([0,1]), \lambda)$; en donde $\mathfrak{L}([0,1])$ es la σ-álgebra de Lebesgue sobre $[0,1]$ y λ es la medida de Lebesgue sobre $\mathfrak{L}([0,1])$. Si $r \in [0,1]$ y es racional, entonces $r \in T$; y si r es irracional, entonces existe k, $1 \leq k \leq H!$, $k \in {}^*\mathbb{N}$ tal que $k\delta < r < (k+1)\delta$ por ello ${}^oT = \{{}^ot \ : \ t \in T\} = [0,1]$.

Proposición 2.9. Sea $st : T \to [0,1]$, $st(t) = {}^ot$; se tiene las siguientes propiedades para st

(i) st es una función sobreyectiva.
(ii) $(st)^{-1}$ conmuta con uniones, intersecciones y complementos.
(iii) Si $A \subseteq [0,1]$, entonces $A = st((st)^{-1}(A))$.
(iv) Si $B \subseteq T$, entonces $st^{-1}(st(B)) \supseteq B$.

Proposición 2.10. Sea $A \subseteq [0,1]$. A es Lebesgue medible si y sólo si $st^{-1}(A) \in L(T)$ y en ese caso $\lambda(A) = L(P)((st)^{-1}(A))$.

3. Integración estocástica

Los detalles de las demostraciones y las demostraciones omitidas pueden consultarse en [8].

Un proceso estocástico es una aplicación interna

$$X : \Omega \times T \to {}^*\mathbb{R},$$

T es una línea de tiempo hiperfinita, $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ es un espacio de probabilidad hiperfinito.

Sea T una línea de tiempo hiperfinita

$$T := \{t_0, t_1, \dots, t_\xi\},$$

donde $0 = t_0 < t_1 < \dots t_\xi = 1$ y $t_{i+1} - t_i \approx 0$ para cada i. Se escribirá

$$\Delta X(\omega, t_i) := X(\omega, t_{i+1}) - X(\omega, t_i).$$

Si $s = t_i$, $t = t_j$

$$\sum_{r=s}^{t} X(\omega, r) := X(\omega, t_i) + X(\omega, t_{i+1}) + \cdots + X(\omega, t_{j-1}). \tag{3.1}$$

La integral se define por

$$\int_0^t X dY := \sum_{s=0}^{t} X(s)\Delta Y(s). \tag{3.2}$$

con X, Y procesos internos de $\Omega \times T$ en ${}^*\mathbb{R}$.

Definición 3.1. Una *filtración interna* sobre Ω con conjunto de índices T, es una tupla $(\Omega, \{\mathfrak{A}_t\}_{t\in T}, P)$, donde $\{\mathfrak{A}_t\}_{t\in T}$ es una familia interna creciente de subálgebras de $\mathfrak{A}$ sobre Ω.

Definición 3.2. Un proceso interno $X : \Omega \times T \to {}^*\mathbb{R}$ es *no anticipante* con respecto a la filtración $(\Omega, \{\mathfrak{A}_t\}_{t\in T}, P)$ si, fijando t, la aplicación

$$\begin{aligned} X_t :\ & \Omega \to {}^*\mathbb{R} \\ & \omega \mapsto X(\omega, t) \end{aligned} \tag{3.3}$$

es $\mathfrak{A}_t$-medible para todo $t \in T$.

Para cada $t \in T$, se introduce la relación de equivalencia $\sim_t$ sobre Ω definida por

$$\omega \sim_t \omega', \qquad \text{si y sólo si } (\forall A \in \mathfrak{A}_t)(\omega \in A \Leftrightarrow \omega' \in A). \tag{3.4}$$

Proposición 3.1. X es no anticipante si y solo si $X(\omega, t) = X(\omega', t)$, siempre que $\omega \sim_t \omega'$.

Definición 3.3. $M : \Omega \times T \to {}^*\mathbb{R}$ es una *martingala* con respecto a la filtración $(\Omega, \{\mathfrak{A}_t\}_{t\in T}, P)$, si es no anticipante y para todo $s, t \in T$, $s < t$ y para todo $A \in \mathfrak{A}_s$

$$E(1_A(M_t - M_s)) = 0. \tag{3.5}$$

El siguiente teorema garantiza la posibilidad de obtener una martingala integrando un proceso no anticipante con respecto a otra martingala.

Proposición 3.2. Si X es no anticipante y M es una martingala, entonces $\int XdM$ también es una martingala.

4. Variación cuadrática

Algunas preguntas acerca de un proceso son resueltas de manera mucho más simple estudiando la variación cuadrática y no el proceso mismo.

Definición 4.1. $[X] : \Omega \times T \to {}^*\mathbb{R}$ definido por

$$[X](\omega, t) := \sum_{s=0}^{t} \Delta X(\omega, s)^2.$$

Se notará:

$$X_t := X(t) := X(\omega, t),$$

según sea conveniente.

Se destaca que para una martingala M se cumple

$$E\left(M^2\right) = E\left([M_t] + M_0^2\right)$$

Ejemplo 4.1. *Caminata aleatoria de Anderson. Sea* $T = \{0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, 1\}$ *donde* $\Delta t = \eta^{-1}$, $\eta = H!$; $H \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ *también* $\Omega = \{-1, 1\}^T$*.La caminata aleatoria de Anderson* $\chi : \Omega \times T \to {}^*\mathbb{R}$ *está definida por:*

$$\chi(\omega, t) := \sum_{s=0}^{t} \omega(s)\sqrt{\Delta t.}$$

Verificando algunos cálculos

$$[\chi](t) = t.$$

Definición 4.2. Una martingala hiperfinita se dice una λ^2-*martingala* si se tiene que ${}^oE(M_t^2) < \infty$ para todo $t \in T$.

Definición 4.3. Un tiempo de parada interno adaptado a una filtración dada $(\Omega, \{\mathfrak{A}_t\}_{t \in T}, P)$ es una aplicación $\tau : \Omega \to T$, tal que para todo $t \in T$, el conjunto $\{\omega : \tau(\omega) \leq t\}$ pertenece a $\mathfrak{A}_t$.

Definición 4.4. Una martingala interna M es una λ^2-*martingala local* si existe una sucesión creciente $\{\tau_n\}_{n \in N}$ de tiempos de parada internos, tales que cada M_{τ_n} es una λ^2-martingala y tal que para casi todo ω, $\tau_n(\omega) = 1$ para algún $n \in \mathbb{N}$. La sucesión $\{\tau_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ se dice que es una *sucesión localizadora* para M.

Definición 4.5. Sea $f : T \to {}^*\mathbb{R}$ una función interna. Se dice que $r \in \mathbb{R}$ es límite S-derecho de f en $t \in [0, 1]$, si para todo estándar $\epsilon > 0$, existe un estándar $\delta > 0$ tal que si $s \in T$ y $t < {}^os < t + \delta$; entonces $|f(s) - r| < \epsilon$. Escribiremos $r = S - \lim_{s \searrow t} f(s)$. El límite S-izquierdo $S - \lim_{s \nearrow t} f(s)$ se define análogamente.

A continuación se extiende la relación de equivalencia definida en (3.4) tomando

$$\omega \sim_\tau \omega' \quad \text{si y sólo si} \quad \omega \sim_{\tau(\omega)} \omega', \tag{4.1}$$

donde τ es un tiempo de parada.

Se toma $\mathfrak{A}_\tau$ como el álgebra interna generada por las clases de equivalencia de $\sim_\tau$.

Proposición 4.1. Si M es una λ^2-martingala local, entonces casi todas las trayectorias de M tienen límites S-derecho y S-izquierdo en cada $t \in [0, 1]$.

Se introducirán ahora los espacios $SL^2(M)$ y $SL(M)$ y para ello se define, a partir de M (una λ^2-martingala) una medida interna sobre $\Omega \times T$

Definición 4.6. Si M es una λ^2-martingala definimos la medida interna ν_M sobre $\Omega \times T$ por

$$\nu_M\{(\omega, t)\} = \Delta M(\omega, t)^2 P(\{\omega\}). \tag{4.2}$$

Proposición 4.2. Sea ν_M definida como en (4.2), entonces, para el proceso de Anderson χ se tiene que $\nu_M(\Omega \times T) = E([M](1))$ es finita y $\nu_\chi = P \times \lambda$.

Definición 4.7. Sea M una λ^2-martingala. Un proceso hiperfinito X pertenece a la clase $SL^2(M)$ si es no anticipante y cuadrado S-integrable con respecto a ν_M.

Proposición 4.3. (Análogo de la proposición 3.2) Si M es una λ^2-martingala y X está en $SL^2(M)$, entonces $\int XdM$ es una λ^2-martingala.

Demostración. Si suponemos que M es una λ^2-martingala y $X \in SL^2(M)$,

$$\begin{aligned} E\left(\left(\int_0^1 XdM\right)^2\right) &= E\left(\left[\int_0^1 XdM\right]\right) = E\left(\sum_0^1 X^2 \Delta M^2\right) \\ &= \sum_{\omega\in\Omega} \sum_0^1 X^2 \Delta M^2 P(\{\omega\}) = \int X^2 d\nu_M, \end{aligned} \tag{4.3}$$

que es finita porque $X \in SL^2(M)$, lo cual basta para verificar que $\int XdM$ es λ^2-martingala. □

Definición 4.8. Una función interna $f : \Omega \to {}^*\mathbb{R}$ es *S-continua* si $f(s) \approx f(t)$ cuando $s \approx t$, y cada $f(t)$ es estándar cercano.

Un proceso $X : \Omega \times T \to {}^*\mathbb{R}$ es S-continuo si casi todas sus trayectorias lo son.

Teorema 4.1. *Una λ^2-martingala es S-continua si y sólo si su variación cuadrática lo es.*

Un corolario importante de este teorema es que la caminata aleatoria de Anderson es S-continua porque $[\chi](t) = t$. La variación cuadrática es continua, luego el proceso lo es.

El siguiente resultado nos muestra como, al igual que en análisis real, la integral es una aplicación continua.

Proposición 4.4. Si M es una λ^2-martingala S-continua y $X \in SL^2(M)$, entonces $\int X dM$ es también S-continua.

5. Teoremas de levantamiento

Se introduce a continuación la noción de filtración estocástica para tener el concepto correspondiente a filtración interna de lo no estándar.

Definición 5.1. Una *filtración estocástica* es una tupla $(\Omega, \{\mathfrak{B}_t\}_{t\in[0,1]}, Q)$, donde $\{\mathfrak{B}_t\}_{t\in[0,1]}$ es una familia creciente de σ-álgebras sobre Ω, Q es una medida de probabilidad sobre $\mathfrak{B}_1$. Sea $(\Omega, \{\mathfrak{A}_t\}_{t\in T}, P)$ una filtración interna tal como en la definición en 3.1. Diremos que la *filtración estocástica generada* por $(\Omega, \{\mathfrak{A}_t\}_{t\in T}, P)$ es Ω junto con la medida de Loeb $L(P)$, y las σ-álgebras

$$\mathfrak{B}_t = \sigma\left(\bigcup_{s\approx t} L(\mathfrak{A}_s) \cup \mathcal{N}\right), \tag{5.1}$$

donde $\mathcal{N}$ es la familia de los conjuntos con medida cero en $L(\mathfrak{A})$.

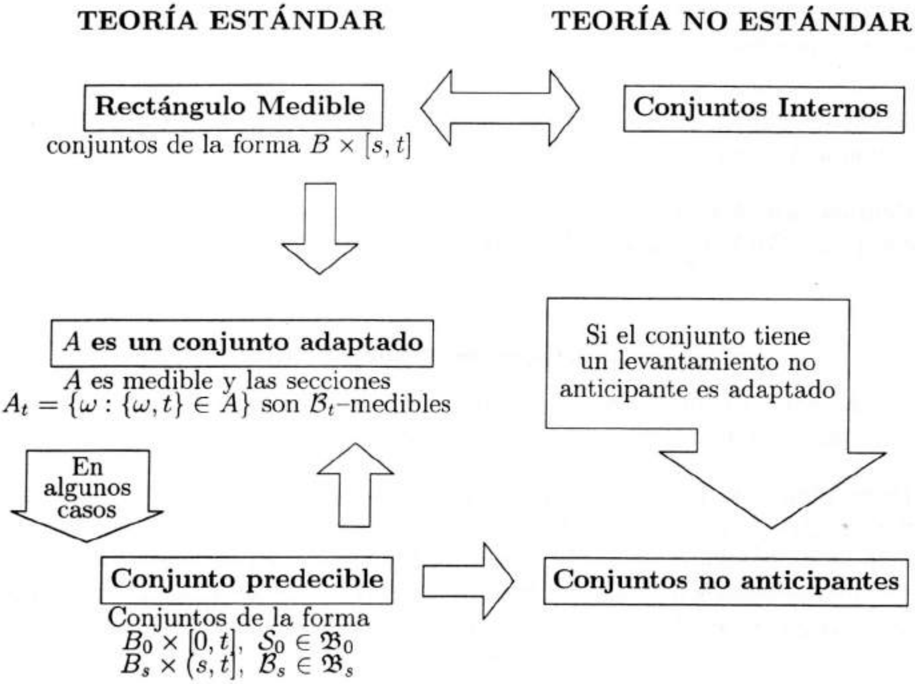
Definición 5.2. Una filtración estocástica $(\Omega, \{\mathfrak{B}_t\}_{t\in[0,1]}, Q)$ *satisface las condiciones usuales si* cada $\mathfrak{B}_t$ contiene todos los conjuntos de medida cero de $\mathcal{B}_1$, y para todo $t \in [0,1)$

$$\mathfrak{B}_t = \bigcap_{s>t} \mathfrak{B}_s. \tag{5.2}$$

Corolario 5.1. Una filtración estocástica generada por una filtración interna satisface las condiciones usuales.

Definición 5.3. Sea ν una medida interna sobre todos los subconjuntos internos de $\Omega \times T$; se dice que ν es *absolutamente continua* con respecto a P si $L(P)(C) = 0$ implica que $L(\nu)(C \times T) = 0$ y si cumple que $\mu(\Omega \times \{0\}) = 0$.

Los siguientes resultados esquematizados mediante el cuadro relacionan los conceptos de la teoría estándar con la no estándar.



El sentido en el que se tiene la relación es el siguiente. Un rectángulo medible es un subconjunto de $\Omega \times [0,1]$ de la forma $B \times [s,t]$, donde B es Loeb medible. Un conjunto es medible si está en la σ-álgebra generada por los rectángulos medibles y un conjunto $B \subseteq \Omega \times [0,1]$ es casi seguramente medible si y sólo si existe un subconjunto interno $A \subset \Omega \times T$ tal que $L(\nu)(A \triangle \mathrm{St}^{-1}(B)) = 0$. Un conjunto $A \subset \Omega \times [0,1]$ se dice adaptado con respecto a $\{\mathfrak{B}_t\}$, si A es medible y cada sección $A_t = \{\omega : (\omega, t) \in A\}$ es $\mathfrak{B}_t$-medible; un conjunto medible es adaptado. Un rectángulo predecible con respecto a $\{\mathfrak{B}_t\}$ es un conjunto de la forma $B_s \times (s,t]$, donde $B_s \in \mathfrak{B}_s$ ó $B_0 \times [0,t]$, donde $B_0 \in \mathfrak{B}_0$. Un conjunto se dice predecible si está en la σ-álgebra generada por los rectángulos predecibles. Un proceso es predecible (adaptado) si es medible con respecto a la σ-álgebra de los conjuntos predecibles (adaptados). Todo proceso que sea casi seguramente predecible es casi seguramente adaptado. Si $B \subseteq \Omega \times [0,1]$ es casi seguramente predecible, entonces existe un $A \subseteq \Omega \times T$ no anticipante tal que $L(\nu)(A \triangle \mathrm{St}^{-1}(B)) = 0$, donde ν es continua absolutamente con respecto a P. Si $B \subseteq \Omega \times [0,1]$, y existe un $A \subseteq \Omega \times T$ no anticipante tal que $L(\nu)(A \triangle \mathrm{St}^{-1}(B)) = 0$. Entonces B es casi seguramente adaptado. Si m es la medida de Lebesgue sobre $[0,1]$ y P es una medida de probabilidad sobre Ω, tomamos $\mu = P \times m$. Un proceso $x : \Omega \times [0,1] \to \mathbb{R}$ es casi seguramente predecible con respecto a μ si y sólo si es casi seguramente adaptado.

6. Teoremas de representación

Los teoremas que se exponen a continuación, proveen las herramientas necesarias para relacionar la teoría estándar con la no estándar.

Definición 6.1. Una martingala interna $M : \Omega \times T \to {}^*\mathbb{R}$ se dice una *SL^2-martingala* si $M_t \in SL^2(\Omega, \mathfrak{A}_1, P)$ para todo $t \in T$.

Definición 6.2. Un proceso interno $X : \Omega \times T \to {}^*\mathbb{R}$ se dice *S-continuo por la derecha en cero* cuando ${}^oX(0) = {}^oX^+(0)$ $L(P)$ c.t.p.

Nota 6.1. Si $M : \Omega \times T \to {}^*\mathbb{R}$ es una SL^2-martingala S-continua por la derecha en 0 y ν_M está definida como en 4.2, entonces ν_M es absolutamente continua con respecto a P.

Proposición 6.1. Si M es una SL^2-martingala y $X \in SL^2(M)$, entonces $\int XdM$ es una SL^2-martingala.

Definición 6.3. Sean M una SL^2-martingala y $x : \Omega \times [0,1] \to \mathbb{R}$ un proceso predecible en $L^2(\nu_{{}^oM^+})$. Un *2-levantamiento* de x (con respecto a M) es un proceso no anticipante $X : \Omega \times T \to {}^*\mathbb{R}$ en $SL^2(M)$ tal que ${}^oX(\omega, t) = x(\omega, {}^ot)$ para casi todo ω con respecto a $L(\nu_M)$.

Con el siguiente lema se muestra que los procesos que pertenecen a L^2 tienen 2-levantamientos.

Lema 6.1. *Sea M una SL^2-martingala S-continua por la derecha en cero. Si $x \in L^2(\nu_{{}^oM^+})$, entonces x tiene un 2-levantamiento con respecto a M.*

Ahora se verá que el representante de un proceso es justamente su levantamiento.

Proposición 6.2. Sea M una SL^2-martingala S-continua por la derecha en cero y sea $x \in L^2(\nu_{{}^oM^+})$. Entonces x tiene un 2-levantamiento X y

$$\int x d\,{}^oM^+ = {}^o\left(\int XdM\right)^+. \tag{6.1}$$

7. Representaciones estándar de integrales estocásticas no estándar

Se han dado las condiciones para que dado un proceso x, sea posible hallar X de modo que

$$\int x d\,{}^oM^+ = {}^o\left(\int XdM\right)^+.$$

A continuación se estudiará la situación recíproca (Dado un proceso no estándar encontrarle un representante estándar), es decir, si dado $X \in SL^2(M)$, la posibilidad o no de que exista $x \in L^2(\nu_{{}^oM^+})$ tal que

$$\int x d\,{}^oM^+ = {}^o\left(\int XdM\right)^+.$$

En el siguiente ejemplo se ilustra cómo, no siempre es posible hallar tal x y que hay que reformular el problema tratando de encontrar N realacionada con M (ya no ${}^oM^+$) y un $x \in L^2(\nu_N)$ que cumpla

$$\int x dN = {}^o\left(\int X dM\right)^+.$$

Ejemplo 7.1. *Sea la línea de tiempo*

$$T = \{0, \Delta t, 2\Delta t, \ldots, 1\},$$

$\chi : \Omega \times T \to {}^*\mathbb{R}$ *la caminata aleatoria de Anderson. Sea* $X : \Omega \times T \to {}^*\mathbb{R}$ *dado por*

$$X(\omega, k\Delta t) = (-1)^k;$$

por ser acotado $X \in SL^2(\chi)$. *en este ejemplo se tiene que si* $\beta = {}^o\chi^+$ *y* $x \in L^2(\nu_\beta)$, *entonces* x *tiene un 2-levantamiento* Y *tal que*

$$\int x d\,{}^o\chi^+ = {}^o\left(\int Y d\chi\right)^+.$$

$$\int x d\,{}^o\chi^+ = \int x d\beta \neq {}^o\left(\int X d\chi\right)^+.$$

Proposición 7.1. Sean M una SL^2-martingala S-continua en cero; y $X \in SL^2(M)$. Sea un proceso $x \in L^2(\nu_{{}^oM^+})$ tal que

$$\int x d\,{}^oM^+ = {}^o\left(\int X dM\right)^+,$$

entonces X es un 2-levantamiento de x.

Proposición 7.2. Sea $M : \Omega \times T \to {}^*\mathbb{R}$ una SL^2-martingala S-continua en cero. Sea

$$N : \Omega \times [0,1] \to \mathbb{R}$$

una martingala con cuadrado integrable, tal que para cada sublínea hiperfinita de tiempo $S \subseteq T$; existe un proceso $X^S \in SL^2(M^S)$ que cumple

$$N = {}^o\left(\int X^S dM^S\right)^+.$$

Entonces existe un proceso $x \in L^2(\nu_{{}^oM^+})$ con la propiedad de que

$$N = \int x d\,{}^oM^+. \tag{7.1}$$

El siguiente teorema da un importante caso en el cual es posible encontrar un representante estándar para uno no estándar, como lo es la caminata aleatoria de Anderson.

Proposición 7.3. Sea $M : \Omega \times T \to {}^*\mathbb{R}$ una SL^2-martingala S-continua tal que

$$E\left({}^{o}[M]^{+}(t) - {}^{o}[M]^{+}(s) \middle| \mathfrak{B}_s \right) = t - s \quad \text{para todo } t > s.$$

Entonces ${}^{o}M^{+}$ es un movimiento browniano con respecto a $(\Omega, \{\mathfrak{B}_s\}, L(P))$.

Teorema 7.1. *Sean χ la caminata aleatoria de Anderson y $X \in SL^2(\chi)$. Entonces existe un movimiento browniano β y un proceso adaptado $x \in L^2(\Omega \times [0,1])$ tal que*

$$\int x d\beta = {}^{o}\left(\int X d\chi\right)^{+}.$$

Demostración. Sea $M := \int X d\chi$, entonces

$$[M] = \sum_{s=0}^{t} X^2 \Delta\chi(\omega, s)^2 = \int X^2 dt,$$

lo cual significa que ${}^{o}[M]^{+}$ es creciente y absolutamente continua (Esto se desprende de un hecho del análisis real que se puede consultar en [2] pg. 70); por tanto podemos definir

$$f(\omega, t) := \frac{d}{dt}\, {}^{o}[M]^{+}(t) = \lim_{h \searrow 0} \frac{{}^{o}[M]^{+}(t) - {}^{o}[M]^{+}(t)(t-h)}{h}$$

existe y es no negativa y adaptada, por ser límite de funciones adaptadas; con

$$ {}^{o}[M]^{+}(\omega, t) = \int_0^t f(\omega, s) ds \quad \text{c.t.p.} \tag{7.2}$$

Definimos a partir de ésta otro proceso adaptado g por:

$$g(\omega, t) = \begin{cases} f^{-1/2}((\omega, t) & \text{Si } f(\omega, t) \neq 0, \\ 0 & \text{Si } f(\omega, t) = 0 \end{cases}.$$

Sea 1_g la función indicadora del conjunto

$$\{(\omega, t) : g(\omega, t) = 0\}.$$

Por (7.2) y la definición de g, se sigue que

$$E\left(\int_0^1 g(\omega, s)^2 d\, {}^{o}[M]^{+}\right) = E\left(\int_0^1 g(\omega, s)^2 f(\omega, s) ds\right) \leq 1;$$

y por tanto $g \in L^2(\nu_{{}^{o}[M]^{+}})$.

Se puede ver en [8] los teoremas 4.9 y 3.14, también de [8] que existe un 2-levantamiento $G \in SL^2(M)$ de g, y por 3.14 existe un levantamiento 1_G de 1_g; $G \cdot 1_G = 0$ c.t.p.

Definimos

$$\beta(\omega,t) := {}^{o}\left(\int_0^t G(\omega,s)dM(\omega,s) + \int_0^t 1_G(\omega,s)d\chi(\omega,s)\right)^+. \tag{7.3}$$

Calculemos la variación cuadrática de β

$$\begin{aligned}
[\beta](\omega,t) &= {}^{o}\left[\int GdM\right]^+(\omega,t) + {}^{o}\left[\int 1_G d\chi\right]^+(\omega,t) \\
&= {}^{o}\left(\int G^2 d[M]\right)^+(\omega,t) + {}^{o}\left[\int 1_G d\chi\right]^+(\omega,t) \\
&= \int_0^t g^2 d\,{}^{o}[M]^+ + \int_0^t 1_g^2 ds \\
&= \int_0^t g^2 f ds + \underbrace{\int_0^t 1_g^2 ds}_{\text{cero}} \\
&= \int_0^t 1 ds = t.
\end{aligned}$$

Por 6.1 sabemos que el proceso N definido por

$$N := \int_0^t G(\omega,s)dM(\omega,s) + \int_0^t 1_G(\omega,s)d\chi(\omega,s)$$

es una martingala para la cual $[\,{}^{o}N^+] = {}^{o}[N]^+$ y además es claro que es S-continua y podemos suponer, (ver [8]), que se comporta bien. Por lo cual

$$E\left({}^{o}[N]^+(t) - {}^{o}[N]^+(s)\Big|\mathfrak{B}_s\right) = E\left([\,{}^{o}N^+](t) - [\,{}^{o}N^+](s)\Big|\mathfrak{B}_s\right) = t - s,$$

esto implica que β es un movimento browniano adaptado a $(\Omega, \{\mathfrak{B}_s\}, L(P))$, de acuerdo con la proposición 7.3.

Por (7.3) tenemos que $f^{1/2} \in L^2(\nu_\beta)$ y

$$\int f^{1/2} d\beta = \int f^{1/2} g d\,{}^{o}M^+ + \underbrace{\int f^{1/2}\cdot 1_g d\,{}^{o}\chi^+}_{\text{cero}} = \int f^{1/2} g d\,{}^{o}M^+. \tag{7.4}$$

Finalmente observemos que ${}^{o}M^{+} = \int f^{1/2} g d\, {}^{o}M^{+}$: si $f = 0$, se tiene claramente; si $f \neq 0$, entonces $f^{1/2}g = 1$ c.s. y entonces

$$
\begin{aligned}
E\Big(\sup_{\substack{q\leq 1\\ q\in Q}}\Big({}^{o}M^{+}(q) - \int_0^q f^{1/2} g d\, {}^{o}M^{+}\Big)^2\Big) & \\
&\leq 4E\Big(\Big({}^{o}M^{+}(1) - \int_0^1 f^{1/2} g d\, {}^{o}M^{+}\Big)^2\Big) \\
&= 4E\left(\int_0^1 (1 - f^{1/2}g)^2 d\, {}^{o}[M]^{+}\right) \\
&= 4E\left(\int_0^1 (1 - f^{1/2}g)^2 f dt\right) = 0
\end{aligned}
$$

haciendo $x := f^{1/2}$ por (7.4) obtenemos

$$
\int x d\beta = \int f^{1/2} g d\, {}^{o}M^{+} = {}^{o}M^{+} = {}^{o}\left(\int X d\chi\right)^{+},
$$

que es lo que queríamos probar. □

Referencias

[1] Albeverio Sergio, *Non Standar Methods in Stochastic Analysis and Mathematical Physics*, Academic Press (1986).

[2] R. Ash, *Real Analysis and Probability*, Accademic Press (1972).

[3] Bilingsley, *Probability and Measure*, John Wiley & Sons, New York (1979).

[4] D.N.Hoover y E. Perkins, *Nonstandar Construction of the Stochastic Integral and Applications to Stochastic Integral and Aplications*, John Wiley and Sons, New York (1979).

[5] N.V. Krasnov, A. Kiseliov y G. Makarenko, *Ecuaciones Integrales* , Mir (1977).

[6] Muñoz Myriam, *Lifting Theorems for Some Classes of Two Parameter Martingales*, Revista Colombiana de Matemáticas (1998).

[7] Mora Carlos, *Soluciones de Ecuaciones Diferenciales Estocásticas en Análisis no Estándar*, Universidad Nacional de Colombia (1998).

[8] Ospina Dwight, *Integración Estocástica con Martingalas Usando Análisis no Estándar*, Universidad Nacional de Colombia (1999).