*Boletín de Matemáticas*
Nueva Serie, Volumen VI No. 1 (1999), pp. 1–25

# SOLUCIONES OSCILANTES

YU TAKEUCHI(*)

RESUMEN. Se estudian en detalle los casos más notables de soluciones oscilantes de las relaciones de recurrencia lineales de segundo orden así como de sus recurrencias fraccionarias asociadas. Se incluyen cotas superiores e inferiores para los máximos y mínimos locales de estas soluciones.

*Palabras clave. Relaciones de recurrencia lineales de segundo orden. Relaciones de recurrencia fraccionarias de primer orden. Soluciones oscilantes de relaciones de recurrencia. Puntos fijos de relaciones de recurrencia*

***Abstract.*** *Oscillatory solutions of linear second order recurrence relations and of their associated first order fractional recursions are studied in detail. The most important cases being considered. Bounds for local maxima and minima are also included.*

*Key words and phrases. Linear second order recurrence relations. Fractional first order recurrence relations. Oscillatory solutions of recurrence relations. Fixed points of fractional recursions.*

## 0. Introducción: Presentación de los resultados

Considérese la fórmula lineal de recurrencia de segundo orden

$$X_{n+1} - 2 \cdot X_n + b_n \cdot X_{n-1} = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots \tag{0.1}$$

(*) Texto recibido 15/08/1999, revisado 7/03/00. Yu Takeuchi, Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, Sede Bogotá;
AMS Subjet Classification. Primary 39A11. Secondary 39B12.

Dividiendo término a término por $X_n$ y haciendo $T_n = \frac{X_n}{X_{n-1}}$, se obtiene la fórmula fraccionaria de recurrencia de primer orden

$$T_{n+1} = 2 - \frac{b_n}{T_n}, \quad n = 1, 2, 3, .... \tag{0.2}$$

Se examinan las dos situaciones siguientes:

(I) $b_n \longrightarrow b > 1$. En esta circunstancia cualquier solución real $(T_n)$ de la fórmula (0.2) diverge en forma oscilante.

(II) $b_n \longrightarrow 1$. Se examinan dos casos:

- (A) $b_n < 1$ para todo $n$. En este caso, cualquier solución $(T_n)$ de (0.2) converge al límite 1.
- (B) $b_n > 1$ para todo $n$. Se obtienen diversos subcasos. Examinaremos los siguientes:
  - (a) Si $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot (b_n - 1) < +\infty$, cualquier solución $(T_n)$ converge al límite 1.
  - (b) Si $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - 1) = +\infty$, toda solución $(T_n)$ diverge en forma oscilante.
  - (c) Si $b_n = 1 + \frac{C}{n^2}$ $(C > \frac{1}{4})$, toda solución $(T_n)$ diverge en forma oscilante.
  - (d) Si $b_n = 1 + \frac{C}{n^2}$ $(0 < C \leq \frac{1}{4})$, cualquier solución $(T_n)$ converge al límite 1.

En la fórmula lineal de recurrencia (0.1), considérese el caso de $b_n > 1$ para todo $n$. Si $(X_n)$ es una solución de (0.1), los términos de la sucesión $(X_n)$ oscilan entre los máximos y los mínimos locales, y en caso de que $b_n \longrightarrow 1$, la sucesión $(X_n)$ puede llegar a ser monótona a partir de un término. Más precisamente, se obtienen los siguienes subcasos:

(i) $b_n \longrightarrow b > 1$. La sucesión $(X_n)$ diverge en forma oscilante.

(ii) $b_n \longrightarrow 1$. Si $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot (b_n - 1) < +\infty$, la sucesión $(X_n)$ es monótona a partir de un término y la fórmula (0.1) tiene una solución que converge y otra que diverge a $\pm\infty$ en forma asintóticamente lineal. Si $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot (b_n - 1) = +\infty$, ninguna solución de la fórmula (0.1) converge.

Sea $X_M$ un máximo o un mínimo local de los términos de la solución oscilante $(X_n)$. La siguiente estimativa de $|X_M|$ es válida:

$$\frac{1}{\sqrt{b_M - 1}} \cdot \prod_{k=1}^{M-1} \sqrt{\rho_k \cdot b_k} \cdot P_o \leq |X_M| \leq \frac{1}{\sqrt{b_{M+1} - 1}} \cdot \prod_{k=1}^{M} \sqrt{\sigma_k \cdot b_k} \cdot P_o,$$

donde

$$P_0 = \sqrt{X_1^2 + b_1 \cdot X_0^2 - 2 \cdot X_0 \cdot X_1},$$

$$\sigma_k = \begin{cases} 1 & \text{si } b_{k+1} \leq b_k \\ \frac{b_{k+1}-1}{b_k - 1} & \text{si } b_{k+1} \geq b_k, \end{cases}$$

$$\rho_k = \begin{cases} \frac{b_{k+1}-1}{b_k-1} & \text{si } b_{k+1} \leq b_k \\ 1 & \text{si } b_{k+1} \geq b_k. \end{cases}$$

Cuando $(b_k)$ es de variación acotada (v. [6]) y $b_k \longrightarrow b > 1$, la fórmula (0.1) posee dos soluciones $(X_n)$, $(Y_n)$ que se comportan de la siguiente manera cuando $n \longrightarrow \infty$ :

$$\frac{X_n}{\prod_{k=1}^{n} \sqrt{b_k}} = \cos(\sum_{k=1}^{n} \theta_k) + o(1), \qquad \frac{Y_n}{\prod_{k=1}^{n} \sqrt{b_k}} = \operatorname{sen}(\sum_{k=1}^{n} \theta_k) + o(1).$$

Aquí, $\cos\theta_k = \frac{1}{\sqrt{b_k}}$ $(0 < \theta_k < \frac{\pi}{2})$. En consecuencia, la fórmula fraccionaria de recurrencia (0.2) posee dos soluciones complejas que convergen a los límites $\sqrt{b} \cdot e^{i\theta}$, $\sqrt{b} \cdot e^{-i\theta}$, respectivamente, donde $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{b}}$ $(0 < \theta < \frac{\pi}{2})$.

## 1. Fórmulas fraccionarias de recurrencia de primer orden

Considérese la fórmula lineal de recurrencia de segundo orden (v. Nota 1.1, abajo) para la sucesión $(X_n;\ n = 0, 1, 2, ...)$:

$$X_{n+1} - 2 \cdot X_n + b_n \cdot X_{n-1} = 0, \quad n = 1, 2, 3, ..., \quad b_n \longrightarrow b. \tag{1.1}$$

Dividiendo la fórmula anterior por $X_n$ y tomando $T_n = \frac{X_n}{X_{n-1}}$, $n = 1, 2, 3, ...$, se obtiene la fórmula fraccionaria de recurrencia de primer orden

$$T_{n+1} = 2 - \frac{b_n}{T_n}, \quad n = 1, 2, 3, ..., \quad b_n \longrightarrow b. \tag{1.2}$$

Sean $f_n(x) = 2 - \frac{b_n}{x}$, $n = 1, 2, 3, ...$, $f(x) = 2 - \frac{b}{x}$. Entonces, $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ uniformemente en el exterior de una vecindad del origen. Nótese que, usando las convenciones $\frac{1}{0} = \infty$, $\frac{1}{\infty} = 0$, las funciones $f_n$ y $f$ están definidas en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ y son biyectivas.

Cuando $b_n \longrightarrow b$, $b < 1$, sabemos que todas las soluciones de la fórmula (1.2) convergen (v. [6]). En esta sección se estudian las soluciones de (1.2) cuando $b_n \longrightarrow b \geq 1$, y se demuestra que éstas son oscilantes, excepto en algunos casos en los que $(b_n)$ tiende rápidamente al límite 1. Se examinan también los casos $b_n < 1$ y $b_n > 1$ de $b_n \to 1$.

*Nota 1.1.* Cualquier fórmula lineal de recurrencia puede reducirse a esta forma por medio de una transformación elemental apropiada (v. [6]).

### 1.1. Caso en que $b_n \longrightarrow b > 1$.

La función $f(x)$ no tiene puntos fijos reales. Por lo tanto, la solución $(T_n)$ de (1.2) diverge para cualquier valor real $T_1$ (v. [3]). Teniendo en cuenta que

$$f_n(x) < x \text{ para } x > 0, \quad f_n(x) > 2 \text{ para } x < 0,$$

se deduce que si $T_k > 0$ entonces $f_k(T_k) = T_{k+1} < T_k$, y si $T_{k+1} > 0$ entonces $f_{k+1}(T_{k+1}) = T_{k+2} < T_{k+1}$. Sucesivamente se obtiene entonces que

$$T_k > T_{k+1} > T_{k+2} > \cdots .$$

Como la sucesión $(T_k, T_{k+1}, T_{k+2}, ...)$ no converge, debe existir nesesariamente $m > k$ tal que $T_m \leq 0$. En consecuencia $T_{m+1} = f_m(T_m) > 2$ si $T_m < 0$, y $T_{m+1} = f_m(0) = \infty$ si $T_m = 0$. Por lo tanto, cualquier solución real $(T_n)$ de (1.2) es oscilante (v. Fig. 1).

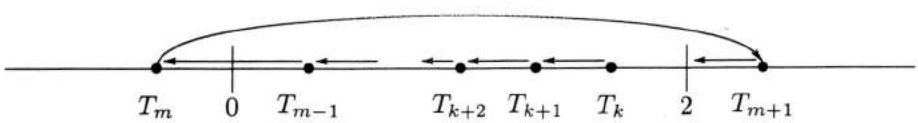


**Figura 1.**

**Ejemplo 1.1.** *Considérese la fórmula fraccionaria de recurrencia*

$$T_{n+1} = 2 - (2 + \frac{1}{n}) \cdot \frac{1}{T_n}, \quad n = 1, 2, 3, ..., \quad T_1 = 1.$$

*La siguiente tabla muestra el carácter oscilante de $(T_n)$.*

| $n$ | *1* | *2* | *3* | *4* | *5* | *6* | *7* | *8* | *9* | *10* | *11* | *12* | *13* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $T_n$ | *1* | *-1* | *4.5* | *1.48* | *0.48* | *-2.57* | *2.84* | *1.25* | *0.29* | *-5.16* | *2.40* | *1.13* | *0.16* |

| $n$ | *14* | *15* | *16* | *17* | *18* | *19* | *20* | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $T_n$ | *-11.11* | *2.19* | *1.05* | *0.04* | *-44.18* | *2.05* | *1.00* | $\cdots$ |

## 1.2. Caso en el que $b_n \longrightarrow 1$ y $b_n < 1$ para todo $n$.

La función $f(x)$ tiene único punto fijo (real) en $x = 1$. Por lo tanto, éste es el único posible límite de la sucesión $(T_n)$ dada por (1.2). Más precisamente:

**Teorema 1.1.** *Toda solución $(T_n)$ de la fórmula fraccionaria de recurrencia (1.2) converge al límite 1 cuando $b_n < 1$ para todo $n$ y $b_n \longrightarrow 1$.*

*Demostración.* (v. [5]). La función $f_n(x)$ tiene dos puntos fijos $p_n$, $q_n$ (v. Fig. 2):

$$p_n = 1 - \sqrt{1 - b_n}, \quad q_n = 1 + \sqrt{1 - b_n}.$$

Evidentemente

$$p_n < 1 < q_n, \quad p_n, \; q_n \longrightarrow 1.$$

Dado $\epsilon > 0$ ($\epsilon < \frac{1}{2}$) arbitrario, existe $N$ tal que $1-\epsilon < p_n < 1 < q_n < 1+\epsilon$ para todo $n \geq N$. Nótese que para todo $j \geq n$ ($\geq N$) se tiene que $f_j(x) < x$ cuando $x \geq 1+\epsilon$ ó $0 < x \leq 1-\epsilon$. Supongamos primero que $1 < T_m < 1+\epsilon$ para algún $m \geq N$. Entonces podemos demostrar, por inducción, que $1 < T_n < 1+\epsilon$ para todo $n \geq m$. En efecto, como la función $f_n(x)$ es creciente en $(0,\infty)$, entonces $1 < T_n < 1+\epsilon$ implica que $1 < f_n(1) < f_n(T_n) = T_{n+1} < f_n(1+\epsilon) < 1+\epsilon$.

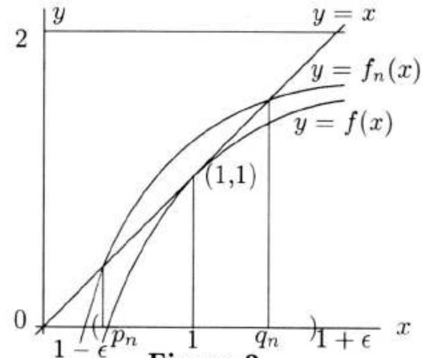

**Figura 2.**

Supongamos en segundo lugar que $T_j \geq 1+\epsilon$ para *algún* $j \geq N$. Entonces $1 < T_{j+1} = f_j(T_j) < T_j$, y si $T_{j+1} \geq 1+\epsilon$, entonces $1 < T_{j+2} < T_{j+1}$, y así sucesivamente, llegándose a que

$$T_j > T_{j+1} > T_{j+2} > \cdots > 1.$$

Es decir, si $T_n > 1+\epsilon$ para todo $n \geq j$, la sucesión $(T_j, T_{j+1}, T_{j+2}, ...)$ es decreciente y acotada inferiormente por $1+\epsilon$, lo cual es imposible, ya que "1" es el único posible límite de tal sucesión. Por lo tanto, debe existir $m > j$ tal que $T_m \in (1, 1+\epsilon)$, lo cual reduce el argumento al caso anterior.

Supongamos finalmente que existe $r \geq N$ tal que $T_r \leq 1-\epsilon$. Entonces $T_r < p_r$, así que $T_{r+1} = f_r(T_r) < T_r$. De la misma manera se obtiene que $T_r > T_{r+1} > T_{r+2} > \cdots$. En consecuecia, para algún $j > r \geq N$ se debe tener que $T_{j-1} < 0$. Por lo tanto $T_j = f_{j-1}(T_{j-1}) > 2 > 1+\epsilon$, quedando así en el caso anterior. Se concluye que dado $\epsilon > 0$ arbitrario, existe $m \geq N$ tal que $T_n \in (1-\epsilon, 1+\epsilon)$ para todo $n \geq m$. La sucesión $(T_n)$ converge entonces al límite 1. □

## 1.3. Caso en el que $b_n \longrightarrow 1$ y $b_n > 1$ para todo $n$.

Obsérvese que $f_n(x) < f(x) < x$ para todo $x > 0$. Necesitaremos los dos lemas siguientes.

**Lema 1.1.** *Si existe una solución $(\widetilde{T}_n)$ de la fórmula de recurrencia que converge al límite 1, entonces cualquier otra solución también converge a 1.*

*Demostración* Supongamos que $(\widetilde{T}_n)$ es una solución de (1.2) y que $\widetilde{T}_n \longrightarrow 1$. Dado $\epsilon > 0$ ($\epsilon < \frac{1}{2}$) existe $N$ tal que

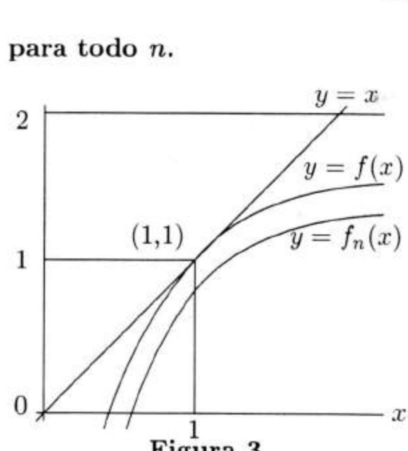

**Figura 3.**

$1-\epsilon < \widetilde{T}_n < 1+\epsilon$ para todo $n \geq N$. Como $\widetilde{T}_n > 0$ para todo $n \geq N$, entonces la sucesión $(\widetilde{T}_n, \widetilde{T}_{n+1}, \widetilde{T}_{n+2}, ...)$ es decreciente y converge a 1. Sea $(T_n)$ cualquier otra solución de (1.2). Si $T_n > 1$ para todo $n \geq N$, la sucesión $(T_n)$ es decreciente y acotada a partir del $N$-ésimo término. Por lo tanto, converge al límite 1. Si $T_n \leq 1$ para algún $n \geq N$, existe $M$, $M \geq n \geq N$, tal que $T_{M-1} < 0$. En consecuencia $T_M = f_{M-1}(T_{M-1}) > 2$, y se tendrá que $\widetilde{T}_M < 1+\epsilon < 2 < T_M$. Como para todo $k$, $f_k(x)$ es creciente en $(0, +\infty)$, entonces $1 < \widetilde{T}_k < T_k$ para todo $k \geq M$. Puesto que la sucesión $(T_k)$ es decreciente a partir del $M$-ésimo término y está además acotada por 1, se tendrá que $T_k \longrightarrow 1$. □

Lo establecido en el Lema 1.1. que acabamos de demostrar es equivalente a lo siguiente:
*Toda solución de la fórmula de recurrencia (1.2) converge en forma decreciente, o toda solución diverge.*

**Lema 1.2.** *Sean $(T_n)$ y $(S_n)$ soluciones respectivas de las fórmulas de recurrencia*

$$T_{n+1} = 2 - \frac{b_n}{T_n},\ S_{n+1} = 2 - \frac{c_n}{S_n};\ b_n > 1,\ c_n > 1,\ \text{para todo } n. \tag{1.3}$$

*Supóngase además que existe $N$ tal que $c_n \geq b_n$ para todo $n \geq N$. Si la sucesión $(S_n)$ converge (al límite 1), la sucesión $(T_n)$ también converge (al límite 1).*

*Demostración.* En efecto, como $S_n \longrightarrow 1$, existe $m \geq N$ tal que la sucesión $(S_n)$ es decreciente a partir del $m$-ésimo término. Sea $(T_n)$ la solución de la primera fórmula de recurrecia en (1.3) que satisface la condición $T_m = S_m$. Se demuestra inmediatamente por inducción que

$$T_n \geq S_n,\ \text{para todo } n \geq m.$$

Como $S_n > 1$ para todo $n \geq m$, entonces $T_n > 1$ para todo $n \geq m$, de lo cual $T_n \longrightarrow 1$. □

Del Lema 1.1. se deduce que cualquier solución $(T_n)$ de la primera fórmula de recurrencia dada en (1.3) converge al límite 1. A continuación investigaremos la convergencia o divergencia de las soluciones de la fórmula de recurrencia (1.2) en varias situaciones.

**Teorema 1.2.** *Considérese la fórmula de recurrencia (1.2). Entonces:*

(i) *Si $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - 1) = \infty$, toda solución $(T_n)$ de (1.2) diverge en forma oscilante.*

(ii) *Si $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot (b_n - 1) < +\infty$, toda solución $(T_n)$ converge (al límite 1).*

*Demostración.* *(i)* Supondremos que $T_n \longrightarrow 1$, y llegaremos a un absurdo. En la demostración del Lema 1.1 vimos que dado $\epsilon > 0$ ($\epsilon < \frac{1}{2}$) existe $N$ tal que

$$1 < T_n < 1+\epsilon,\ \text{para todo } n \geq N. \tag{1.4}$$

De la fórmula de recurrencia (1.2) se deduce, por otra parte, que

$$T_{n+1} - 1 = 1 - \frac{b_n}{T_n} = \frac{T_n - 1}{T_n} - \frac{b_n - 1}{T_n}.$$

Como $T_n > 1$ para todo $n \geq N$, se obtiene entonces que

$$T_{n+1} - 1 < (T_n - 1) - \frac{b_n - 1}{T_n}, \quad \text{para todo} \quad n \geq N. \tag{1.5}$$

En la desigualdad anterior, tomando $n = N, N+1, ..., m$, y sumando, se llega a que

$$T_{m+1} - 1 < (T_N - 1) - \sum_{n=N}^{m} \frac{b_n - 1}{T_n}. \tag{1.6}$$

Por hipótesis, la serie $\sum_{n=N}^{\infty}(b_n - 1)$ diverge a $+\infty$. Entonces $\sum_{n=N}^{\infty} \frac{b_n-1}{T_n}$ también lo hará, pues $T_n \longrightarrow 1$. Por lo tanto,

$$T_N - 1 < \sum_{n=N}^{m} \frac{b_n - 1}{T_n}, \text{ para todo } m \text{ lo suficientemente grande.}$$

Pero, de (1.6) se debe tener que $T_{m+1} - 1 < 0$, o sea que $T_{m+1} < 1$. Esto contradice la desigualdad (1.4). Por lo tanto, $(T_n)$ es divergente.

*(ii)* Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot (b_n - 1) < 1$. Considérese la solución $(T_n)$ de (1.2) con $T_1 = 2$. Vamos a demostrar que $T_n > 1$ para todo $n$. En consecuencia, se tendrá que $T_n \longrightarrow 1$. Ahora, por inducción se demuestra inmediatamente que $T_k < 1 + \frac{1}{k} = \frac{k+1}{k}$ para todo $k = 2, 3, 4, ..., n$. En efecto, si $T_k \leq \frac{k+1}{k}$, entonces $T_{k+1} = 2 - \frac{b_k}{T_k} < 2 - \frac{1}{T_k} \leq 2 - \frac{k}{k+1} = 1 + \frac{1}{k+1}$. Ahora, de (1.2) se obtiene que

$$T_{k+1} - 1 = \frac{T_k - 1}{T_k} - \frac{b_k - 1}{T_k}, \quad k = 1, 2, ..., n,$$

la cual se puede considerar como una fórmula lineal de recurrecnia de primer orden para $T_k - 1$. Por lo tanto (v. [3]),

$$T_{n+1} - 1 = \frac{1}{\prod_{k=1}^{n} T_k} \cdot \left[(T_1 - 1) - \sum_{k=1}^{n} \frac{T_1 \cdot T_2 \cdots T_k}{T_k} \cdot (b_k - 1)\right].$$

Pero, como

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{T_1 \cdot T_2 \cdots T_k}{T_k} \cdot (b_k - 1) &< (b_1 - 1) + \sum_{k=2}^{n} \frac{2}{1}\frac{3}{2} \cdots \frac{k}{k-1} \cdot (b_k - 1) \\ &= (b_1 - 1) + \sum_{k=2}^{n} k \cdot (b_k - 1) < 1\end{aligned}$$

se tiene que $T_{n+1} - 1 > \frac{1}{\prod_{k=1}^{n} T_k} \cdot \left[(T_1 - 1) - 1\right] = 0$. Por inducción se obtiene entonces que $T_n > 1$ para todo $n$. $\square$

**Teorema 1.3.** *Para la fórmula de recurrencia*

$$T_{n+1} = 2 - \left(1 + \frac{C}{n^2}\right) \cdot \frac{1}{T_n}, \quad n = 1, 2, 3, ..., \tag{1.7}$$

*se tiene:*

(i) *Si* $0 < C \leq \frac{1}{4}$, *toda solución converge.*
(ii) *Si* $C > \frac{1}{4}$, *toda solución diverge.*

*Demostración.* *(i)* En virtud del Lema 1.2, basta demostrar que la solución de la fórmula fraccionaria de recurrencia

$$T_{n+1} = 2 - \left(1 + \frac{1}{4n^2}\right) \cdot \frac{1}{T_n}, \quad n = 1, 2, 3, ..., \tag{1.8}$$

converge. Considérese la siguiente fórmula fraccionaria de recurrencia:

$$S_{n+1} = 2 - \frac{4n^2}{4n^2 - 1} \cdot \frac{1}{S_n}, \quad n = 1, 2, 3, ....$$

Se comprueba inmediatamente que la sucesión $\left(\frac{2n}{2n-1}\right)$ es una solución de ésta, convergente a 1. Además,

$$\frac{4n^2}{4n^2 - 1} = 1 + \frac{1}{4n^2 - 1} > 1 + \frac{1}{4n^2}, \quad \text{para todo} \quad n.$$

El Lema 1.2. asegura entonces que cualquier solución de (1.8) converge al límite 1.

*(ii)* La fórmula de recurrencia (1.7) puede escribirse en la forma

$$(T_{n+1} - 1) = (T_n - 1) - \frac{1}{T_n} \cdot \left\{(T_n - 1)^2 + \frac{C}{n^2}\right\}. \tag{1.9}$$

Supongamos que una solución de (1.7) (ó de (1.9)) converge al límite 1. Entonces, dado $\epsilon > 0$ arbitrario existe $N$ tal que

$$1 < T_n < 1 + \epsilon, \text{ para todo } \quad n \geq N.$$

Por lo tanto,

$$-\frac{1}{T_n} < -\frac{1}{1 + \epsilon}, \text{ para todo } \; n \geq N. \tag{1.10}$$

Reemplazando en (1.9) la desigualdad (1.10), obtenemos la relación

$$(T_{n+1} - 1) < (T_n - 1) - \frac{1}{1 + \epsilon} \cdot \left\{(T_n - 1)^2 + \frac{C}{n^2}\right\} < (T_n - 1) - \frac{1}{1 + \epsilon} \cdot \frac{C}{n^2}. \tag{1.11}$$

Sumando las desigualdades anteriores desde $n$ hasta $\infty$, se llega a que

$$0 < (T_n - 1) - \frac{C}{1+\epsilon} \cdot \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2} < (T_n - 1) - \frac{C}{1+\epsilon} \cdot \frac{1}{n}. \tag{1.12}$$

Hemos usado la desigualdad

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2} > \int_n^{\infty} \frac{1}{t^2} dt = \frac{1}{n}.$$

De (1.12) se deduce la estimativa

$$T_n - 1 > \frac{C}{1+\epsilon} \cdot \frac{1}{n}, \tag{1.13}$$

que llamaremos la *primera desigualdad para* $T_n - 1$. Ahora, reemplazando la desigualdad (1.13) en (1.11) se obtiene que

$$(T_{n+1} - 1) < (T_n - 1) - \frac{C}{1+\epsilon} \cdot \left\{ \frac{C}{(1+\epsilon)^2} + 1 \right\} \cdot \frac{1}{n^2}, \tag{1.14}$$

y sumando la desigualdad (1.14) desde $n$ hasta $\infty$, que

$$0 < (T_n - 1) - \frac{C}{1+\epsilon} \cdot \left\{ \frac{C}{(1+\epsilon)^2} + 1 \right\} \cdot \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2} < (T_n - 1) - \frac{C}{1+\epsilon} \cdot \left\{ \frac{C}{(1+\epsilon)^2} + 1 \right\} \cdot \frac{1}{n}$$

Esto implica la *segunda desigualdad* para $(T_n - 1)$:

$$T_n - 1 > \frac{C}{1+\epsilon} \cdot \left\{ \frac{C}{(1+\epsilon)^2} + 1 \right\} \cdot \frac{1}{n}. \tag{1.15}$$

En general, si $(A_j;\ j = 1, 2, 3, \ldots)$ está dada por la fórmula de recurrencia

$$A_{j+1} = G(A_j) = \frac{C}{(1+\epsilon)^2} \cdot (A_j)^2 + 1, \quad A_1 = 1, \tag{1.16}$$

un argumento inductivo permite establecer las siguientes desigualdades para $T_n - 1$:

$$T_n - 1 > \frac{C}{1+\epsilon} \cdot A_j \cdot \frac{1}{n}, \quad j = 1, 2, 3, \ldots, \quad n \geq N. \tag{1.17}$$

Sea $L$ un punto fijo de la función $G(x) = \frac{C}{(1+\epsilon)^2} \cdot x^2 + 1$. Entonces $G(L) = L$, o sea

$$C \cdot L^2 - (1+\epsilon)^2 \cdot L + (1+\epsilon)^2 = 0.$$

Esta es una ecuación cuadrática sin soluciones reales cuando $(1+\epsilon)^4 - 4C \cdot (1+\epsilon)^2 < 0$, o sea, para $C > \frac{1}{4} \cdot (1+\epsilon)^2$. Por lo tanto, si $C > \frac{1}{4} \cdot (1+\epsilon)^2$, la sucesión $(A_j;\ j = 1, 2, 3, \ldots)$ dada por (1.16) diverge a $+\infty$. En tal caso, haciendo $j \longrightarrow \infty$ en (1.17) se obtiene que $T_n - 1 \geq \infty$ para todo $n \geq N$, lo cual es absurdo. Por lo tanto, cuando $C > \frac{1}{4} \cdot (1+\epsilon)^2$, ninguna solución de (1.7) converge. Como $\epsilon > 0$ es arbitrario se concluye que cuando $C > \frac{1}{4}$, toda solución de (1.7) diverge (en forma oscilante). □

**Ejemplo 1.2.** *Para la fórmula fraccionaria de recurrencia*

$$T_{n+1} = 2 - \left(1 + \frac{C}{n^s}\right) \cdot \frac{1}{T_n}, \quad C > 0,$$

*se tiene:*

(i) *Cuando* $s > 2$, *toda solución* $(T_n)$ *converge al límite 1.*
(ii) *Cuando* $s < 2$, *toda solución* $(T_n)$ *diverge en forma oscilante.*
(iii) *Si* $s = 2$ *y* $C \leq \frac{1}{4}$, *toda solución* $(T_n)$ *converge al límite 1.*
(iv) *Si* $s = 2$ *y* $C > \frac{1}{4}$, *toda solución* $(T_n)$ *diverge en forma oscilante.*

## 2. Fórmulas lineales de recurrencia de segundo orden que generan sucesiones oscilantes

### 2.1. Comportamiento global de las sucesiones oscilantes.

Considérese la fórmula lineal de recurrencia de segundo orden

$$X_{n+1} - 2 \cdot X_n + b_n \cdot X_{n-1} = 0, \quad n = 1, 2, 3, .... \tag{2.1}$$

En [6] se han estudiado detalladamente las soluciones de (2.1) cuando $b_n \longrightarrow b < 1$. En la presente sección se demuestra que *cuando* $b_n > 1$ *para todo* $n$, *las soluciones de (2.1) son (casi) siempre oscilantes.*

Supóngase que la solución $(X_n)$ de la fórmula (2.1) satisface la condición (v. Fig 4)

$$X_{t-1} < 0 \leq X_t < X_{t+1}, \text{ para algún } t \geq 1. \tag{2.2}$$

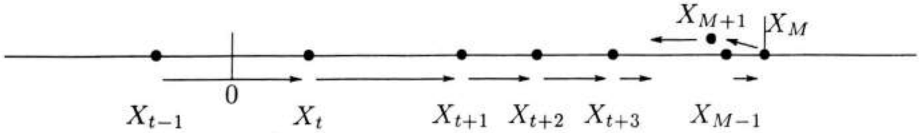


**Figura 4.**

De (2.1) se tiene que

$$(X_{n+1} - X_n) = (X_n - X_{n-1}) - (b_n - 1) \cdot X_{n-1}. \tag{2.3}$$

Como $b_n - 1 > 0$, $X_{t-1} < 0$, $X_t \geq 0$, $X_{t+1} > 0$, ... , entonces

$$X_t - X_{t-1} < X_{t+1} - X_t \geq X_{t+2} - X_{t+1} > X_{t+3} - X_{t+2} > \cdots,$$

ésto es, la sucesión $(X_{n+1} - X_n)$ es decreciente a partir de $n = t$. Esto permite asegurar que

*(i)* Si la diferencia de dos términos consecutivos $X_{n+1} - X_n$ nunca llega a ser negativa (este hecho puede ocurrir cuando $b_n \longrightarrow 1$), entonces $(X_n;\ n = t, t+1, t+2, ...)$ es creciente, de lo cual convergente o divergente a $+\infty$.

*(ii)* Supongamos ahora que, para algún $M$,

$$X_M - X_{M-1} \geq 0, \quad X_{M+1} - X_M < 0.$$

Multiplicando (2.3) por -1 se obtiene que

$$X_{M-1} - X_M \leq 0 < X_M - X_{M+1} < X_{M+1} - X_{M+2} < X_{M+2} - X_{M+3} < \cdots,$$

o sea, que $(X_n - X_{n+1})$ es creciente a partir de $n = M$. Se concluye entonces que la sucesión $(X_n;\ n = t, t+1, t+2, \ldots)$ es creciente hasta llegar al término máximo (local) $X_M$, luego comienza a decrecer, y en algún término $X_s$ alcanza valores negativos (v. Fig. 5):

$$X_{s+1} < X_s \leq 0 < X_{s-1} < X_{s-2} < \cdots.$$

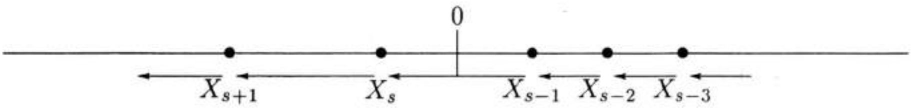


**Figura 5.**

Como $X_{s-1} > 0$ y $X_n < 0$ para $n = s, s+1, s+2, \ldots$, entonces

$$X_{s-1} - X_s < X_s - X_{s+1} \geq X_{s+1} - X_{s+2} > X_{s+2} - X_{s+3} > \cdots,$$

o sea, $(X_n - X_{n+1})$ es decreciente para $n = s, s+1, s+2, \ldots$. Si $X_n - X_{n+1}$ nunca llega a ser negativo entonces $(X_n;\ n = s, s+1, s+2, \ldots)$ es decreciente, de lo cual convergente ó divergente a $-\infty$. Si, por el contrario, para algún $m$, $X_{m-1} - X_m \geq 0$, pero $X_m - X_{m+1} < 0$, nuestra sucesión tendrá un mínimo local en $X_m$ y comenzará a crecer a partir del término $X_m$.

En conclusión, *la sucesión $(X_n;\ n = 1, 2, 3, \ldots)$ dada por la fórmula de recurrencia (2.1) es, sea una sucesión oscilante, ó una sucesión monótona a partir de algún término, de lo cual, convergente (ó divergente a $\pm\infty$). Además, $|X_n - X_{n+1}|$ es un máximo local cuando $X_{n-1} \cdot X_n \leq 0$.*

## 2.2. La fórmula de recurrencia cuando $b_n > 1$ para todo $n$ y $b_n \longrightarrow 1$.

Dividiendo término a término la fórmula lineal de recurrencia (2.1) por $X_n$ y tomando $T_n = \frac{X_n}{X_{n-1}}$, se obtiene la fórmula fraccionaria de recurrencia

$$T_{n+1} = 2 - \frac{b_n}{T_n}, \quad n = 1,\ 2,\ 3, \ldots. \tag{2.4}$$

El comportamiento de la sucesión $(T_n;\ n = 1, 2, 3, \ldots)$ estudiado en la Sección 1 permite investigar el de la solución $(X_n;\ n = 1, 2, 3, \ldots)$ de (2.1). Obsérvese en particular que

$$X_n = X_0 \cdot \prod_{k=1}^{n} T_k, \quad n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{2.5}$$

**Teorema 2.1.** *Supóngase en (2.1) que* $b_n > 1$ *para todo* $n$ *y que* $b_n \longrightarrow 1$. *Entonces:*

(i) *Si* $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - 1) = +\infty$, *cualquier solución* $(X_n;\ n = 1, 2, 3, \ldots)$ *de (2.1) es oscilante.*

(ii) *Si* $\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot(b_n - 1) < +\infty$, *toda solución* $(X_n;\ n = 1, 2, 3, \ldots)$ *es monótona a partir de un término, y el límite* $\lim_{n\to\infty}(X_{n+1} - X_n)$ *existe. Además, existe una solución* $(X_n)$, *asintóticamente lineal, esto es,*

$$X_n \sim \alpha \cdot n, \quad \alpha \neq 0,$$

*y otra solución* $(Y_n)$, *convergente a un límite no nulo.*

(iii) *Si* $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - 1) < +\infty$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot (b_n - 1) = +\infty$, *ninguna solución de (2.1) converge.*

*Demostración.* *(i)* De (2.5) es evidente que la sucesión $(X_n)$ es oscilante si la $(T_n)$ lo es, y que $(X_n)$ es monótona a partir de algún término si $T_n > 1$ para todo $n$ suficientemente grande y $\lim_{n\to\infty} T_n = 1$. La afirmación resulta entonces del Teorema 1.2.

*(ii)* Sea $t$ un número natural tal que

$$\sum_{k=t+1}^{\infty} k \cdot (b_k - 1) < 1, \tag{2.6}$$

y escojamos la solución $(X_n)$ de la fórmula de recurrencia (2.1) sujeta a la condición

$$X_{t-1} < 0 \leq X_t.$$

Sumando la igualdad (2.3) desde $t + 1$ hasta $n$, se obtiene que

$$X_{n+1} - X_n = X_{t+1} - X_t - \sum_{k=t+1}^{n} (b_k - 1) \cdot X_{k-1}. \tag{2.7}$$

Por otra parte, como $X_{n+1} - X_n \leq X_{t+1} - X_t$ para $n = t, t+1, t+2, \ldots$, entonces

$$X_n - X_t = \sum_{k=t}^{n-1}(X_{k+1} - X_k) < \sum_{k=t}^{n-1}(X_{t+1} - X_t) = (n - t) \cdot (X_{t+1} - X_t),$$

o sea,

$$X_n < X_t + (n - t) \cdot (X_{t+1} - X_t) < (n - t + 1) \cdot (X_{t+1} - X_t) \leq n \cdot (X_{t+1} - X_t).$$

Por lo tanto,

$$\sum_{k=t+1}^{n} (b_k - 1) \cdot X_{k-1} < \sum_{k=t+1}^{\infty} (b_k - 1) \cdot k \cdot (X_{t+1} - X_t) < X_{t+1} - X_t.$$

De (2.7) se obtiene, por otra parte, que

$$X_{n+1} - X_n > (X_{t+1} - X_t) - \sum_{k=t+1}^{\infty} (b_k - 1) \cdot k \cdot (X_{t+1} - X_t) > 0.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty} (X_{n+1} - X_n) = \alpha \neq 0,$$

y del primer teorema de Cauchy (v. [2],[4]) se deduce que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{X_n - X_0}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n}(X_k - X_{k-1})}{n} = \alpha \ (\neq 0).$$

Por otra parte, se puede comprobar directamente que la segunda solución $(Y_n;\ n = 0, 1, 2, ...)$ de (2.1) está dada por (v. [6])

$$Y_n = X_n \cdot \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{b_1 \cdot b_2 \cdots b_{k-1}}{X_{k-1} \cdot X_k}, \quad n = 1, 2, 3, ....$$

Nótese que la serie $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{b_1 \cdot b_2 \cdots b_{k-1}}{X_{k-1} \cdot X_k}$ converge, pues el producto infinito $\prod_{k=1}^{\infty} b_k = \prod_{k=1}^{\infty}(1 + (b_k - 1))$ converge (v. [1]) y $X_k \sim \alpha \cdot k$ (cuando $k \longrightarrow \infty$). Utilizando finalmente la Regla de L'Hôpital (v. [2],[4]), se obtiene que

$$Y_n = \frac{\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{b_1 \cdot b_2 \cdots b_{k-1}}{X_{k-1} \cdot X_k}}{\frac{1}{X_n}} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{b_1 \cdot b_2 \cdots b_{k-1}}{X_{k-1} \cdot X_k} \sum_{k=n+1}^{\infty} (\frac{1}{X_{k-1}} - \frac{1}{X_k})$$

$$\stackrel{(n\to\infty)}{\longrightarrow} \lim_{n\to\infty} \left[ \frac{\frac{b_1 \cdot b_2 \cdots b_{k-1}}{X_{k-1} \cdot X_k}}{(\frac{1}{X_{k-1}} - \frac{1}{X_k})} \right] = \lim_{k\to\infty} \frac{b_1 \cdot b_2 \cdots b_{k-1}}{X_k - X_{k-1}} = \frac{1}{\alpha} \cdot \prod_{k=1}^{\infty} b_k,$$

y esto completa la demostración de *(ii)*.

*(iii)* Supongamos ahora que $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot (b_n - 1) = +\infty$ y que $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - 1) < +\infty$. Demostraremos que ninguna solución $(X_n)$ de la fórmula lineal (2.1) converge. Podemos suponer que la solución $(T_n)$ de la fórmula fraccionaria (2.4) tiende al límite 1, pues en caso contrario la sucesión $(X_n)$ es oscilante. Dado $\epsilon > 0$ existe, en virtud de la desigualdad (1.5), $N \geq 0$ tal que

$$T_{n+1} - 1 < T_n - 1 - \frac{1}{1+\epsilon} \cdot (b_n - 1), \quad \text{para todo } n \geq N.$$

Sumando la desigualdad anterior desde $n$ hasta $\infty$, se llega a que

$$0 < (T_n - 1) - \frac{1}{1+\epsilon} \cdot \sum_{k=n}^{\infty} (b_k - 1),$$

o sea, a que

$$T_n - 1 > \frac{1}{1+\epsilon} \cdot \sum_{k=n}^{\infty} (b_k - 1).$$

Sumar la desigualdad anterior desde $N$ hasta $\infty$ conduce a

$$\begin{aligned}\sum_{n=N}^{\infty}(T_n-1) &> \frac{1}{1+\epsilon}\cdot\sum_{n=N}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty}(b_k-1)\\ &= \frac{1}{1+\epsilon}\cdot\sum_{k=N}^{\infty}\sum_{n=N}^{k}(b_k-1)\\ &= \frac{1}{1+\epsilon}\cdot\sum_{k=N}^{\infty}(k-N+1)\cdot(b_k-1)=+\infty,\end{aligned}$$

ya que

$$\sum_{k=N}^{\infty}k\cdot(b_k-1)=+\infty \quad \text{y} \quad \sum_{k=N}^{\infty}(N-1)\cdot(b_k-1)=(N-1)\cdot\sum_{k=N}^{\infty}(b_k-1)<+\infty.$$

Por lo tanto, $\prod_{k=N}^{\infty}T_k=\prod_{k=N}^{\infty}(1+(T_k-1))=+\infty$, y de (2.5) se obtiene que $(X_n)\longrightarrow\pm\infty$. Esto demuestra el teorema. □

En vista del Teorema 1.3., obtenemos el siguiente corolario.

**Corolario 2.1.** *Para la relación de recurrencia (2.1) se tiene:*

(i) *Si $b_n>1+\frac{1}{4n^2}$ para todo $n$ suficientemente grande, toda solución $(X_n)$ diverge en forma oscilante.*

(ii) *Si $b_n\le 1+\frac{1}{4n^2}$ para todo $n$ suficientemente grande, toda solución $(X_n)$ es monótona a partir de algún término.*

(iii) *Si $b_n=1+\frac{C}{n^2}$ $(0<C\le\frac{1}{4})$ entonces $(X_n)\longrightarrow\pm\infty$.*

**Ejemplo 2.1.** *Considérese la sucesión $(X_n)$ dada por*

(2.9) $X_{n+1}-2\cdot X_n-(1+p^n)\cdot X_{n-1}=0,\quad n=1,2,3,...,\ X_0=0,\ X_1=1.$

*Cuando $0<p<1$, $(X_n)$ es monótona a partir de algún término. Por ejemplo, si $p=0.9$, $(X_n)$ toma los siguientes máximos y mínimos locales :*

$$X_3=2.19,\ X_7=-7.33,\ X_{13}=20.42,\ X_{22}=-47.71,\ X_{37}=99.20.$$

*A partir del término $X_{37}$, $(X_n)$ decrece monótonamente a $-\infty$.*

## 3. Comportamiento asintótico de las sucesiones oscilantes generadas por fórmulas lineales de recurrencia de segundo orden

### 3.1. Amplitud de oscilación.

Sea $(X_k;\ k=1,2,3,...)$ una sucesión dada por la fórmula lineal de recurrencia de segundo orden

(3.1) $\quad X_{k+1}-2\cdot X_k+b_k\cdot X_{k-1}=0,\ k=1,2,3,...,\ b_k>1$ para todo $k$.

Se tiene que

$$X_{k+1} + b_k \cdot X_{k-1} = 2 \cdot X_k.$$

Multiplicando la igualdad anterior por $X_{k+1} - b_k \cdot X_{k-1}$ y sumando $b_k \cdot X_k^2$ a ambos miembros, se obtiene que

$$X_{k+1}^2 + b_k \cdot X_k^2 - 2 \cdot X_{k+1} \cdot X_k = b_k \cdot \left(X_k^2 + b_k \cdot X_{k-1}^2 - 2 \cdot X_k \cdot X_{k-1}\right) \tag{3.2}$$

Sea $\sigma_k$ $(\geq 1)$ definida por

$$\sigma_k = \begin{cases} 1, & \text{si } b_{k+1} \leq b_k \\ \frac{b_{k+1}-1}{b_k-1}, & \text{si } b_{k+1} \geq b_k. \end{cases} \tag{3.3}$$

Entonces, de (3.2) se obtiene la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned} X_{k+1}^2 + {}& b_{k+1} \cdot X_k^2 - 2 \cdot X_{k+1} \cdot X_k \\ &\leq b_k \cdot \sigma_k \cdot \left(X_k^2 + b_k \cdot X_{k-1}^2 - 2 \cdot X_k \cdot X_{k-1}\right), \ k = 1, 2, 3, .... \end{aligned} \tag{3.4}$$

En efecto, (3.4) es evidente si $b_{k+1} \leq b_k$ (en cuyo caso $\sigma_k = 1$). Supongamos entonces que $b_{k+1} \geq b_k$. Como $\sigma_k \cdot b_k - b_{k+1} = \sigma_k - 1$, se obtiene que

$$\begin{aligned} \sigma_k \cdot \left(X_{k+1}^2 + b_k \cdot X_k^2 - 2 \cdot X_{k+1} \cdot X_k\right) - \left(X_{k+1}^2 + b_{k+1} \cdot X_k^2 - 2 \cdot X_{k+1} \cdot X_k\right) \\ \geq (\sigma_k - 1) \cdot (X_{k+1} - X_k)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

y (3.4) resulta de (3.2). Sea $\rho_k$ $(\leq 1)$ definido por

$$\rho_k = \begin{cases} \frac{b_{k+1}-1}{b_k-1}, & \text{si } b_{k+1} \leq b_k \\ 1, & \text{si } b_{k+1} \geq b_k. \end{cases} \tag{3.5}$$

Entonces, análoga a (3.4),

$$\begin{aligned} b_k \cdot \rho_k \cdot {}& \left(X_k^2 + b_k \cdot X_{k-1}^2 - 2 \cdot X_k \cdot X_{k-1}\right) \\ &\leq X_{k+1}^2 + b_{k+1} \cdot X_k^2 - 2 \cdot X_{k+1} \cdot X_k, \ k = 1, 2, 3.... \end{aligned} \tag{3.6}$$

Sea

$$P_k = \sqrt{X_{k+1}^2 + b_{k+1} \cdot X_k^2 - 2 \cdot X_{k+1} \cdot X_k}, \quad k = 1, 2, 3.... \tag{3.7}$$

De (3.4) y (3.6) se obtiene que

$$\sqrt{\rho_k \cdot b_k} \cdot P_{k-1} \leq P_k \leq \sqrt{\sigma_k \cdot b_k} \cdot P_{k-1}, \quad k = 1, 2, 3...,$$

y multiplicando las desigualdades anteriores desde $k = 1$ hasta $k = n$, que

$$\prod_{k=1}^{n} \sqrt{\rho_k \cdot b_k} \cdot P_0 \leq P_n \leq \prod_{k=1}^{n} \sqrt{\sigma_k \cdot b_k} \cdot P_0. \tag{3.8}$$

Por otra parte, de (3.7),

$$P_k^2 = X_{k+1}^2 + b_{k+1} \cdot X_k^2 - 2 \cdot X_{k+1} \cdot X_k = (X_{k+1} - X_k)^2 + (b_{k+1} - 1) \cdot X_k^2.$$

Por lo tanto,

$$P_k \geq |X_{k+1} - X_k| \ \text{ y } \ P_k \geq \sqrt{b_{k+1} - 1} \cdot |X_k| . \tag{3.9}$$

De (3.8) y de la primera desigualdad en (3.9) se obtiene entonces una cota superior para la diferencia de dos términos consecutivos de la sucesión $(X_k;\ k = 0, 1, 2, ...)$:

$$|X_{n+1} - X_n| \leq P_n \leq \prod_{k=1}^{n} \sqrt{\sigma_k} \cdot \prod_{k=1}^{n} \sqrt{b_k} \cdot P_0. \tag{3.10}$$

Supongamos ahora que $|X_{t+1} - X_t|$ es un máximo local de estas diferencias. Como lo hemos observado en la Sección 2.1, $X_{t-1} \cdot X_t \leq 0$. Entonces, mediante (3.2) se obtiene que

$$\begin{aligned} |X_{t+1} - X_t|^2 - P_{t-1}^2 &= \left(X_{t+1}^2 + X_t^2 - 2X_{t+1}X_t\right) - \left(X_t^2 + b_t X_{t-1}^2 - 2X_t X_{t-1}\right) \\ &= (b_t - 1) \cdot \left(b_t X_{t-1}^2 - 2X_t X_{t-1}\right) \geq 0, \end{aligned}$$

de lo cual,

$$P_{t-1} \leq |X_{t+1} - X_t| .$$

De (3.8) se obtiene también una cota inferior de $|X_{t+1} - X_t|$ como sigue:

$$\prod_{k=1}^{t-1} \sqrt{\rho_k} \cdot \prod_{k=1}^{t-1} \sqrt{b_k} \cdot P_0 \leq P_{t-1} \leq |X_{t+1} - X_t| . \tag{3.11}$$

De (3.10) y (3.11) se obtiene entonces la siguiente acotación para $|X_{t+1} - X_t|$:

$$\prod_{k=1}^{t-1} \sqrt{\rho_k} \cdot \prod_{k=1}^{t-1} \sqrt{b_k} \cdot P_0 \leq |X_{t+1} - X_t| \leq \prod_{k=1}^{t} \sqrt{\sigma_k} \cdot \prod_{k=1}^{t} \sqrt{b_k} \cdot P_0. \tag{3.12}$$

Téngase en cuenta que la acotación (3.12) es válida cuando $X_{t-1} \cdot X_t \leq 0$.

De (3.8) y la segunda desigualdad en (3.9) se obtiene así mismo una cota superior de $|X_n|$:

$$|X_n| \leq \frac{1}{\sqrt{b_{n+1} - 1}} \cdot P_n \leq \frac{1}{\sqrt{b_{n+1} - 1}} \cdot \prod_{k=1}^{n} \sqrt{\sigma_k} \cdot \prod_{k=1}^{n} \sqrt{b_k} \cdot P_0. \tag{3.13}$$

Supongamos ahora que $X_M$ es un máximo ó un mínimo local de los términos de $(X_k)$, ésto es, que

$$0 < X_{M-1} \leq X_M > X_{M+1} \ \text{ ó } \ X_{M+1} > X_M \leq X_{M-1} < 0.$$

Entonces

$$\begin{aligned} (b_M - 1) \cdot X_M^2 - P_{M-1}^2 &= (b_M - 1) \cdot X_M^2 - (X_M^2 + b_M \cdot X_{M-1}^2 - 2 \cdot X_M \cdot X_{M-1}) \\ &= (X_M - X_{M-1}) \cdot (b_M \cdot X_M + b_M \cdot X_{M-1} - 2 \cdot X_M) \\ &= (X_M - X_{M-1}) \cdot (b_M \cdot X_M - X_{M+1}) \geq 0, \end{aligned}$$

así que

$$\sqrt{b_M - 1} \cdot |X_M| \geq P_{M-1}.$$

De (3.8) se obtiene una cota inferior de $|X_M|$ como sigue:

$$|X_M| \geq \frac{1}{\sqrt{b_M - 1}} \cdot P_{M-1} \geq \frac{1}{\sqrt{b_M - 1}} \cdot \prod_{k=1}^{M-1} \sqrt{\rho_k} \cdot \prod_{k=1}^{M-1} \sqrt{b_k} \cdot P_0. \tag{3.14}$$

De (3.13) y (3.14) se obtiene finalmente la siguiente acotación para $|X_M|$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{b_M - 1}} \cdot \prod_{k=1}^{M-1} \sqrt{\rho_k} \cdot \prod_{k=1}^{M-1} \sqrt{b_k} \cdot P_0 &\leq |X_M| \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{b_{M+1} - 1}} \cdot \prod_{k=1}^{M} \sqrt{\sigma_k} \cdot \prod_{k=1}^{M} \sqrt{b_k} \cdot P_0. \end{aligned} \tag{3.15}$$

En los dos casos siguientes se pueden calcular explícitamente los valores de $\sigma_k$ y $\rho_k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$.

*(i) Primer caso*: $(b_k)$ es decreciente y $b_k \longrightarrow b \geq 1$. De la definición de $\sigma_k$ y $\rho_k$ se obtiene que

$$\sigma_k = 1, \quad \rho_k = \frac{b_{k+1} - 1}{b_k - 1}, \quad \text{para todo } k. \tag{3.16}$$

Por lo tanto,

$$\prod_{k=1}^{n} \sqrt{\sigma_k} = 1, \quad \prod_{k=1}^{n} \sqrt{\rho_k} = \frac{\sqrt{b_{n+1} - 1}}{\sqrt{b_1 - 1}}, \quad \text{para todo } n. \tag{3.17}$$

Nótese que las desigualdades (3.12) y (3.15) son válidas en caso de que $b_n \longrightarrow 1$.

**Ejemplo 3.1.** *Sea $(X_n)$ la sucesión determinada por*

$$X_{n+1} - 2 \cdot X_n + (1 + \frac{1}{n}) \cdot X_{n-1} = 0, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad X_0 = 0, \ X_1 = 1,$$

*Entonces*

$$P_0 = 1, \quad \prod_{k=1}^{n} \sqrt{b_k} = \sqrt{n+1}, \quad \prod_{k=1}^{n} \sqrt{\sigma_k} = 1, \quad \prod_{k=1}^{n} \sqrt{\rho_k} = \frac{1}{\sqrt{n+1}},$$

*De (3.12) y (3.15) se obtienen entonces las siguientes acotaciones para $|X_{t+1} - X_t|$ y $|X_M|$:*

$$1 \leq |X_t - X_{t+1}| \leq \sqrt{t+1},$$
$$\sqrt{M} \leq |X_M| \leq M + 1.$$

*Evidentemente, la sucesión $(X_n)$ es oscilante.*

*(ii) Segundo caso*: $(b_k)$ es creciente y $b_k \longrightarrow b > 1$. De las definiciones de $\sigma_k$ y $\rho_k$ se obtiene que

$$\sigma_k = \frac{b_{k+1}-1}{b_k-1}, \quad \rho_k = 1, \quad \text{para todo } k.$$

Por lo tanto,

$$\prod_{k=1}^{n} \sqrt{\sigma_k} = \frac{\sqrt{b_{n+1}-1}}{\sqrt{b_1-1}}, \quad \prod_{k=1}^{n} \sqrt{\rho_k} = 1, \quad \text{para todo } n. \tag{3.18}$$

**Ejemplo 3.2.** *Sea $(X_n)$ la sucesión determinada por*

$$X_{n+1} - 2 \cdot X_n + 2 \cdot (1 - \frac{1}{n+2}) \cdot X_{n-1} = 0, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \quad, X_0 = 0, \; X_1 = 1.$$

*Entonces*

$$P_0 = 1, \quad \prod_{k=1}^{n} \sqrt{b_k} = \frac{1}{\sqrt{n+2}} \sqrt{2}^{n+1}, \quad \prod_{k=1}^{n} \sqrt{\sigma_k} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+3}}, \quad \prod_{k=1}^{n} \sqrt{\rho_k} = 1,$$

*y de (3.12) y (3.15) se obtienen entonces las siguientes acotaciones para $|X_t - X_{t+1}|$ y $|X_M|$:*

$$\frac{1}{\sqrt{t+1}} \sqrt{2}^{t} \le |X_t - X_{t+1}| \le \frac{\sqrt{3}\sqrt{t+1}}{\sqrt{t+2}\sqrt{t+3}} \cdot \sqrt{2}^{t+1}$$

$$\frac{\sqrt{M+2}}{\sqrt{M}\sqrt{M+1}} \cdot \sqrt{2}^{M} \le |X_M| \le \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{M+2}} \cdot \sqrt{2}^{M+1}.$$

*La sucesión $(X_n)$ es oscilante.*

### 3.2. Comportamiento de la sucesión oscilante $(X_n)$ cuando $(b_n)$ es de variación acotada y $b_n \longrightarrow b > 1$.

En este parágrafo supondremos que $(b_n;\ n = 1, 2, 3, \ldots)$ es de variación acotada (v. [6]). Sean $\Delta_k = b_{k+1} - b_k$, $p_n = \inf\{b_1, b_2, \ldots, b_{n+1}\}$ y

$$V_n = \sum_{k=1}^{n} |\Delta_k| = \sum_{k=1}^{n} |b_{k+1} - b_k|.$$

Se dice que $V_n$ es la *variación de* $(b_1, \ldots, b_{n+1})$, y $(b_n \mid n = 1, 2, \ldots)$ es de *variación acotada* si existe una constante $C > 0$ tal que $V_n \le C$ para todo $n$. Esto equivale a decir que $V = \sum_{k=1}^{\infty} |\Delta_k| < +\infty$, y V se denomina la *variación (total) de* $(b_1, b_2, \ldots)$. Claramente

$$\frac{b_{k+1}-1}{b_k-1} = 1 + \frac{\Delta_k}{b_k-1}, \quad \sigma_k \le 1 + \frac{|\Delta_k|}{b_k-1}, \quad \text{para todo } k. \tag{3.19}$$

Por lo tanto,

$$\prod_{k=1}^{n} \sigma_k \leq \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{|\Delta_k|}{b_k - 1}\right) \leq \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{|\Delta_k|}{p_n - 1}\right) \leq exp\left\{\frac{V_n}{p_n - 1}\right\}. \tag{3.20}$$

Por otra parte,

$$\frac{b_k - 1}{b_{k+1} - 1} = 1 - \frac{\Delta_k}{b_{k+1} - 1}, \quad \frac{1}{\rho_k} \leq 1 + \frac{|\Delta_k|}{b_{k+1} - 1}, \text{ para todo } k,$$

de lo cual se deduce que

$$\frac{1}{\prod_{k=1}^{n} \rho_k} \leq \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{|\Delta_k|}{b_{k+1} - 1}\right) \leq exp\left\{\frac{V_n}{p_n - 1}\right\},$$

o sea, que

$$\prod_{k=1}^{n} \rho_k \geq exp\left\{-\frac{V_n}{p_n - 1}\right\}. \tag{3.21}$$

**Teorema 3.1.** *Supóngase que $(b_k)$ es de variación acotada y que $b_k \longrightarrow b > 1$. Entonces, los productos infinitos $\prod_{k=1}^{\infty} \sigma_k$ y $\prod_{k=1}^{\infty} \rho_k$ convergen absolutamente.*

*Demostración.* De (3.19) se tiene que $0 < \sigma_k - 1 \leq \frac{|\Delta_k|}{b_k - 1}$. Como $(b_k)$ es de variación acotada y además $b_k - 1 \longrightarrow b - 1 > 0$, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\Delta_k|}{b_k - 1}$ converge. Por lo tanto, el producto infinito $\prod_{k=1}^{\infty} \sigma_k = \prod_{k=1}^{\infty}(1 + (\sigma_k - 1))$ converge absolutamente. De la misma manera se obtiene que el producto infinito $\prod_{k=1}^{\infty} \rho_k$ converge absolutamente. □

Sean $V = \sum_{k=1}^{\infty} |\Delta_k| < +\infty$ la variación total de $(b_k)$ y $p = \inf_k b_k$. Claramente $p > 1$ y de (3.20) y (3.21) se obtiene que

$$1 \leq \prod_{k=1}^{\infty} \sigma_k \leq exp\left\{\frac{V}{p - 1}\right\}, \quad exp\left\{-\frac{V}{p - 1}\right\} \leq \prod_{k=1}^{\infty} \rho_k \leq 1. \tag{3.22}$$

**Teorema 3.2.** *Bajo las mismas hipótesis del Teorema 3.1, existe el siguiente límite :*

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{P_n}{\prod_{k=1}^{n} \sqrt{b_k}}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{X_{n+1}^2 + b_{n+1} \cdot X_n^2 - 2X_{n+1} \cdot X_n}}{\prod_{k=1}^{n} \sqrt{b_k}} \neq 0 \tag{3.23}$$

*Demostración.* De la igualdad (3.2) se obtiene que

$$\begin{aligned} P_k^2 &= X_{k+1}^2 + b_{k+1} X_k^2 - 2X_{k+1} X_k \\ &= X_{k+1}^2 + b_k X_k^2 - 2 \cdot X_{k+1} X_k + X_k^2 \cdot \Delta_k \\ &= b_k \cdot P_{k-1}^2 + X_k^2 \cdot \Delta_k = b_k \cdot P_{k-1}^2 \cdot \left(1 + \frac{X_k^2}{b_k \cdot P_{k-1}^2} \cdot \Delta_k\right) \end{aligned} \tag{3.24}$$

y, además, que

$$b_k \cdot P_{k-1}^2 = X_{k+1}^2 + b_k \cdot X_k^2 - 2X_{k+1}X_k = (X_{k+1} - X_k)^2 + (b_k - 1) \cdot X_k^2 \geq (b_k - 1) \cdot X_k^2.$$

Entonces

$$\frac{X_k^2}{b_k \cdot P_{k-1}^2} \leq \frac{1}{b_k - 1} \leq \frac{1}{p-1}, \text{ para todo } k, \tag{3.25}$$

de lo cual,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k^2}{b_k \cdot P_{k-1}^2} \cdot |\Delta_k| \leq \frac{1}{p-1} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} |\Delta_k| < +\infty.$$

En consecuencia, el producto infinito $\prod_{k=1}^{\infty} \frac{P_k^2}{b_k \cdot P_{k-1}^2} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{X_k^2}{b_k \cdot P_{k-1}^2} \cdot \Delta_k\right)$ converge absolutamente, así que

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{P_k^2}{b_k \cdot P_{k-1}^2} = \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{P_n^2}{P_0^2} \cdot \frac{1}{\prod_{k=1}^{n} b_k}$$

existe y es no nulo. Entonces, el límite (3.23) existe y es no nulo. □

De (3.23) y (3.25) se deduce el siguiente corolario del Teorema 3.2.

**Corolario 3.1.** *La sucesión* $\left(\frac{|X_n|}{\prod_{k=1}^{n} \sqrt{b_k}};\ n = 1, 2, 3, ...\right)$ *es acotada.*

Sea $(X_n;\ n = 0, 1, 2, ...)$ una solución de la fórmula de recurrencia (3.1). Demostraremos que existen sucesiones $(A_n;\ n = 0, 1, 2, ...)$ y $(\delta_n;\ n = 0, 1, 2, ...)$ tales que

$$A_n \cdot \text{sen } \delta_n = X_n, \quad A_n \cdot \sqrt{b_{n+1}} \cdot \text{sen}(\delta_n + \theta_{n+1}) = X_{n+1}, \tag{3.26}$$

$$A_n > 0, \quad n = 1, 2, ...,$$

donde

$$\cos \theta_n = \frac{1}{\sqrt{b_n}}, \quad \text{sen } \theta_n = \frac{\sqrt{b_n - 1}}{\sqrt{b_n}}, \quad n = 1, 2, 3, ....$$

*(i)* En efecto, tómense los $A_n > 0$ tales que

$$A_n^2 \cdot (b_{n+1} - 1) = P_n^2, \quad \text{o sea, } A_n = \frac{P_n}{\sqrt{b_{n+1} - 1}} = \frac{P_n}{\sqrt{b_{n+1}} \cdot \text{sen } \theta_{n+1}}, \tag{3.27}$$

con $P_n$ dado por (3.7). Es suficiente encontrar $\delta_n$´s tales que

$$\begin{aligned} X_{n+1} - X_n &= A_n \cdot \sqrt{b_{n+1}} \cdot \text{sen } \theta_{n+1} \cdot \cos\ \delta_n \\ &= \sqrt{b_{n+1} - 1} \cdot A_n \cdot \cos \delta_n, \\ A_n \cdot \text{sen } \delta_n &= X_n. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Pero, como

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}^2\delta_n+\cos^2\delta_n &= \frac{X_n^2}{A_n^2}+\frac{(X_{n+1}-X_n)^2}{A_n^2\cdot(b_{n+1}-1)}\\ &= \frac{(b_{n+1}-1)X_n^2+(X_{n+1}-X_n)^2}{A_n^2\cdot(b_{n+1}-1)}\\ &= \frac{P_n^2}{A_n^2\cdot(b_{n+1}-1)}=1,\end{aligned}$$

tales $\delta_n$ claramente existen. □

**Teorema 3.3.** *Bajo la condición* $|\delta_n-(\delta_{n-1}+\theta_n)|<\frac{\pi}{2}$, *la sucesión* $(\delta_n;\ n=0,1,2,\ldots)$ *está determinada por las fórmulas de recurrencia de primer orden*

$$\operatorname{sen}\,\delta_n=\frac{\sqrt{b_{n+1}-1}}{\sqrt{b_n-1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\Delta_n}{b_n-1}\cdot\operatorname{sen}^2(\delta_{n-1}+\theta_n)}}\cdot\operatorname{sen}\,(\delta_{n-1}+\theta_n)\tag{3.29}$$

*y*

$$\cos\,\delta_n=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\Delta_n}{b_n-1}\cdot\operatorname{sen}^2(\delta_{n-1}+\theta_n)}}\cdot\cos\,(\delta_{n-1}+\theta_n),\tag{3.30}$$

*así que* $\delta_n$ *es una función continua de* $\delta_0$ $(\in\mathbb{R})$. *Además, existe una constante* $M>0$ *tal que* $|\delta_n-(\delta_{n-1}+\theta_n)|\le M\cdot|\Delta_n|$.

*Demostración.* De (3.26) y (3.27) se obtiene que

$$\frac{X_n}{P_{n-1}}=\frac{X_n}{\sqrt{b_n-1}\cdot A_{n-1}}=\frac{\sqrt{b_n}}{\sqrt{b_n-1}}\cdot\operatorname{sen}\,(\delta_{n-1}+\theta_n),\tag{3.31}$$

y de (3.24), (3.26) y (3.27), que

$$\operatorname{sen}\,\delta_n=\frac{X_n}{A_n}=\frac{\sqrt{b_{n+1}-1}\cdot X_n}{P_n}=\frac{\sqrt{b_{n+1}-1}\cdot X_n}{\sqrt{b_n}\cdot P_{n-1}\cdot\left\{1+\frac{X_n^2}{b_n\cdot P_{n-1}^2}\cdot\Delta_n\right\}^{\frac{1}{2}}}.$$

Reemplazando $\frac{X_n}{P_{n-1}}$ por (3.31) en la desigualdad anterior, se obtiene (3.29). Reemplazando $X_n$, $X_{n-1}$ en (3.1) por los valores dados en (3.26), se tiene que

$$\begin{aligned}X_{n+1}-X_n &= X_n-b_n\cdot X_{n-1}\\ &= A_{n-1}\cdot\left\{\sqrt{b_n}\cdot\operatorname{sen}(\delta_{n-1}+\theta_n)-b_n\cdot\operatorname{sen}\,\delta_{n-1}\right\}\\ &= A_{n-1}\cdot b_n\cdot\operatorname{sen}\,\theta_n\cdot\cos(\delta_{n-1}+\theta_n).\end{aligned}\tag{3.32}$$

y mediante (3.24), (3.27) y (3.28), (3.32) da lugar a que

$$\begin{aligned}\cos\ \delta_n &= \frac{X_{n+1}-X_n}{A_n\sqrt{b_{n+1}}\cdot \text{sen}\ \theta_{n+1}} = \frac{A_{n-1}\cdot b_n\cdot \text{sen}\ \theta_n}{A_n\sqrt{b_{n+1}}\cdot \text{sen}\ \theta_{n+1}}\cdot\cos(\delta_{n-1}+\theta_n)\\ &= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{X_n^2}{b_n\cdot P_{n-1}^2}\cdot\Delta_n}}\cdot\cos(\delta_{n-1}+\theta_n).\end{aligned}$$

Finalmente, reemplazando $\frac{X_n}{P_{n-1}}$ dado por (3.31) en la anterior igualdad, se obtiene (3.30). □

Para demostrar la última afirmación del Teorema 3.3 necesitaremos el siguiente lema.

**Lema 3.1.** *Considérese el sistema de ecuaciones*

$$\text{(3.33)}\qquad \text{sen}\ y = \frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a\cdot\text{sen}^2 x}}\cdot\text{sen}\ x,\quad \cos\ y = \frac{1}{\sqrt{1+a\cdot\text{sen}^2 x}}\cdot\cos\ x,$$

*donde* $a+1>0$. *Entonces, dado* $x\in\mathbb{R}$, *existe un único* $f_a(x)$, *con* $|f_a(x)-x|<\frac{\pi}{2}$, *tal que* $y=f_a(x)$ *es una función continua de* $\mathbb{R}$ *en* $\mathbb{R}$ *para la cual existe una constante* $\widetilde{M}>0$ *tal que* $|f_a(x)-x|<\widetilde{M}\cdot|a|$.

*Demostración.* Dado $x\in\mathbb{R}$ existe $y$ tal que sen $y$ y cos $y$ satisfacen el sistema anterior. En efecto,

$$\begin{aligned}\text{sen}^2 y+\cos^2 y &= \frac{1+a}{1+a\cdot\text{sen}^2 x}\cdot\text{sen}^2 x+\frac{1}{1+a\cdot\text{sen}^2 x}\cdot\cos^2 x\\ &= \frac{(1+a)\cdot\text{sen}^2 x+\cos^2 x}{1+a\cdot\text{sen}^2 x} = \frac{1+a\cdot\text{sen}^2 x}{1+a\cdot\text{sen}^2 x}=1.\end{aligned}$$

Como sen $y\cdot$ sen $x>0$, cos $y\cdot$ cos $x>0$, entonces $x$, $y$ están en el mismo cuadrante (mod $2\pi$). Por lo tanto, existe un único $y$ tal que $|y-x|<\frac{\pi}{2}$. Evidentemente $y=f_a(x)$ es una función continua de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

Sea $|a|\le\frac{1}{2}$. Entonces $\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a\cdot\text{sen}^2 x}}$, $\frac{1}{\sqrt{1+a\cdot\text{sen}^2 x}}$ son derivables con respecto a $a$ y las derivadas son acotadas en $|a|\le\frac{1}{2}$. Por el teorema del valor medio existe entonces una constante $M_0>0$ tal que

$$\left|\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a\cdot\text{sen}^2 x}}-1\right|\le M_0\cdot|a|,\quad \left|\frac{1}{\sqrt{1+a\cdot\text{sen}^2 x}}-1\right|\le M_0\cdot|a|.$$

Por lo tanto, de (3.33),

$$|\text{sen}\ y-\text{sen}\ x|\le M_0\cdot|a|,\quad |\cos\ y-\cos\ x|\le M_0\cdot|a|,$$

o sea,

$$2\left|\cos\ \frac{y+x}{2}\cdot\text{sen}\ \frac{y-x}{2}\right|\le M_0\cdot|a|,\qquad 2\left|\text{sen}\ \frac{y+x}{2}\cdot\text{sen}\ \frac{y-x}{2}\right|\le M_0\cdot|a|,$$

Elevando al cuadrado las dos últimas desigualdades y sumándolas se obtiene que $4 \cdot \left|\text{sen}\,\frac{y-x}{2}\right|^2 \le 2 \cdot M_0^2 \cdot a^2$, así que $\left|\text{sen}\,\frac{y-x}{2}\right| \le \frac{M_0}{\sqrt{2}} \cdot |a|$. Como $\frac{2}{\pi} \cdot \left|\frac{y-x}{2}\right| \le \left|\text{sen}\,\frac{y-x}{2}\right|$ para $\left|\frac{y-x}{2}\right| \le \frac{\pi}{2}$, entonces $|y-x| \le \frac{\pi}{\sqrt{2}} \cdot M_0 \cdot |a|$, y bastará tomar $\widetilde{M} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \cdot M_0$. Para $|a| \ge \frac{1}{2}$, basta tomar $\widetilde{M} = \pi$. Esto demuestra el lema. □

*Fin de la demostración del teorema.* Con

$$a = \frac{\Delta_n}{b_n - 1} = \frac{b_{n+1} - b_n}{b_n - 1}, \quad x = \delta_{n-1} + \theta_n, \quad y = \delta_n \text{ y } M = \frac{\widetilde{M}}{p-1},$$

la última afirmación resulta inmediatamente del Lema 3.1. □

Como $\delta_n$ es para todo $n$ una función continua de la variable $\delta_0$, escribiremos $\delta_n = \delta_n(t)$, donde $t = \delta_0 = \delta_0(t) \in \mathbb{R}$. Sea

$$\epsilon_n(t) = \delta_n(t) - (\delta_{n-1}(t) + \theta_n), \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{3.34}$$

Entonces

$$|\epsilon_n(t)| \le M \cdot |\Delta_n|, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{3.35}$$

y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n(t)$ converge absoluta y uniformemente, pues $(b_k;\ k = 1, 2, 3, \ldots)$ es de variación acotada. De (3.34) se deduce que

$$\sum_{k=1}^{n} \epsilon_n(t) = \delta_n(t) - \delta_0(t) - \sum_{k=1}^{n} \theta_k = \delta_n(t) - t - \sum_{k=1}^{n} \theta_k.$$

Entonces,

$$\delta_n(t) - \sum_{k=1}^{n} \theta_k = \sum_{k=1}^{n} \epsilon_k(t) + t.$$

Sea

$$\tau(t) = \lim_{n\to\infty} \left( \delta_n(t) - \sum_{k=1}^{n} \theta_k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_k(t) + t. \tag{3.36}$$

La función $\tau(t)$ es una función continua de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{R}$. La continuidad es clara de la convergencia uniforme de $\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n(t)$, y como $\lim_{t\to-\infty} \tau(t) = -\infty$, $\lim_{t\to+\infty} \tau(t) = +\infty$ (pues $\sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_k(t) < +\infty$), entonces $\tau(t)$ es sobreyectiva.

**Teorema 3.4.** *Sea $(X_n)$ una solución de (3.1) que satisfaga las condiciones iniciales*

$$X_0 = A_0 \cdot \text{sen}\,\delta_0, \quad X_1 = A_0 \cdot \sqrt{b_1} \cdot \text{sen}(\delta_0 + \theta_1),$$

*Supóngase que $(b_k)$ es de variación acotada y que $b_k \longrightarrow b > 1$. Entonces*

$$\frac{X_n}{\prod_{k=1}^{n} \sqrt{b_k}} = A \cdot \text{sen} \left( \sum_{k=1}^{n} \theta_k + \tau(\delta_0) \right) + o(1), \quad \textit{cuando } n \longrightarrow \infty, \tag{3.37}$$

*donde $A$ es una constante y $\tau(\delta_0)$ es una función continua de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{R}$.*

*Demostración.* La relación (3.37) es consecuencia inmediata de las siguientes observaciones:

(1) De (3.26), $X_n = A_n \cdot \operatorname{sen} \delta_n(t)$.
(2) Del Teorema 3.2 y de (3.26), para algún $A$, $\lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{\prod_{k=1}^n \sqrt{b_k}} = A$.
(3) De (3.36) se tiene que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\delta_n(t) - \sum_{k=1}^{n}\theta_k\right) = \tau(t), \text{ donde } t = \delta_0,$$

esto es,

$$\frac{A_n}{\prod_{k=1}^n b_k} = A + o(1), \quad \delta_n(t) = \sum_{k=1}^{n}\theta_k + \tau(t) + o(1).$$

□

**Corolario 3.2.** *Bajo las hipótesis del Teorema 3.4, existen soluciones $(X_n;\ n = 1,2,3,...)$, $(Y_n;\ n = 1,2,3,...)$ de la fórmula de recurrencia (3.1) que se comportan en la forma*

(3.38)
$$\frac{X_n}{\prod_{k=1}^n \sqrt{b_k}} = \cos\left(\sum_{k=1}^{n}\theta_k\right) + o(1), \quad \frac{Y_n}{\prod_{k=1}^n \sqrt{b_k}} = \operatorname{sen}\left(\sum_{k=1}^{n}\theta_k\right) + o(1),$$

*cuando $n \longrightarrow \infty$.*

*Demostración.* Por la linealidad de la fórmula (3.1) podemos tomar $A = 1$ en (3.37). Como la función $\tau(\delta_0)$ es sobreyectiva, existen $\delta_o'$ y $\delta_0''$ en $\mathbb{R}$ tales que $\tau(\delta_0') = \frac{\pi}{2}$, $\tau(\delta_0'') = 0$. Por lo tanto, existen soluciones $(X_n)$, $(Y_n)$ que satisfacen (3.38). □

**Corolario 3.3.** *Considérese la fórmula fraccionaria de recurrencia de primer orden*

$$T_{n+1} = 2 - \frac{b_n}{T_n}, \; n = 1,2,3,..., \tag{3.39}$$

*donde $(b_n)$ es de variación acotada y $b_n \longrightarrow b > 1$. Existen entonces exactamente dos soluciones de (3.39) que convergen respectivamente a los límites $\sqrt{b}\cdot e^{i\theta}$, $\sqrt{b}\cdot e^{-i\theta}$, donde $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{b}}$, $\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{b-1}}{\sqrt{b}}$. Cualquier otra solución es divergente.*

*Demostración.* Sean $(X_n)$, $(Y_n)$, dadas como en el Corolario 3.2, soluciones de (3.1). Entonces $(Z_n;\ n = 1,2,3,...)$, dada por $Z_n = X_n + i\cdot Y_n$, es una solución compleja de (3.1), de lo cual $(T_n) = (\frac{Z_n}{Z_{n-1}};\ n = 1, 2, 3, ...)$ es solución de (3.39). Ahora, de (3.38) se tiene que

$$\frac{Z_n}{\prod_{k=1}^{n} \sqrt{b_k}} = e^{i \cdot \sum_{k=1}^{n} \theta_k} + o(1),$$

y como $(b_n) \to b$, $(\theta_n) \to \theta$, entonces $T_n = \frac{Z_n}{Z_{n-1}} = \sqrt{b_n} \cdot e^{i\theta_n} + o(1) \to \sqrt{b} \cdot e^{i\theta}$ (cuando $n \to \infty$). De la misma manera, a partir de la solución $(X_n - i \cdot Y_n)$ de (3.1) se obtiene la solución de (3.39) que converge al límite $\sqrt{b} \cdot e^{-i\theta}$. Cualquier solución de la fórmula lineal (3.1) es una combinación de las dos soluciones $(X_n)$, $(Y_n)$ dadas en el Corolario 3.2, la cual genera una solución de la fórmula fraccionaria (3.39) que es evidentemente divergente, excepto en los dos casos anteriores. $\square$

## Agradecimientos

El autor agradece al Profesor Jairo Charris del Departamento de Matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia, Sede Santafé de Bogotá, por sus observaciones y su ayuda en la preparación de la versión final del manuscrito.

## Referencias

[1] Apostol T.M., *Mathematical Analysis*, Addison Wesley (1963).

[2] Bromwich T.J., *An Introduction to the Theory of Infinite Series*, Macmillan (1926).

[3] Takeuchi Y., *Convergencia de Sucesiones dadas por la Fórmula de Recurrencia del Primer Orden*, Rev. Colombiana Mat. **XXVII** (1993), 111–125.

[4] Takeuchi Y., *Regla de L'Hôpital para Series*, Boletín de Matemáticas **1** (1994), no. 2, 17–33.

[5] Takeuchi Y., *Conjunto de Convergencia y Conjunto Ternario de Cantor*, Boletín de Matemáticas (Nueva Serie), **2** (1995), no. 2, 141–165.

[6] Takeuchi Y., *Comportamiento Asintótico de Algunas Sucesiones de Polinomios generadas por la Fórmula Lineal de Recurrencia del Segundo Orden*, Rev. Colombiana Mat., Próximo a aparecer.