Boletín de Matemáticas
Nueva Serie, Volumen VI No. 1 (1999), pp. 27–37

SOLUCIÓN DÉBIL DE UN PROBLEMA HIPERBÓLICO DE TIPO ESCALAR

ANA LUZ VIVAS
ISABEL AMAYA BARRERA(*)

Resumen. En este artículo se encuentra una solución débil para una ecuación hiperbólica de tipo escalar utilizando el método de compacidad compensada.

Abstract. In this expository paper we present a weak solution for a hiperbolic equation. The method of compensated compactness is used.

*K*eywords and phrases. Riemann Invariants, Entropy Flux, Dirac Measures.

1. Introducción histórica del método de compacidad compensada

La teoría de compacidad compensada fué motivada con el hecho de que Tartar en 1.979 (ver [9]), observó que las compuestas de ciertas funciones no lineales con sucesiones $\{u^\epsilon\}$, donde cada u^ϵ es solución del problema de Cauchy parabólico de la forma

$$u_t + f(u)_x = \epsilon u_{xx}, \qquad \epsilon > 0, \tag{1.1}$$

con coeficientes osciiantes tenían un comportamiento adecuado con la convergencia débil, ésto es si $u^\epsilon \rightharpoonup u$ entonces $f(u^\epsilon) \rightharpoonup f(u)$. Este análisis le sirvió

(*) Texto recibido 15/12/99, revisado 12/03/00. Ana Luz Vivas, Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia; e–mail:avivas@matematicas.unal.edu.co
Isabel Amaya Barrera, Universidad Distrital F.J.C.; e–mail:isamaya@sky.net.co
2000 Mathematics Subject Classification. Primary 35L65. Secondary 35L45.

como base para iniciar el estudio de ecuaciones escalares de leyes de conservación hiperbólicas de la forma

$$u_t + f(u)_x = 0, \tag{1.2}$$

trabajo que también fue de interés en el año de 1.983 para Diperna (ver [5]) quién es considerado en realidad el pionero de la teoría de la compacidad compensada.

Esta teoría se fundamenta en que si se tiene un cierto control sobre combinaciones de términos que involucran a la sucesión $\{u^\epsilon\}$, se puede garantizar que si $u^\epsilon \rightharpoonup u$ entonces $f(u^\epsilon) \rightharpoonup f(u)$. En este sentido se consigue una solución débil del problema (1.2) como el límite débil de la sucesión de soluciones de problemas de la forma dada en (1.1).

Una de las herramientas principales de la teoría de la compacidad compensada es el teorema sobre las medidas de Young, el cual afirma que para toda función f continua, tal que $f(u) = o(|u|^p)$ cuando $|u| \to \infty$, el límite de la compuesta de f con una sucesión uniformemente acotada en L^p puede ser representado por el valor promedio esperado de una familia $\{v_{(x,t)}\}$ de medidas de probabilidad.

Particularmente, en el caso de una ecuación escalar, Tartar mostró que la medida $v_{(x,t)}$ asociada con una sucesión de soluciones $\{u^\epsilon\}$ de (1.1) está concentrada en un intervalo donde f es afín. Si por el contrario f no es afín en ningún intervalo, la medida $v_{(x,t)}$ se reduce a una medida de Dirac. Para ciertos sistemas 2×2 la teoría de la compacidad compensada se aplica y las medidas $v_{(x,t)}$ se reducen también a medidas de Dirac. Ver [3], [10].

La compacidad compensada involucra el estudio de funciones entropía flujo (η, q) para el problema (1.2). Si $(\eta_i, q_i) i = 1, 2$ son dos pares de entropía flujo tales que

$$\eta_i(u^\epsilon)_t + q_i(u^\epsilon)_x,$$

es precompacto en $W^{-1,2}(\Omega)$ entonces se puede demostrar la relación de conmutatividad dada por

$$\langle v, \eta_1 q_2 - \eta_2 q_1 \rangle = \langle v, \eta_1 \rangle \langle v, q_2 \rangle - \langle v, \eta_2 \rangle \langle v, q_1 \rangle \quad ,$$

resultado fundamental para reducir el soporte de las medidas de Young, obteniendo así la solución débil de (1.2).

2. Presentación del problema

Mediante el uso de la teoría de compacidad compensada se garantiza la existencia de una solución débil para un problema de la forma

$$\begin{aligned} u_t + f(u)_x &= 0, \\ u(x,0) &= u_0(x), \end{aligned} \tag{2.1}$$

donde $f \in C^1(\mathbb{R})$, f no lineal, $u = u(x,t), (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty)$, u_0 continua. Este tipo de ecuaciones aparecen con frecuencia en problemas de la física y son comunmente llamadas leyes de conservación. Generalmente estas ecuaciones admiten soluciones discontinuas. En esta dirección se requiere extender el concepto de derivada clásica a derivada débil, la cual implica la existencia de soluciones débiles de (2.1) y es desarrollada en el contexto de teoría de distribuciones, (ver [7]).

3. Preliminares

3.1. Definiciones y teoremas relacionados con la teoría de la compacidad compensada

Definición 3.1. *Sean X un espacio vectorial normado y X' el espacio dual de X. Una sucesión (x_n) se dice que converge débilmente a x en X si $x'(x_n) \to x'(x)$ para todo $x' \in X'$; x se llama el límite débil de (x_n). En este caso se escribe $x_n \rightharpoonup x$ en X.*

Definición 3.2. *Sean X y X' como en la definición anterior. Una sucesión (x'_n) en X' se dice que converge débil estrella a $x' \in X'$ si $x'_n(x) \to x'(x)$ para todo $x \in X$; x' se llama límite débil estrella de (x'_n). En este caso se escribe $x'_n \overset{*}{\rightharpoonup} x'$ en X'.*

Teorema 3.1 (Teorema del Divergente Rotacional). *Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ con frontera suave, ϵ una sucesión de números convergente a cero, $\{v^\epsilon\}$, $\{w^\epsilon\}$ dos sucesiones acotadas en $L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$ tales que*

(a) *$\{divv^\epsilon\}$ es precompacto en $W^{-1,2}(\Omega)$.*
(b) *$\{rotw^\epsilon\}$ es precompacto en $W^{-1,2}(\Omega; M^{n\times n})$ donde $M^{n\times n}$ es el espacio de las matrices de tamaño $n \times n$, y*

$$(rot\ w)_{i,j} = \frac{\partial}{\partial x_j} w^i - \frac{\partial}{\partial x_i} w^j,$$

con $1 \le i, j \le n$ y $w = (w^1, w^2, ..., w^n)$ de $\mathbb{R}^n$.

Supóngase además que $v^\epsilon \rightharpoonup v$ y $w^\epsilon \rightharpoonup w$ en $L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$. Entonces

$$v^\epsilon \cdot w^\epsilon \rightharpoonup v \cdot w,$$

en el sentido de las distribuciones.
Para su demostración ver [6], pág 21.

Teorema 3.2. *Sea K acotado en $\mathbb{R}^m$ y Ω un conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$. Si $\{u^\epsilon\}$ es una sucesión de funciones medibles con*

$$u^\epsilon : \Omega \to \mathbb{R}^m$$

tal que $u^\epsilon(x) \in K$ para casi todo $x \in \Omega$. Entonces existe una subsucesión $\{u^{\epsilon_k}\}$ y una familia de medidas de probabilidad $\{v_{(x,t)}\}_{(x,t)\in\Omega}$ sobre $\mathbb{R}^m$ con

Spt $v_{(x,t)} \subset \overline{K}$ *tal que si* f *es una función continua en* $\mathbb{R}^m$ *y*

$$\overline{f}(x) = \langle v_{(x,t)}, f(\lambda) \rangle,$$

entonces

$$f(u^{\epsilon_k}) \overset{*}{\rightharpoonup} \overline{f} \qquad en\ L^\infty(\Omega).$$

La demostración se puede consultar en [6], *pág. 12.*

Teorema 3.3. *Sean* Ω *como en el teorema anterior y* $\{u^\epsilon\}$ *una sucesión uniformemente acotada en* $L^p(\Omega;\mathbb{R}^m)$, *para algún* $p > 1$. *Entonces existe una subsucesión* $\{u^{\epsilon_k}\}$ *y una familia de medidas de probabilidad* $\{v_x\}_{x\in\Omega}$ *sobre* $\mathbb{R}^m$ *tales que si* $f \in C(\mathbb{R}^m)$ *y satisface* $f(u) = o(|u|^p)$, *cuando* $|u| \to \infty$, *se cumple*

$$f(u^{\epsilon_k}) \rightharpoonup \langle v_x, f(\lambda) \rangle = \int_{\mathbb{R}^m} f(\lambda) dv_x(\lambda),$$

en el sentido de las distribuciones.

La demostración se puede consultar en [6], *pág. 18.*

Teorema 3.4. *Sea* E *un espacio normado reflexivo. Toda sucesión acotada en* E *posee una subsucesión débilmente convergente en* E.

Para su demostración ver [2], *pág. 135.*

Teorema 3.5. *Sean* Ω *un subconjunto abierto de* $\mathbb{R}^n$ *con frontera suave,* $M(\Omega)$ *el espacio de las medidas de Radon sobre* Ω *y* $\{g^\epsilon\}$ *una familia acotada en* $W^{-1,p}(\Omega)$ *para algún* $2 < p \leq \infty$. *Sea* $g^\epsilon = g_1^\epsilon + g_2^\epsilon$ *con* $\{g_1^\epsilon\}$ *precompacto en* $W^{-1,2}(\Omega)$ *y* $\{g_2^\epsilon\}$ *acotada en* $M(\Omega)$, *entonces* $\{g^\epsilon\}$ *es precompacto en* $W_{loc}^{-1,2}(\Omega)$.
La demostración de este teorema se puede consultar en [6], *pág. 33.*

Definición 3.3. *Una función* $\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *de clase* C^1 *es una entropía para el sistema (2.1) si existe una función*

$$q : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

de clase C^1 *tal que*

$$\eta'(u) f'(u) = q'(u) \quad ,$$

para todo $u \in dom(f)$, q *se llama el flujo de la entropía* η *y el par* (η, q), *par de entropía.*

3.2. Solución débil de (2.1)

Se consideran u una solución clásica de (2.1) y ϕ una función en C^1 tal que

(a) $Spt\phi \subset D, \quad D = \{x_t \mid 0 \leq t \leq T\}, \quad a \leq x \leq b.$
(b) $\phi \equiv 0$ en $t = T, x = a, x = b.$

En estas condiciones multiplicando la ecuación (2.1) por ϕ e integrando sobre $t > 0$ se consigue la relación

$$
\begin{aligned}
\iint_{t>0} (u_t + f(u)_x)\phi dx dt &= \iint_{D} (u_t + f(u)_x)\phi dx dt \\
&= \int_a^b \int_0^T (u_t + f(u)_x)\phi \, dx dt \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{3.1}
$$

Integrando por partes (3.1) se obtiene

$$
\iint_{t>0} (u\phi_t + f(u)\phi_x) \, dx dt + \int_{t=0} u_0 \phi \, dx = 0, \tag{3.2}
$$

relación que es válida para u solución clásica de (2.1). Sin embargo (3.2) tiene sentido en el caso en que u y u_0 sean sólamente medibles y acotadas, lo cual sugiere la siguiente definición.

Definición 3.4. *Sean u, u_0 funciones medibles y acotadas, u es solución débil de (2.1) si se satisface la relación*

$$
\iint_{t>0} (u\phi_t + f(u)\phi_x) \, dx dt + \int_{t=0} u_0 \phi \, dx = 0,
$$

para toda $\phi \in C_0^1(\mathbb{R})$.

Un tratamiento completo sobre las implicaciones de la solución débil se puede ver en [8].

4. Análisis del problema

4.1. Regularización parabólica de (2.1)

Con el propósito de encontrar la solución débil de (2.1) se consideran ecuaciones parabólicas de la forma

$$
u_t + f(u)_x = \epsilon u_{xx}. \tag{4.1}
$$

Si $\{u^\epsilon\}$ es una sucesión de soluciones de (4.1) uniformemente acotada en $L^\infty(\mathbb{R} \times (0, \infty))$, por el teorema (3.3) existen $\{u^{\epsilon_k}\}$ y $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times (0, \infty))$ tales que

$$u^{\epsilon_k} \overset{*}{\rightharpoonup} u \qquad \text{cuando} \quad \epsilon \to 0.$$

Cada solución u^ϵ se llama solución aproximada de (2.1) y se encuentra por medio del esquema de Lax Friedrichs o Godunov.

Este esquema se puede ver en [4].

El siguiente resultado provee condiciones necesarias para garantizar que u (límite débil estrella de $\{u^{\epsilon_k}\}$) es solución débil de (2.1), este hecho se ilustra en la figura 1.

$$\begin{array}{ccccc} u_t^\epsilon & + & f(u^\epsilon)_x & = & \epsilon u_{xx} \\ \big\downarrow & & \big\downarrow & & \big\downarrow \\ u_t & + & f(u)_x & = & 0 \end{array}$$

Figura 1

Teorema 4.1. *Sean Ω un abierto acotado en $\mathbb{R} \times (0, \infty)$, $\{u^\epsilon\}$ una sucesión de soluciones locales de*

$$\begin{aligned} u_t + f(u)_x &= \epsilon u_{xx}, \\ u(x,0) &= u_0(x), \end{aligned} \tag{4.2}$$

con $\eta \in C^2(\mathbb{R})$ convexa y (η, q) un par entropía flujo para (2.1) . Entonces

(a) *Existe $\{u^{\epsilon_k}\}$ convergente débil * en $L^\infty(\mathbb{R} \times (0, \infty))$.*
(b) *$\eta(u^\epsilon)_t + q(u^\epsilon)_x$ pertenece a un subconjunto compacto de $W^{-1,2}(\Omega)$.*

Demostración. (a) Como u^ϵ es solución de (4.1), multiplicando por u^ϵ se tiene

$$u^\epsilon u_t^\epsilon + u^\epsilon f(u^\epsilon)_x = \epsilon u^\epsilon u_{xx}^\epsilon. \tag{4.3}$$

Además,

$$\begin{aligned} \epsilon\Big(\frac{(u^\epsilon)^2}{2}\Big)_{xx} - \big(\sqrt{\epsilon} u_x^\epsilon\big)^2 &= \epsilon\big(u^\epsilon (u^\epsilon)_x\big)_x - \epsilon\big(u_x^\epsilon\big)^2 \\ &= \epsilon\big[\big(u_x^\epsilon\big)^2 + u^\epsilon (u^\epsilon)_{xx} - \big(u_x^\epsilon\big)^2\big] \\ &= \epsilon u^\epsilon u_{xx}^\epsilon. \end{aligned}$$

De otra parte se tiene

$$\begin{aligned} \Big(\frac{(u^\epsilon)^2}{2}\Big)_t &= u^\epsilon u_t^\epsilon, \\ q(u^\epsilon)_x &= u^\epsilon f(u^\epsilon)_x \text{ con } \quad q'(\lambda) = \lambda f'(\lambda). \end{aligned}$$

Así (4.3) se transforma en

$$(4.4)\qquad \Big(\frac{(u^\epsilon)^2}{2}\Big)_t + q(u^\epsilon)_x = \epsilon\Big(\frac{(u^\epsilon)^2}{2}\Big)_{xx} - \big(\sqrt{\epsilon}u^\epsilon_x\big)^2.$$

Como u^ϵ es solución de (4.2), $u^\epsilon \in W^{2,2}(\mathbb{R}\times(0,T))$, integrando (4.4) sobre la franja $\mathbb{R}\times(0,T)$ contenida en Ω se obtiene

$$\int_0^t\int_{\mathbb{R}}(\sqrt{\epsilon}u^\epsilon_x)^2dxdt = \epsilon\int_0^t\int_{\mathbb{R}}\Big(\frac{(u^\epsilon)^2}{2}\Big)_{xx}dxdt - \int_0^t\int_{\mathbb{R}}q(u^\epsilon)_x dxdt - \int_0^t\int_{\mathbb{R}}\Big(\frac{(u^\epsilon)^2}{2}\Big)_t dxdt.$$

Luego $\sqrt{\epsilon}u^\epsilon_x$ es acotada en $L^2(\Omega)$.

Dado que $\{u^\epsilon\}$ es uniformemente acotada en $L^\infty(\mathbb{R}\times(0,\infty))$, existe una subsucesión $\{u^{\epsilon_k}\}$ tal que

$$u^{\epsilon_k} \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad \text{en}\, L^\infty(\mathbb{R}\times(0,\infty)).$$

(b) Como u^ϵ es solución de (4.1), multiplicando por $\eta'(u^\epsilon)$ se llega a

$$\eta(u^\epsilon)_t + q(u^\epsilon)_x = \epsilon\eta(u^\epsilon)_{xx} - \eta''(u^\epsilon)(\sqrt{\epsilon}u^\epsilon_x)^2.$$

Con el fin de aplicar el Teorema 3.4 se demuestra que $\epsilon\eta(u^\epsilon)_{xx}$ pertenece a un subconjunto compacto de $W^{-1,2}(\Omega)$ y $\eta''(u^\epsilon)(\sqrt{\epsilon}u^\epsilon_x)^2$ pertenece a un subconjunto acotado de $M(\Omega)$.

Al respecto, dada ψ una función test se tiene

$$(4.5)\qquad \left|\int\int \epsilon\eta(u^\epsilon)_{xx}\psi dxdt\right| \le \int\int|\epsilon\eta(u^\epsilon)_{xx}\psi|dxdt,$$

ya que las u^ϵ son uniformemente acotadas y $\eta\in C^2(\mathbb{R})$. Aplicando la desigualdad de Holder se obtiene

(4.6)

$$\begin{aligned}\int\int|\epsilon\eta(u^\epsilon)_{xx}\psi|dxdt &\le \sqrt{\epsilon}K\int\int|\sqrt{\epsilon}(u^\epsilon)_x\psi_x|dxdt\\ &\le \sqrt{\epsilon}K\left[\int\int(\sqrt{\epsilon}u^\epsilon_x)^2dxdt\right]^{1/2}\left[\int\int(\psi_x)^2dxdt\right]^{1/2}\\ &\le \sqrt{\epsilon}K_1 \parallel\psi\parallel_{1,2}\to 0, \quad \text{cuando } \epsilon\to 0,\end{aligned}$$

y como $M(\Omega) \hookrightarrow W^{-1,q}(\Omega)$,

(4.7)

$$\left| \int\int \eta''(u^\epsilon)(\sqrt{\epsilon}u_x^\epsilon)^2 \psi dxdt \right| \le K \left[\int\int (\sqrt{\epsilon}u_x^\epsilon)^2 dxdt \right]^{1/2} \left[\int\int (\psi)^2 dxdt \right]^{1/2}$$
$$\le K_1 \parallel \psi \parallel_{1,2}$$
$$\le K_2 \parallel \psi \parallel_{M(G)} .$$

Luego $\eta''(u^\epsilon)(\sqrt{\epsilon}u_x^\epsilon)^2$ es acotada en $M(\Omega)$. Así por teorema (3.4) se concluye que

$$\eta(u^\epsilon)_t + q(u^\epsilon)_x$$

pertenece a un subconjunto compacto de $W^{-1,2}(\Omega)$. □

NOTA: Los espacios $W^{-1,2}(\Omega)$ se pueden encontrar en [1].

5. Solución del problema

Teorema 5.1. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ y $f \in C^1(\mathbb{R})$. Si $\{u^\epsilon\}$ es una sucesión de soluciones aproximadas de (4.1) uniformemente acotadas tal que $u^\epsilon \overset{*}{\rightharpoonup} u$ en $L^\infty(\Omega)$ y para toda función convexa $\eta \in C^2(\mathbb{R})$, se satisface*

$$\frac{\partial}{\partial t}\eta(u^\epsilon) + \frac{\partial}{\partial x}q(u^\epsilon) \in \{compacto\ de W^{-1,2}(\Omega)\}$$

donde $q'(\lambda) = f'(\lambda)\eta'(\lambda)$. Entonces

$$f(u^\epsilon) \overset{*}{\rightharpoonup} f(u),$$

en $L^\infty(\mathbb{R} \times (0, \infty))$.

Demostración. Por el Teorema 3.3 existe una subsucesión $\{u^{\epsilon_k}\}$ que se denotará nuevamente por $\{u^\epsilon\}$, tal que $u^\epsilon \rightharpoonup u$ en $L^\infty(\Omega)$.
Usando el Teorema 3.2 se tienen las siguientes relaciones

$$f(u^\epsilon) \rightharpoonup \xi, \quad \eta(u^\epsilon) \rightharpoonup \nu \quad q(u^\epsilon) \rightharpoonup \omega,$$

con

$$u(x,t) = \langle v_{(x,t)}, \lambda \rangle,$$
$$\xi(x,t) = \langle v_{(x,t)}, f(\lambda) \rangle,$$
$$\nu(x,t) = \langle v_{(x,t)}, \eta(\lambda) \rangle,$$
$$\omega(x,t) = \langle v_{(x,t)}, q(\lambda) \rangle,$$

para cada $(x,t) \in \Omega$.
Dado que $div(u^\epsilon, f(u^\epsilon)) = \frac{\partial}{\partial t}u^\epsilon + \frac{\partial}{\partial x}f(u^\epsilon) = \epsilon u_{xx}$ y $\epsilon u_{xx} \rightharpoonup 0$ cuando $\epsilon \to 0$ entonces $div(u^\epsilon, f(u^\epsilon))$ es precompacto en $W^{-1,2}(\Omega)$ y $rot(q(u^\epsilon), -\eta(u^\epsilon)) =$

$\frac{\partial}{\partial t}\eta^\epsilon + \frac{\partial}{\partial x}q(u^\epsilon)$ pertenece a un subconjunto compacto de $W^{-1,2}(\Omega)$ con lo cual se verifica la hipótesis del teorema 3.1. Por consiguiente se deduce

$$(u^\epsilon, f(u^\epsilon)).(q(u^\epsilon), -\eta(u^\epsilon)) \rightharpoonup (u, \xi)\cdot(\omega, -\nu),$$

es decir

$$(u^\epsilon, f(u^\epsilon)).(q(u^\epsilon), -\eta(u^\epsilon)) \rightharpoonup u\omega - \xi\nu.$$

Por el Teorema 3.2 se tiene

$$(\lambda q - f\eta)(u^\epsilon) \rightharpoonup \langle v_{(x,t)}, \lambda q(\lambda) - f(\lambda)\eta(\lambda)\rangle,$$

pero

$$(u^\epsilon, f(u^\epsilon)).(q(u^\epsilon), -\eta(u^\epsilon)) = (\lambda q - f\eta)(u^\epsilon).$$

Así, por unicidad de límite se concluye

$$\begin{aligned}\langle v_{(x,t)}, \lambda q(\lambda) - f(\lambda)\eta(\lambda)\rangle =&\langle v_{(x,t)}, \lambda\rangle\langle v_{(x,t)}, q(\lambda)\rangle - \\ &\langle v_{(x,t)}, f(\lambda)\rangle\langle v_{(x,t)}, \eta(\lambda)\rangle,\end{aligned} \tag{5.1}$$

la cual se conoce con el nombre de **Relación de Conmutatividad**.

Como $u(x,t) = \langle v_{(x,t)}, \lambda\rangle$ $y\xi(x,t) = \langle v_{(x,t)}, f(\lambda)\rangle$, (5.1) puede ser reescrita

$$\langle v_{(x,t)}, (\lambda - u)q(\lambda) - (f(\lambda) - \xi)\eta(\lambda)\rangle = 0, \tag{5.2}$$

para toda función convexa $\eta \in C^2(\mathbb{R}) y\, q'(\lambda) = \eta'(\lambda)f'(\lambda)$.

Para $\eta(\lambda) = |\lambda - u|$, $q(\lambda) = Sgn(\lambda - u)[f(\lambda) - f(u)]$ se cumple que η es convexa, se puede aproximar por funciones de $C^2(\mathbb{R})$ y

$$q'(\lambda) = \eta'(\lambda)f'(\lambda),$$

luego

$$(\lambda - u)q(\lambda) - (f(\lambda) - \xi)\eta(\lambda) = (\xi - f(u))|\lambda - u|.$$

Reemplazando en (5.2) se obtiene

$$\langle v_{(x,t)}, (\xi - f(u))|\lambda - u|\rangle = 0,$$

esto es

$$(\xi - f(u))\langle v_{(x,t)}, |\lambda - u|\rangle = 0. \tag{5.3}$$

En (5.3) pueden ocurrir dos hechos:

(i). $\langle v_{(x,t)}, |\lambda - u|\rangle \neq 0$, en este caso $\xi = f(u)$, así

$$f(u^\epsilon) \rightharpoonup \xi = f(u).$$

(ii). $\langle v_{(x,t)}, |\lambda - u|\rangle = 0$, entonces

$$\int_\Omega |\lambda - u| dv_{(x,t)} = 0,$$

lo cual implica

$$v_{(x,t)}(\Omega - \{u\}) = 0,$$

por consiguiente

$$v_{(x,t)}(\{u\}) = 1,$$

luego $v_{(x,t)}$ es una medida de Dirac concentrada en u.

En cualquiera de los dos casos anteriores se llega a que

$$f(u^{\epsilon}) \stackrel{*}{\rightharpoonup} f(u).$$

□

Corolario 1. *Sean* $u_0 \in W^{2,2}(\Omega)$ *y* $f \in C^2(\mathbb{R})$. *Entonces el problema (4.2) tiene una solución débil* $u \in L^{\infty}(\mathbb{R} \times [0,\infty))$.

Demostración. La demostración de este corolario es inmediata a partir de los teoremas 4.1 y 4.2. □

Ejemplo. Solución débil para la ecuación de Buckley - Leverett.

Se considera el problema

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) + \frac{\partial}{\partial x}f(u(x,t)) = 0, \\ &u(x,0) = u_0(x,) \qquad 0 \leq x \leq 1, \\ &u(0,t) = u(t) \quad t > 0. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Dicho problema describe la variación de la saturación de agua $u(x,t)$ en una mezcla de agua con aceite que se encuentra en un recipiente. $u(x,0)$ representa la concentración inicial de agua en el recipiente y $u(0,t)$ la saturación de agua en la frontera del recipiente, con

$$u_0(x) \in W^{2,2}([0,1]).$$

$u(x,t)$ es el porcentaje de agua que contiene la mezcla en un volumen infinitesimal alrededor de un punto x en un tiempo t; en particular $0 \leq u(x,t) \leq 1$. Además la función f está dada por

$$f(u) = \frac{k_1(u)}{k_1(u) + k_2(u)},$$

donde k_1, k_2 son funciones convexas regulares en $[0,1]$, k_1 creciente y k_2 decreciente con las condiciones $k_1(0) = k_1'(0) = k_2(1) = k_2'(1) = 0$.

Con las condiciones anteriores f resulta ser monótona creciente, derivable en $[0,1]$ y por lo tanto continua.

Sea u^ϵ una solución de

$$
(5.5) \qquad \begin{gathered}
\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) + \frac{\partial}{\partial x}f(u(x,t)) = \epsilon u_{xx}, \\
u(x,0) = u_0(x), \qquad 0 \leq x \leq 1, \\
u(0,t) = u(t) \quad t > 0,
\end{gathered}
$$

entonces $0 \leq u^\epsilon(x,t) \leq 1$. Por el Teorema 3.2 existe una subsucesión $\{u^{\epsilon_k}\}$ y una familia de medidas de probabilidad $\{v_{(x,t)}\}$ $x \in [0,1]$ sobre $\mathbb{R}$ tales que

$$
(5.6) \qquad f(u^\epsilon) \rightharpoonup \int_0^1 f(\lambda)dv_{(x,t)}(\lambda).
$$

Para

$$
\eta(\lambda) = |\lambda - u|,
$$

y

$$
q(\lambda) = Sgn(\lambda - u)\left[\frac{k_1(\lambda)}{k_1(\lambda) + k_2(\lambda)} - \frac{k_1(u)}{k_1(u) + k_2(u)}\right]
$$

se satisface la hipótesis del teorema (4.1). De (5.6) se deduce que

$$
f(u^{\epsilon_k}) \xrightharpoonup{*} f(u).
$$

Por el Corolario 1, como $f \in C^2(\mathbb{R})$ entonces el problema (5.4) tiene una solución débil $u \in L^\infty([0,1] \times [0,\infty))$.

Referencias

[1] R. A. Adams, *Sobolev Spaces*, Academic Press (1975).

[2] T. Abuabara, J. Lesmes, *Elementos de Analisis Funcional*, Universidade do Estado de São Pablo (Brasil), Universidad de los Andes (Colombia) (1975).

[3] E. I. Amaya B., *Un Sistema* 2 × 2 *no Estrictamente Hiperbólico*. Tesis de Maestría, Universidad Nacional de Colombia (1999).

[4] G. Q. Chen, L. Peizhu & D. Xiaxi, *Convergence of the Lax-Friedrichs Scheme for Isentropic Gas Dynamics*, (I), (II), Acta Mathematica Scientia **5** (1985).

[5] R. J. Diperna, *Convergence of approximate solutions of conservation laws* **82** (1983), Arch. Rat. Mech. Anal., 27-70.

[6] N. Hermano Frid, *Compacidade Compensada Aplicada as Leis de Conservação*, 19 Colóquio Brasileiro de Matemática (1993).

[7] S. Kesavan, *Functional Analysis and Applications*, Ed. John Wiley & Sons (1989).

[8] J. Smoller, *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*. Ed. Springer-Verlag (1983).

[9] L. Tartar, *Compensated Compactness and Applications to Partial Differential Equations*, Research Notes in Mathematics, Nonlinear Analysis and Mechanics, Heriot-Watt Simposium Vol 4 ed. R. J. Knops, New York Pitmann Press (1979).

[10] A. L. Vivas, *Estudio de la Dinámica de los Gases Isentrópicos*, Tesis de Maestría en Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia (1999).