http://www.edma0-6.es/index.php/edma0-6
ISSN: 2254-8351

Educación Matemática en la Infancia

Análisis de procesos de resolución de problemas en preguntas liberadas de TIMSS-2011

María Arántzazu Fraile Rey
Universidad de Alcalá, Madrid, España, arantzazu.fraile@uah.es

Fecha de recepción: 6-09-2018
Fecha de aceptación: 15-12-2018
Fecha de publicación: 15-04-2019

RESUMEN

El objetivo de este artículo es mostrar e interpretar los procesos de razonamiento utilizados por una muestra de 111 alumnos de cuarto de Educación Primaria en la resolución de un subconjunto de preguntas liberadas de matemáticas que formaron parte del estudio TIMSS 2011. Se ha pedido a los alumnos que pongan especial cuidado en reflejar los razonamientos y procesos de resolución empleados. Las respuestas son, en primera instancia, analizadas mediante técnicas estadísticas. Después, nos centramos en analizar cómo proceden los alumnos y por qué, en un intento de identificar los tipos de razonamiento empleados y detectar problemas de aprendizaje y comprensión. Como principales conclusiones del estudio, comprobamos que las preguntas liberadas son una buena herramienta para detectar errores de aprendizaje y para identificar los factores que podrían explicar el bajo rendimiento de los alumnos en resolución de problemas.

Palabras clave: TIMSS, Resolución de problemas, Errores en el aprendizaje.

Analysis of problem solving processes based on released items of TIMSS-2011

ABSTRACT

This article analyzes the reasoning processes used by a sample of 111 students of fourth grade in solving a set of math questions that were part of the TIMSS 2011 study. Students have been asked to take special care on showing their reasoning and resolution processes. The assessment is checked according to the scoring guide and an inferential hypothesis test study is performed, in a second step, the resolution process is analyzed to explore students understanding, what and why they resolve the questions in such way. The main conclusions of the study are twofold: Firstly, the released items are shown to be a powerful tool to detect student learning problems. Secondly, identify factors that could explain the poor performance of student in problem solving resolution.

Key words: TIMSS, Problem Resolution (problem solving), Learning errors.

1. Introducción

La evaluación, planificada como herramienta de aprendizaje, es un potente instrumento para hacer a los alumnos[1] y profesores más conscientes de los procesos de enseñanza-aprendizaje. En este sentido, las

[1] Con el fin de no resultar redundante, aclaramos aquí que nos referimos a alumnos de ambos sexos, y que no haremos ninguna distinción entre alumnos y alumnas, no siendo el género una variable considerada en este trabajo.

evaluaciones estandarizadas permiten obtener indicadores fiables. Los resultados de estas pruebas nos muestran una foto fija sobre lo que está sucediendo en nuestras aulas y, por tanto, se hace imprescindible no solo observar la imagen en su conjunto sino detenerse con calma y espíritu crítico en los detalles. Desde este punto de vista estas pruebas se muestran como útiles y necesarias dentro del aula, facilitan el diseño de actividades y preguntas diferentes a las estándar, posibilitan el uso del error para centrarnos en objetivos de aprendizaje y nos sirven para planificar tareas e iniciar a los alumnos en pruebas de carácter global.

En este artículo analizamos en detalle las respuestas de un conjunto de alumnos de cuarto de Educación Primaria a las preguntas liberadas de una de estas pruebas de evaluación (TIMSS-2011) y sus procesos de resolución. Se les ha pedido a los alumnos que muestren, expliquen y justifiquen en la medida de sus posibilidades sus procesos de resolución. Identificamos la variedad de razonamientos empleados y los errores más comunes, indagamos sobre la fuente de los mismos para que estos sean considerados en el desarrollo de propuestas orientadas a ayudar a los alumnos a superarlos. El trabajo de corrección de los ejercicios en pequeño grupo y puesta en común en gran grupo se muestra muy eficaz tanto para los alumnos como para los tutores e investigadores. Tanto a unos como a otros les ayuda a precisar sus razonamientos y ser más conscientes de los procesos.

1.1. Justificación y relevancia

TIMSS-2015 (TIMSS: *Trends in Mathematics and Science Study*) es el más reciente de la serie de proyectos de la IEA (*International Association for the Evaluation of Educational Achievement*) para medir los logros de los estudiantes de 4.º y 8.º grado, equivalentes a cuarto de Educación Primaria y segundo de Secundaria en el sistema español, en las áreas de matemáticas y ciencias en el ámbito internacional. La primera edición de TIMSS tuvo lugar en 1995, a partir de entonces se realiza cada cuatro años; a lo largo de los meses de abril y mayo de 2015 tuvo lugar la fase de aplicación de la edición TIMSS 2015 cuyos resultados se harán públicos a finales de 2016, razón por la cual para este estudio se han considerado los datos de la edición 2011. España ha tomado parte en las ediciones de 1995, 2011 y 2015. En la edición de 2011 en nuestro país participaron 4183 alumnos de 151 centros diferentes, distribuidos en 200 grupos. Los resultados obtenidos por España, 482 puntos, están muy por debajo de la media de la OCDE, que fue de 522 puntos, y del promedio de la UE de 519 puntos (Fuente: IEA – National Reports e INEE España). Estas puntuaciones y el análisis de las preguntas liberadas nos llevaron a preguntarnos sobre qué es lo que responden nuestros alumnos y dónde aparecen las dificultades de aprendizaje.

El objetivo principal de este artículo es identificar los errores concretos cometidos por un grupo de alumnos de cuarto de Educación Primaria al enfrentarse a preguntas liberadas de la prueba TIMSS Matemáticas 2011. Identificar si existen o no estrategias de resolución y a qué mecanismos cognitivos, creencias y aptitudes responden estas respuestas. En línea con Gusmão, Cajaraville, Font y Godino (2014), tendremos en cuenta que en el estudio de la resolución de problemas los aspectos cognitivos forman, junto con los metacognitivos, la unidad fundamental de análisis. Por ello, nuestra prueba fue diseñada para poder analizar el modo en que los alumnos interpretan la información recibida, su capacidad de autoevaluación sobre el trabajo realizado y su percepción sobre el grado de dificultad de los ejercicios.

2. Marco Teórico

Cuando se describen los objetivos de la educación matemática, por lo general son dos las dimensiones que se presentan como claramente diferenciadas: los contenidos, que determinarán el diseño de las tareas a realizar, y una dimensión cognitiva, las capacidades o competencias cognitivas necesarias para la solución de estas tareas; ambas configuran los estándares básicos o marco común de referencia, aunque se pueden encontrar diferentes interpretaciones sobre los mismos en cada país (véase estándares de aprendizaje evaluable de LOMCE en España, Mathematics in Education in Europe:

Common Challenges and National Policies, o los Principios y Estándares para las matemáticas escolares de EE. UU.). A pesar de estas diferencias, en el desarrollo de los planes educativos, estas tareas y capacidades aparecen jerarquizadas de acuerdo con la taxonomía de Bloom (Bloom, Engelhart, et al., 1956) y/o sus modificaciones más recientes (Anderson & Krathwohl, 2001; Marzano y Kendalle, 2008). Estos componentes también se han tenido en cuenta en los estudios comparativos internacionales. También aquí se dan ligeras variaciones de una edición a otra: por ejemplo, en el marco teórico de TIMSS 2003, se contemplaban cuatro dominios cognitivos (conocer los hechos y procedimientos, uso de conceptos, resolución de problemas habituales y razonamiento) mientras que en el marco de TIMSS 2011 son tres los dominios analizados: conocimiento, aplicación y razonamiento (Mullis et al., 2003, 2005, 2009).

Para este estudio se ha tomado una selección de los ítems liberados de TIMSS 2011 que cubren los tres dominios de habilidades matemáticas. El primer dominio, conocer, cubre los hechos básicos, procedimientos y conceptos que un alumno de 4.º curso de Educación Primaria necesita saber (Mullis et al., 2009). Este es el nivel más básico y presupone un aprendizaje asociativo en el que la comprensión, la memorización simple y la práctica con ejercicios sencillos son esenciales (Siegler, 2005). El segundo dominio, aplicar, se centra en la capacidad para utilizar los conocimientos adquiridos en el nivel anterior y mostrar el grado de comprensión conceptual necesario para resolver problemas rutinarios. La mayoría de las tareas de matemáticas realizadas en el aula de Primaria se ajustan a estas dos habilidades. Para dar una respuesta correcta a ellas es necesaria una lectura comprensiva del texto a partir de la cual el alumno construye su propia representación mental del problema y selecciona las operaciones matemáticas apropiadas y el formato adecuado para la respuesta escrita solicitada en la prueba (Duval, 1999; Krutetskii, 1976; Martin y Mullis, 2011).

El tercer dominio, el razonamiento, es evaluado en la prueba mediante la solución de problemas rutinarios en situaciones no conocidas, contextos más complejos y problemas con múltiples etapas. Los alumnos a menudo tienen dificultades a la hora de resolver estas tareas no tanto porque carezcan de las bases necesarias sino porque no tienen una idea clara sobre cómo proceder.

En el estudio nos centramos en el análisis de las justificaciones aportadas por los alumnos, tanto las escritas que acompañan a la respuesta del test como verbales cuando las preguntas son corregidas y trabajadas en grupo. Las Matemáticas tienen su propio lenguaje, sus sistemas de expresión y representación, que son distintos a los del lenguaje natural (Duval, 1999; citado por Barrera, Castro y Cañadas), y las habilidades para leer, interpretar y responder en ese idioma son esenciales para conseguir un aprendizaje significativo (Krutetskii, 1976; Martin y Mullis, 2011). Son varias las investigaciones que avalan el papel de las habilidades verbales en el éxito académico; la forma en la que los niños hablan y se explican en la clase de matemáticas es un buen predictor de las habilidades aritméticas a lo largo de la Educación Primaria (Durand et al., 2005) y del rendimiento en la resolución de problemas (Watson et al., 2003; Fuchs et al., 2006). Este saber hacer en la resolución de problemas puede verse potenciado fomentando la participación activa de los alumnos en el aula. El grado de participación de los alumnos y su capacidad crítica para adaptarse a las ideas de sus compañeros durante la resolución de problemas en pequeño grupo están positivamente relacionados con la capacidad de resolver problemas eficazmente (Webb et al., 2009). Las discusiones durante las sesiones de revisión nos proporcionan la oportunidad de sacar a la luz los errores de comprensión, los alumnos no consiguen explicar cómo hacen algunas cosas, pero al volver sobre su propia conducta tienen la oportunidad de reflexionar sobre ello (Bruner, 1974). Si bien como bien indica este mismo autor, la capacidad para verbalizar la estrategia empleada no es una característica necesaria para el desarrollo de estrategias de resolución. En este estudio se da el caso de niños que resuelven correctamente el problema, pero construyen un relato muy confuso sobre lo que han hecho.

Utilizamos el término estrategia de resolución en los términos empleados por Bruner[2] "una estrategia hace referencia a un patrón de decisiones en la adquisición, retención y utilización de la información

[2] Acción, pensamiento y lenguaje. Jerome Bruner –Compilación de José Luis Linaza, p.130.

que sirve para lograr ciertos objetivos, es decir, para asegurarse de que se den ciertos resultados y no se produzcan otros". Y estas pueden ser categorizadas en reflexivas o irreflexivas (Rizo y Campistrous, 1999), será irreflexiva cuando se responde a un proceder prácticamente automatizado sin un proceso de análisis. En general se responde como respuesta a la instrucción recibida "hay que encontrar el algoritmo, fórmula o procedimiento correspondiente utilizando los elementos claves que el enunciado les da, y obviando el análisis de las situaciones planteadas…. Esta búsqueda de elementos claves sustituye a la preocupación por analizar el enunciado o situación problema, y buscar estrategias para su solución" (Blanco y Blanco, 2009). En caso contrario, será una estrategia reflexiva.

3. Metodología y descripción de la muestra

En este estudio se recogen los resultados de un total de 111 alumnos de cuarto de Educación Primaria, escolarizados en dos centros públicos diferentes seleccionados en términos no probabilístico intencional entre aquellos a los que teníamos acceso y que voluntariamente se prestaron a participar. El primero de ellos responde al estándar de centro de educación pública de una gran ciudad de la zona este de la Comunidad de Madrid como es Alcalá de Henares y el segundo es también un centro medio de entorno rural con renta per cápita media-alta en el cinturón de una capital de provincia como es Guadalajara. El estudio se plantea con aspectos meramente descriptivos, y no pretendemos generalizar o extrapolar estos resultados a otros contextos. La prueba tuvo lugar a lo largo del mes de abril de 2015 para alinearnos con la edad media de los alumnos de la prueba oficial que se había realizado a lo largo de los meses de marzo y abril de 2011.

3.1. Contenidos de la prueba

A partir de los ítems liberados disponibles tanto en la página oficial (TIMSS and PIRLS International Study Center's) como en la página del INEE, se diseñó una prueba semejante a la original TIMSS-Matemáticas (Tabla 1) que recogía todos los dominios tanto de contenido como cognitivos en las mismas proporciones que aquella, pero adaptada a la ventana física de una sesión de clase (45 minutos), que es la que nos proporcionaron los centros escolares.

Un ítem liberado es una pregunta que ha formado parte de las pruebas internacionales y va acompañado de la guía de codificación con los indicadores de corrección, así como de los resultados estadísticos (internacionales y nacionales) obtenidos en la prueba. Las preguntas del test son identificadas de acuerdo con la codificación utilizada en TIMSS.

Tabla 1. Relación de preguntas seleccionadas, dominios de contenidos y cognitivos, tipos de respuesta y número de figura donde aparece en este artículo

Pregunta (ÍTEM)	*Dominio de contenido*	*Dominio cognitivo*	*Tipo de respuesta*	*Figura n.º*
M031346	Números	Aplicar, razonar	Abierta	1
M041098	Números	Aplicar	Elección múltiple	2
M041299	Números	Conocer	Abierta	3
M051091	Números	Conocer	Elección múltiple	4
M051601	Números	Aplicar	Abierta	5
M041155	Formas y mediciones geométricas	Aplicar	Elección múltiple	6
M051123	Formas y mediciones geométricas	Conocer	Elección múltiple	7
M041184	Representación de datos	Razonar	Elección múltiple	8
M051117	Representación de datos	Razonar	Elección múltiple	8

Nota: todos los ítems, tanto en la prueba oficial como en el test, solicitan respuesta a una única pregunta, excepto el ítem M031346 (que en la prueba oficial está formado por cinco preguntas) que se ha reducido a tres en el test.

Nuestro test se complementa con un breve cuestionario que acompaña a cada una de las preguntas y cuyo objetivo es valorar aspectos relacionados con la metacognición (Tabla 2). Si bien reproducir los datos de la prueba oficial nos permite validar la experiencia, nuestro objetivo fundamental es centrarnos en el análisis de los errores cometidos para obtener otra visión sobre las posibles dificultades de los problemas y analizar cómo han sido afrontadas por nuestros alumnos.

Tabla 2. Cuestionario que acompaña a cada ejercicio de la prueba

Percepción sobre el grado de dificultad	*Este problema me ha resultado:*	Fácil	Dificultad media	Difícil
Percepción sobre la Corrección	*Creo que tengo el problema:*	Bien resuelto	Podría tenerlo bien resuelto	No lo tengo bien resuelto
Percepción sobre el nivel de comprensión	*En el ejercicio:*	He entendido lo que me pedía el enunciado	No me ha quedado muy claro el enunciado, pero lo he hecho	No he entendido el enunciado
Grado de familiaridad con el problema	*Este problema es:*	Completamente nuevo para mí	He visto problemas como este antes, pero he olvidado cómo se hacían	Recuerdo haber trabajado problemas como este antes y recuerdo cómo se resuelven
	¿Has trabajado alguna vez este tipo de problemas en casa?	Sí, a menudo	A veces	No

3.2. Procedimiento de análisis de datos

El proceso de corrección de las pruebas se aborda siguiendo la guía de evaluación oficial (TIMSS 2011-Grade 4 Released Items and Percent Correct Statistics Assessment). Esto nos permite obtener una puntuación final para cada alumno, resultado de la suma de las puntuaciones parciales. Con estos datos y ordenando los alumnos de acuerdo con el número de puntos obtenidos, se calcula el índice de dificultad de la pregunta, DF (con 0.5 de dificultad media), y los índices de discriminación que denotaremos como DC1 y DC2 (Crocker y Algina, 2006), siendo Qi el número de alumnos del cuartil i, AQi el número de alumnos del cuartil i que han respondido correctamente y A el número total de alumnos que han respondido correctamente:

$$DF = \frac{(AQ_1+AQ_4)}{Q_1+Q_4};\ DC_1 = \frac{(AQ_1-AQ_4)}{Q_1+Q_4};\ DC_2 = \frac{AQ_1}{A}$$

Por lo tanto, valores de DC1 en torno a 0.5 nos permitirán discernir entre buenos resolutores y los que no lo son. Valores de DC2 superiores al 0.5 nos indican que la pregunta es un buen discriminador. Estos índices serán comparados con el grado de dificultad percibido por los alumnos a partir del breve cuestionario que acompaña a cada pregunta y nos permitirán percibir el grado de autocontrol sobre el trabajo realizado por los alumnos (Tablas 4 y 5).

Por otro lado, realizamos un contraste de hipótesis sobre la diferencia de proporciones de dos poblaciones independientes, la oficial con 4183 alumnos y nuestra muestra con 111 alumnos. Se considera como hipótesis nula, H0 = la muestra de 111 alumnos es asimilable a la del estudio oficial. La Tabla 3 recoge los valores de los estadísticos y p-valores para cada una de las preguntas con niveles de confianza del 0.95. Los p-valores obtenidos son mayores que el nivel de significación del 5%, y por tanto no hay indicios suficientes para rechazar la hipótesis nula. Tan solo en el caso del ítem M031346A obtenemos valores de p-valor muy ajustados, los alumnos del test responden con un porcentaje mayor de aciertos a esta cuestión.

A partir de las explicaciones aportadas por los alumnos podemos estudiar qué y cómo responden. En dos de las aulas se nos permitió corregir la prueba en grupo con los alumnos, esto nos facilitó algunas respuestas sobre por qué el alumno responde como lo hace. Estas respuestas son transcritas literalmente al analizar los resultados.

Tabla 3. Valores del contraste de hipótesis sobre la diferencia de proporciones (cálculos realizados con R)

Ítem	TIMSS	Test	p-valor	intervalo de confianza
M031346A	0.63	0.72	0.0523	(-0.175 , -0.005)
M031346B	0.20	0.16	0.2975	(-0.029 , 0.109)
M031346C	0.14	0.13	0.7643	(-0.053 , 0.073)
M051091	0.30	0.32	0.6501	(-0.107 , 0.067)
M051601	0.50	0.52	0.6775	(-0.114 , 0.074)
M041299	0.14	0.11	0.3675	(-0.029 , 0.089)
M041155	0.38	0.41	0.5206	(-0.122 , 0.062)
M041098	0.36	0.32	0.3859	(-0.047 , 0.127)
M051123	0.29	0.28	0.8187	(-0.074 , 0.094)
M051117	0.50	0.43	0.1454	(-0.023 , 0.163)

4. Resultados e interpretación

La Tabla 4 nos muestra los resultados obtenidos en esta prueba frente a los resultados oficiales, IEA (2012), así como los índices de dificultad de cada una de las preguntas calculados tal y como se ha definido en el apartado anterior.

La Tabla 5 muestra los porcentajes de alumnos que perciben las preguntas como fáciles o no y su valoración sobre lo acertado o no de sus respuestas; junto a esto se muestra también el DF de cada pregunta.

Del análisis de estas dos tablas, y tal y como refleja la Tabla 6 (que muestra el número respuestas correctas por alumno) podemos concluir, en primer lugar, que la prueba no puede clasificarse como accesible para la mayoría de los alumnos (solo el 22.52% de los alumnos tienen 6 o más ítems resueltos satisfactoriamente) y, en segundo lugar, que hay un claro desajuste entre las preguntas que son percibidas como difíciles por la mayoría de los alumnos y las tasas de respuestas correctas y los índices de dificultad obtenidos:

- las preguntas M041155 (Figura 6) y M041098 (Figura 2) son percibidas como difíciles por un mayor porcentaje de alumnos, el 73% y 68% respectivamente, mientras que el porcentaje de respuestas correctas se sitúa exactamente en la mediana de las tasas de acierto y sus índices de dificultad están en torno al 0.4. No resultan, por tanto, preguntas muy difíciles.
- las preguntas con mayor porcentaje de respuestas correctas, el ítem M041184 (Figura 8) y la primera cuestión del ítem M031346 (Figura 1), no son percibidas por la mayoría de los alumnos como las más asequibles. De hecho, el 58% y el 48% (respectivamente para cada ítem) de los alumnos considera que son difíciles.

- no hemos podido establecer correlación entre el grado de dificultad percibido por los alumnos y los buenos *resolutores*. Hay alumnos que resuelven y explican bien su razonamiento para resolver preguntas que perciben como difíciles o muy difíciles y, por otro lado, alumnos que habiendo respondido mal piensan que son preguntas fáciles. Por ejemplo, el ítem M041299 (Imágenes VI a VIII), que presenta las tasas más bajas de acierto (10.8%) con un *DF* del 0.14, es claramente el que resulta más difícil de responder correctamente, pero en cambio no es percibido por la mayoría como difícil.

Este desajuste entre la dificultad percibida y la dificultad mostrada en las preguntas junto con el hecho de que el porcentaje de alumnos que dicen no entender los enunciados es relativamente bajo, en promedio el 63.7 (± 8.7) dice entenderlos, requiere de un estudio más profundo que permita explicarlo. El análisis pormenorizado de los ítems nos permitirá avanzar algunas respuestas.

Tabla 4. Resultados TIMSS-Test por pregunta y dominios (porcentaje de aciertos) e índices de dificultad

Pregunta (ÍTEM)	*Dominio de contenido*	*Dominio cognitivo*	*TIMSS internacional*	*TIMSS España*	*Test*	*DF*	*DC_1*	*DC_2*
M031346	Números	Aplicar, razonar	62-31-25	63-20-14	72.07 16.22 12.61	0.66 0.25 0.20	0.27 0.21 0.16	0.33 0.72 0.71
M041098	Números	Aplicar	44	36	32.43	0.43	0.21	0.50
M041299	Números	Conocer	23	14	10.81	0.14	0.14	0.67
M051091	Números	Conocer	44	30	31.53	0.29	0.21	0.40
M051601	Números	Aplicar	54	50	52.25	0.48	0.27	0.36
M041155	Formas y mediciones geométricas	Aplicar	50	38	41.44	0.41	0.30	0.43
M051123	Formas y mediciones geométricas	Conocer	43	29	27.93	0.25	0.14	0.35
M041184	Representación de datos	Razonar	71	75	78.38	0.73	0.09	0.26
M051117	Representación de datos	Razonar	54	50	43.24	0.48	0.27	0.44

Tabla 5. Percepción del alumno sobre el grado de dificultad, éxito en la resolución y comprensión de los enunciados (porcentaje de alumnos)

Pregunta (ÍTEM)	*DF*	*Percibe el problema como difícil*	*Considera que es un problema fácil*	*Cree tenerlo bien resuelto*	*No sabe si está bien o mal resuelto*	*Cree entender bien el enunciado*	*Dice no entender el enunciado*
M031346	0.37 (promedio)	48	31	35	42	69	2
M041098	0.43	68	20	48	35	74	2
M041299	0.14	45	27	32	39	56	1
M051091	0.29	54	26	44	41	68	2
M051601	0.48	56	25	50	32	61	4
M041155	0.41	73	14	58	26	74	0
M051123	0.25	39	29	31	48	50	11
M041184	0.73	58	26	52	32	70	1
M051117	0.48	39	27	35	40	52	7

Tabla 6. Número de alumnos frente al número de respuestas correctas

Número respuestas correctas	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
Número de Alumnos	3	3	12	23	27	18	11	10	1	3
%	2.70	2.70	10.81	20.72	24.32	16.22	9.91	9.01	0.90	2.70

4.1. Análisis pormenorizado de las respuestas por bloques de dominio

No hay ningún bloque de contenidos que arroje unos resultados que puedan ser considerados satisfactorios (un porcentaje de respuestas correctas por encima del 50%). Además, cada una de las preguntas presenta una casuística diferente, por lo que se hace necesario analizar las respuestas y argumentos de los alumnos para cada una de ellas. En un intento de agrupar y diferenciar estrategias vamos a acometer el análisis por bloques de contenidos.

4.1.1. Bloque de Números

Este bloque está compuesto por cinco ítems. Los ejercicios M041299 y M051091 valoran el dominio "conocer" y ambos ejercicios están relacionados con el concepto de fracción. Los ítems M031346, M041098 y M051601 están clasificados en el dominio "aplicar" dentro del área de los números naturales. En promedio solo un 32,7% del total de las respuestas de este bloque son correctas, y nos encontramos con dificultades significativas en la comprensión de conceptos elementales como el de fracción, la división cuotativa (por agrupamiento) y el significado e interpretación del signo igual. Pasamos a analizar cada uno de los ejercicios para estudiar estos problemas en detalle.

Pregunta M031346 (bloque números, procesos de pensamiento evaluados: aplicar y razonar; respuesta abierta). En la prueba oficial la pregunta conocida como el "intercambio de cromos" consta de cinco apartados; en nuestro test se han trabajado tres de ellos (identificados como apartados A, B y C). Esta pregunta pone de manifiesto que el alumnado no interpreta correctamente el "enunciado gráfico", a pesar de que su significado está transcrito, y que no entiende el significado del signo igual cuando este debe ser interpretado en términos de "equivalencia". En línea con lo expuesto por Molina (2011), "algunos alumnos muestran no prestar atención a las relaciones entre los elementos de la sentencia o a las características particulares de ésta, evidenciando cierta rigidez al abordar la resolución de las sentencias". No presenta problemas responder a la primera cuestión (apartado A), pero una vez que se requiere un razonamiento en dos o tres etapas (apartados B y C) tienen dificultades para reinterpretar la información. Solo encontramos un 16% de respuestas correctas para el apartado B y algo menos del 13% para el C. Los alumnos que no responden correctamente se fijan solo en una parte de la igualdad (una parte de la sentencia) y se expresan en términos tales como "para obtener muñecos, siempre tengo dos; si son de fútbol obtengo tres".

Son respuestas irreflexivas (Rizo y Campistrous, 1999) que o bien responden a la búsqueda de un término clave que pueda ajustarse a la operación aritmética con la que el alumno se encuentra más seguro o responden a un razonamiento ingenuo basado en la mera suposición sin comprobación sistemática del resultado obtenido (en términos de Radford, citado por Kolar y Čadež, 2015).

Hay 14 alumnos, distribuidos equitativamente por las cuatro aulas evaluadas, que nos proporcionan las siguientes respuestas: "A = 6", "B = 9" y "C = 14" y las justifican en estos términos: "siempre obtienes un cromo más", "porque si 1 cromo son 2, 5 son seis. Si 2 son 3, 8 son 9". Cada línea del enunciado es interpretada como el elemento de la serie concluyendo que la regla de formación es añadir un cromo más a cada lado de la igualdad. Para comprobar este razonamiento les preguntamos a algunos de estos alumnos "¿cuántos cromos de muñecos obtendrías si tienes 14 de animales?, sus respuestas: "pues tendría 15 de muñecos, uno más que los que tú tienes"; entendemos que estos alumnos están buscando un patrón de comportamiento en el que el signo igual ha perdido su significado para convertirse en la regla de una correspondencia: "te lo cambio por uno más". Todos estos alumnos han respondido correctamente a la pregunta M051601 y sus explicaciones en estos dos ítems responden a sistemas de representación numéricos (Castro y Castro, 2007; Barrera, Castro y Cañadas, 2009). Tal y como definen Fernández y Anhalt (2001), (citado por Barrera, Castro y Cañadas, 2009), podríamos decir que en estos casos los alumnos han seguido las acciones que derivarían en un proceso inductivo, pero entendemos que partiendo de un razonamiento ingenuo. Los 7 alumnos que han resuelto los tres apartados de este ejercicio correctamente han utilizado agrupamientos gráficos (Figura 1).

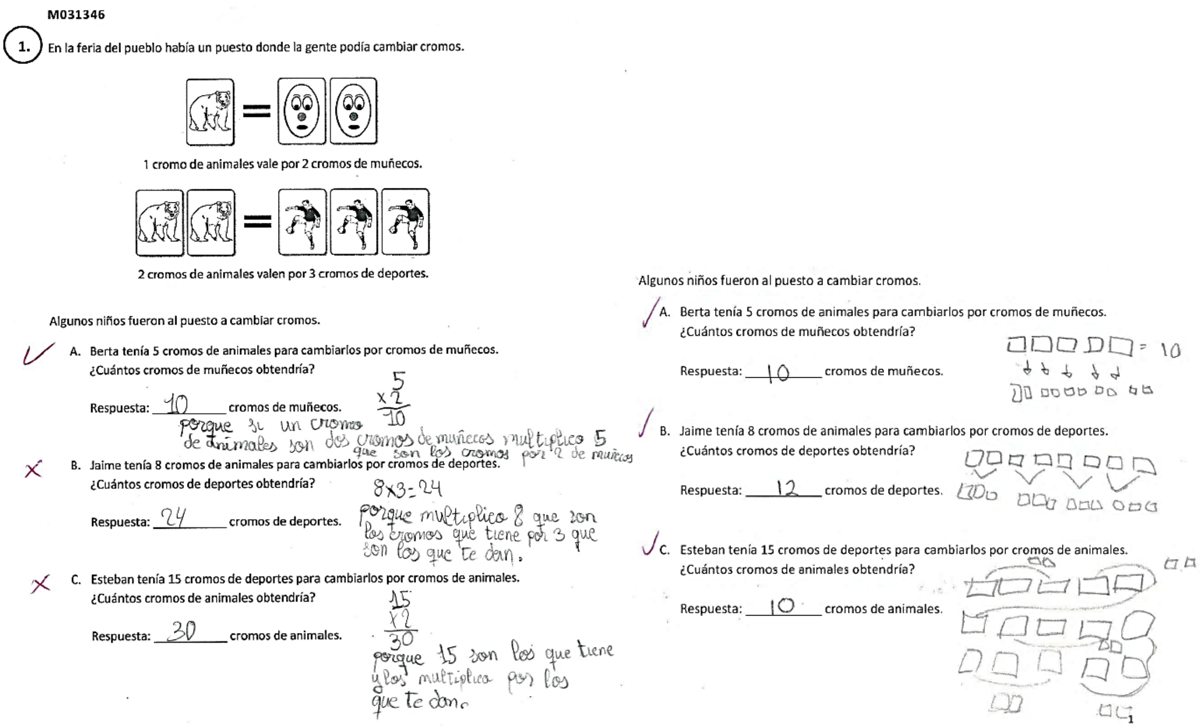

Figura 1. Actividad M031346 de los alumnos 27 y 17

Pregunta M041098 (bloque números, dominio cognitivo: aplicación de conocimientos, respuesta cerrada de elección múltiple). Las respuestas de los alumnos en este ejercicio ponen de relieve que hay aspectos fundamentales del significado de las operaciones que no se comprenden y lo importante que es acostumbrar a los alumnos a revisar la coherencia de sus respuestas.

Se trata de un problema de división que nos pregunta sobre el entero mayor al cociente obtenido. Para la mayoría de los alumnos se trata de un "problema de divisiones", otros lo han interpretado en términos multiplicativos y plantean la operación (Figura 2) o lo resuelven mediante procedimientos gráficos (Figura 2). Un elevado porcentaje del alumnado, el 53%, marca la "opción C". Esto muestra que se han centrado en el cociente de la división sin comprobar si con ello responden correctamente a la pregunta planteada. Solo 36 alumnos han contestado correctamente y de estos, solo 11 alumnos remarcan el hecho de que el cociente de la división no les permite pintar la pared entera (Figura 2), el resto justifica la respuesta con un escueto "8 x 5 = 40", ambos han reflexionado sobre el problema, pero preferimos la justificación de los primeros ya que llegan a verbalizar su razonamiento. Son muy pocos los estudiantes que han utilizado estrategias de resolución como dibujos (8 alumnos y solo dos de ellos han respondido correctamente); la mayoría plantea la división de manera mecánica y señala el cociente como resultado.

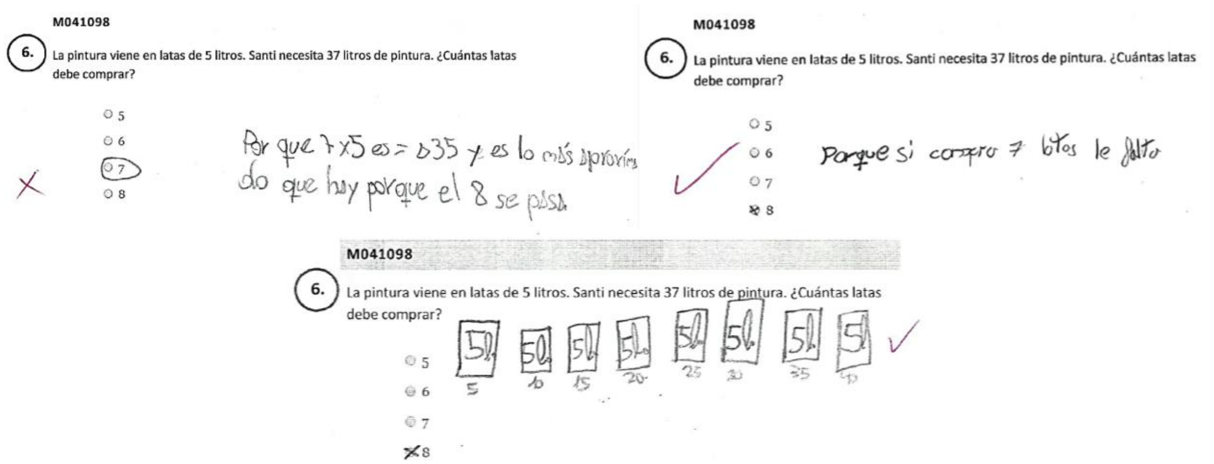

Figura 2. Actividad M041098 de los alumnos 2, 4 y 10

Pregunta M041299 (bloque números, área de fracciones, dominio cognitivo conocer, respuesta abierta). Solo 9 de los 50 alumnos que perciben este ejercicio como fácil lo han respondido correctamente. Aunque esta proporción es mayor que la general (12 respuestas correctas de un total de 111), sugiere carencias en aspectos metacognitivos. Al analizar las respuestas nos encontramos con dos formas de proceder: 37 alumnos que razonan en términos numéricos y plantean directamente la suma de las fracciones y 61 alumnos que hacen un dibujo (solo algunos de estos últimos utilizan un razonamiento mixto: dibujo y expresión numérica). Entre los primeros (representación numérica) el error cometido es siempre el mismo, un error de procedimiento, suman independientemente los numeradores y los denominadores. Entre los segundos, la dificultad se encuentra en que hacen un dibujo "para cada uno de los datos" y luego no saben cómo trabajar con ellos (Figura 3). También entre los alumnos que dibujan aparece el error de sumar numeradores y denominadores independientemente (Figura 3). Parece que al hacer dos dibujos observan que hay "3 partes coloreadas de un total de 6". De los 12 alumnos que han respondido correctamente, 9 han resuelto el ejercicio en términos gráficos, sin necesidad de aritmética explícita (Figura 3). En la guía de corrección se considera correcta la fracción 3/4 u otra equivalente, pero ningún alumno de los que han contestado correctamente ha respondido con una fracción distinta de 3/4.

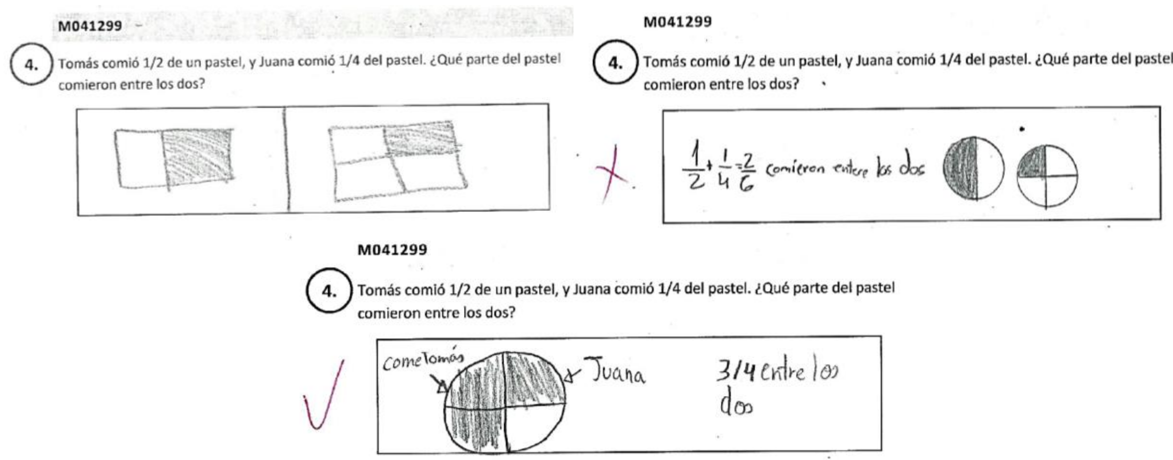

Figura 3. Actividad M041299 de los alumnos 49, 13 y 11

Pregunta M051091 (bloque de números, área de fracciones, dominio cognitivo conocer, respuesta cerrada). En este problema se nos presenta un listado de fracciones y debemos identificar la fracción que "no es igual" a las demás. El 47% de los alumnos marcaron la "opción A" como respuesta correcta. El razonamiento más utilizado en estos casos ha sido buscar patrones independientes para numeradores y denominadores, no interpretar la fracción como un número (Figura 4). En sus palabras: "es que nos pide marcar la fracción que no es igual a las demás, y el 1 solo está en la primera fracción y en ninguna más". Las estrategias que han usado el 35% de los alumnos que han respondido correctamente a esta pregunta son dos: buscar las fracciones equivalentes para "ver cuál es la que sobra" (Figura 4) o hacer un dibujo para cada una de ellas (Figura 4). En este último caso hay alumnos que han tenido dificultades a la hora de realizar dibujos que se pudieran comparar entre sí (Figura 4).

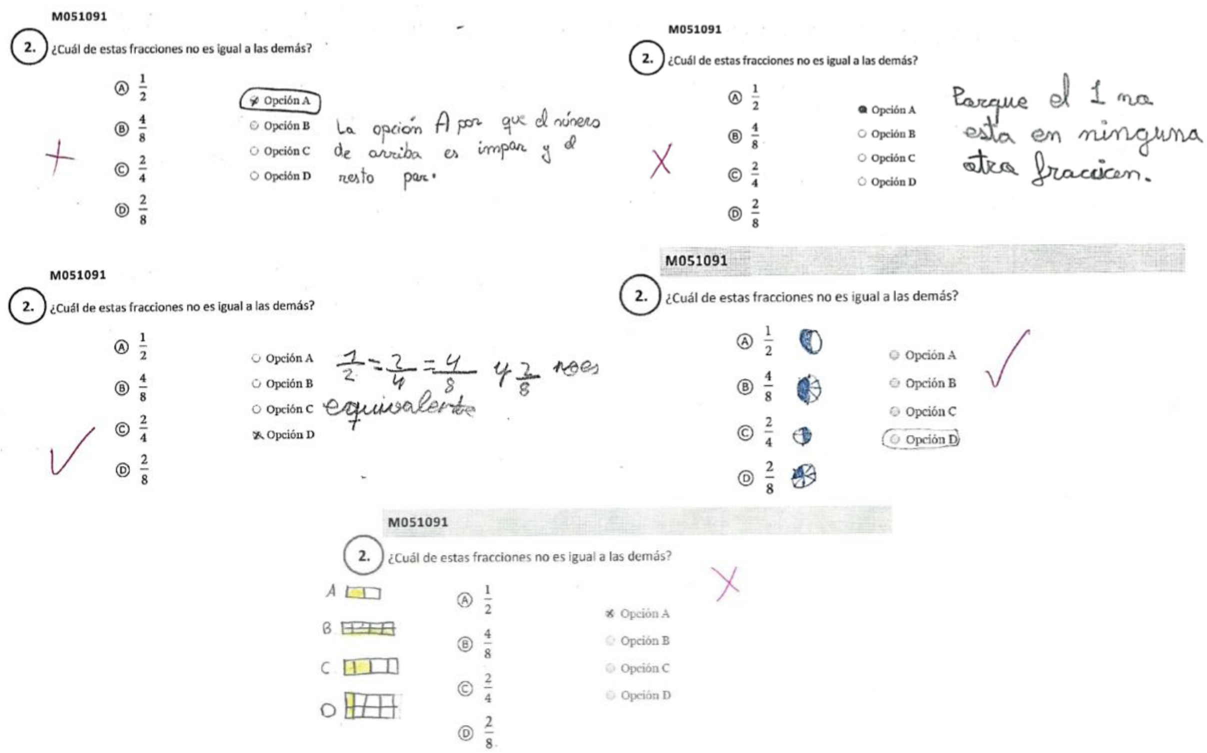

Figura 4. Actividad M051091 de los alumnos 15, 6, 3, 95, 108

Ejercicio M051601 (área de reconocimiento de patrones y relaciones, dominio cognitivo aplicar, respuesta abierta). Los dos errores más comunes han sido hacer el dibujo del cuarto término sin dar la solución numérica (esta respuesta está calificada como incorrecta en la guía de corrección) y dar un número incorrecto sin dibujo. Otro error observado ha sido hacer el dibujo correcto sin acertar con la cantidad. Esto parece sugerir interpretaciones erróneas de la pauta (Figura 5). En todas las respuestas correctas, salvo en cuatro, han dibujado primero el cuarto elemento y han contado sobre él las cerillas necesarias (Figura 5). La discusión en clase fue muy interesante pues a los alumnos que verbalizaban claramente "solo necesitas tres cerillas más para construir cada figura" les costaba bastante encontrar argumentos para convencer a los compañeros que no lo interpretaban así, hasta que una alumna dijo "¿puedo hacerlo con pinturas?".

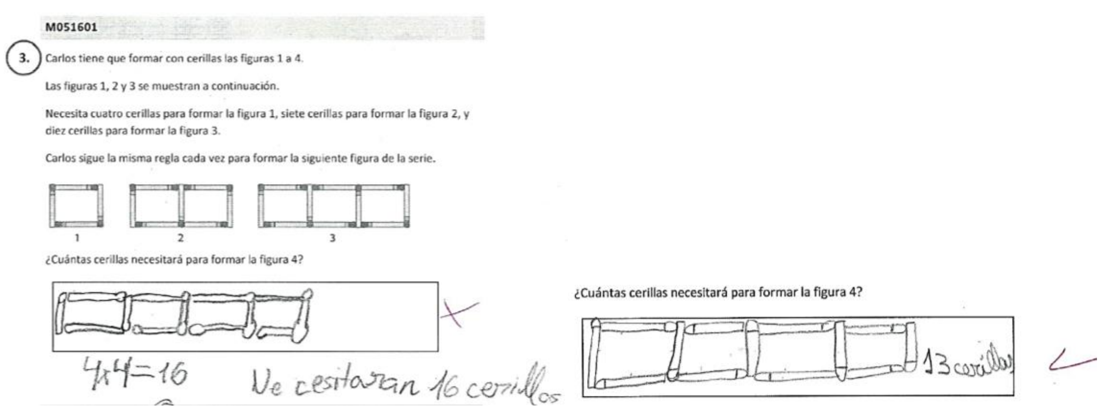

Figura 5. Actividad M051601 de los alumnos 62 y 20

4.1.2. Bloque de contenidos Geometría y Medida

Hay dos ítems en este bloque: el M041155 relacionado con la aplicación de conocimientos y el M051123 centrado en el ámbito cognitivo conocer. Ambos son de respuesta cerrada.

El ítem M041155 es un ejercicio de transposición de conceptos geométricos (perímetro) a un contexto cercano y real para el alumno, el patio del colegio. Solo 41 de los 111 alumnos han respondido correctamente, lo que sorprende ya que la pregunta no solo es aparentemente sencilla, sino que es percibida como tal por los alumnos (al 82% les parece un ejercicio fácil). Nos encontramos con problemas de comprensión de los conceptos matemáticos y problemas de comprensión lectora: están confundiendo lado del polígono con perímetro del mismo. Algunos de los argumentos recogidos son: “en el problema pone que mide 100”, “camina 100, porque el borde y el lado es lo mismo, y lo pone” (para este alumno el borde es equivalente al lado y ambos son equivalentes al perímetro completo), “porque dice que 100 es lo que mide el lado del patio” (Figura 6). Al escuchar a los alumnos debatir sobre el problema se pone de manifiesto la dificultad de modelar/transponer los conocimientos matemáticos al objeto físico, de identificar perímetro con “recorrer el borde del patio”. En el debate grupal se puso de manifiesto que recorrer a lo largo de su perímetro un cuadrado de lado 10 cm equivale a recorrer un total de 40 centímetros. Sin embargo, no entienden que el enunciado de la pregunta M041155 esté refiriéndose a una situación similar como nos muestran sus argumentos: “dice que 100 m es lo que mide el borde del patio”, “camina 100 m porque 100 m es lo que mide el borde del patio”. Todos los alumnos que eligen la opción “100 metros” como respuesta dicen entender correctamente el enunciado. Un enunciado alternativo que nos parece más claro podría ser: “El patio de la escuela es un cuadrado que mide 100 metros de lado. Ruth da una vuelta completa alrededor del patio…”

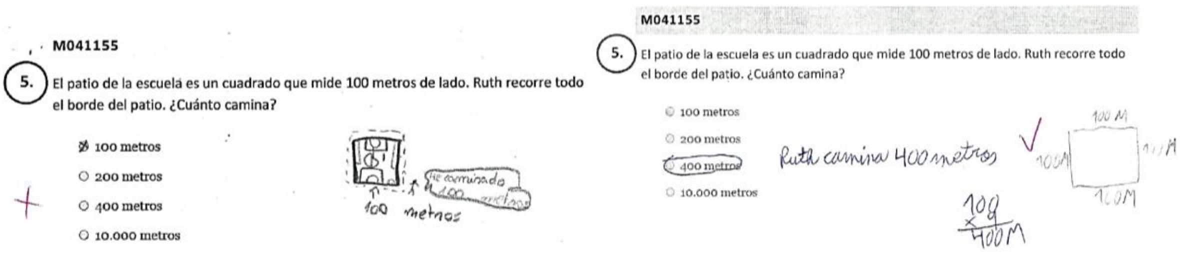

Figura 6. Actividad M041155 de los alumnos 15 y 109

El ejercicio M051123 se corresponde con el dominio cognitivo conocer. De los 111 alumnos, 31 han respondido correctamente a este ítem, pero de ellos solo a 11 les ha parecido una pregunta fácil y ninguno ha justificado su respuesta. Las respuestas más completas han consistido en dibujar sobre la figura los ejes (Figura 7). Hay 64 alumnos que no han respondido y muchos de ellos explican por qué: “no sé qué pregunta”, “no lo entiendo”. Entre las respuestas erróneas, la “opción D” ha sido marcada por más de la mitad del alumnado, exactamente por un 55%. En estos casos han confundido el término “eje de simetría” con “vértices” (Figura 7). En la discusión en grupo una niña justificó su opción D en estos términos: “yo no sé lo que es eje de simetría, pero hay cuatro esquinas importantes y estas son las que he señalado”. Un compañero le hizo ver que “esquinas hay más”; “ya pero no son importantes”, fue su respuesta. Al explicar qué es un eje de simetría lo identificaron rápidamente como “lo que hacemos en dibujo”. Nos encontramos con una manifestación clara de aprendizaje compartimentado y poco significativo.

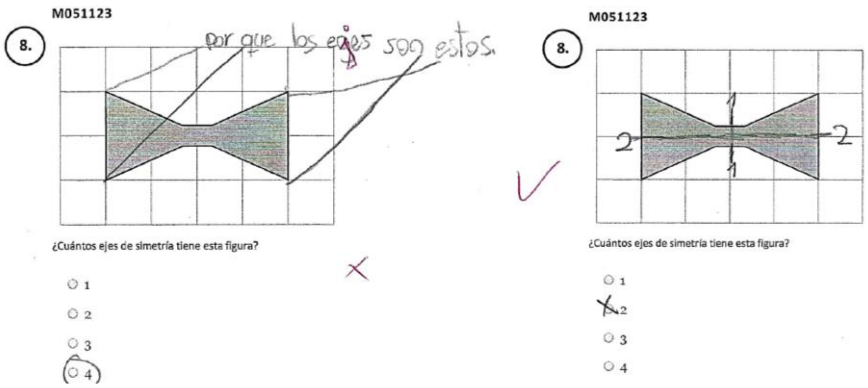

Figura 7. Actividad M051123 de los alumnos 2 y 36

4.1.3. Bloque de contenidos Representación de Datos

Los ejercicios sobre representación de datos, en los que se trabajan la interpretación y lectura de gráficos ya elaborados (ítems M041184 y M051117; Figura 8), son los que arrojan los porcentajes de acierto más elevados (en promedio 60.8% de respuestas correctas). Nótese que no se pide la elaboración de un gráfico sino la lectura e interpretación de gráficos ya elaborados. En el caso de estas dos preguntas, el análisis de las respuestas erróneas indica que una cantidad significativa de los alumnos no han sabido leer el enunciado en su conjunto, no relacionan las diferentes partes del enunciado y centran su atención solo en una de ellas. Al ser preguntados por las estrategias de resolución seguida, las respuestas mayoritarias han sido "leer el enunciado varias veces y hacer las cuentas" o bien "poner datos en los dibujos". Estos razonamientos parecen ser compartidos tanto por los alumnos que han trabajado de forma reflexiva como por aquellos que han seguido un proceder automatizado sin un proceso de análisis de la aritmética que están aplicando.

La actividad M041184 es un problema en el que los alumnos tienen que interpretar la información facilitada por un gráfico de sectores y su transposición a un gráfico de barras (Figura 8). En este ejercicio se da una tasa de aciertos muy alta, 83%, aunque los argumentos denotan en algunos casos un bajo nivel de comprensión: "el primero porque esto es clase de matemáticas y es la que gana en el caso A", "no sé por qué, pero me parecen lo mismo". Por el contrario, hay alumnos que intentan argumentar su respuesta: "porque matemáticas es 1.º y ciencias 2.º aunque no puedo ver los números para cada uno de ellos", pero estos son minoría. Tanto durante la sesión de la prueba como durante la corrección grupal, observamos que entre los alumnos que no habían sabido contestar a este ejercicio el primer obstáculo venía de interpretar "hasta dónde llega el enunciado". Al ver la primera gráfica ya se preguntaban qué hacer con ella sin enlazarla con el resto de la información; daban el enunciado por concluido y preguntaban: "¿qué tengo que hacer, colorear la gráfica?". Cuando se les respondía: "vale, si consideras que tienes que colorear, ¿qué vas a colorear?", se volvían al sitio y/o bien seguían pensando o pasaban a otro ejercicio. Durante la puesta en común una de las alumnas nos dijo: "pero es qué yo vi el dibujo, no tiene números y yo no sé qué hacer en los problemas sin números".

A pesar del buen resultado el ejercicio es percibido como difícil por un 55% de los alumnos y la tasa de alumnos que creen haber entendido bien el enunciado es de un 23%, dato muy por debajo del correspondiente a la resolución correcta (83%), por lo que creemos que los alumnos han contestado en un alto porcentaje guiados por la intuición o por descarte de posibilidades sin saber argumentar la respuesta final.

Este tipo de ejercicios nos indican que en las actividades de interpretación de gráficos es necesario trabajar la correlación entre los diferentes tipos de representación: dada una tabla de datos, conviene representarla gráficamente de diferentes formas y relacionar las diferentes representaciones.

El ejercicio M051117 presenta un gráfico de barras a partir del cual tienen que responder a una pregunta relacionada con información contenida, aunque no de forma explícita, en el gráfico. El 51% de los alumnos ha contestado correctamente, pero no todas las respuestas correctas van acompañadas de la justificación ni muestran el proceso de resolución. Entre las estrategias de carácter reflexivo identificadas se aprecia que la mayor parte ha organizado los datos sobre el gráfico para poder contestar a la pregunta, lo que evidencia un adecuado proceso de comprensión y resolución (Figura 8). Algunos se extienden en operaciones que pueden resultar hasta redundantes, pero siempre a partir de un modelo de conteo construido por el alumno (Figura 8). Otros justifican haber hecho cálculo mental.

Entre las respuestas erróneas, la más común es decir que caben 30 alumnos (Figura 8). Las argumentaciones que los alumnos aportan son de carácter completamente irreflexivo. Ya que parece que para la mayor parte de ellos el gráfico no aporta información pues se centran en el texto "hay plaza para 30 alumnos", se acomodan a la búsqueda de términos ad hoc o simplemente "operando con los datos del enunciado".

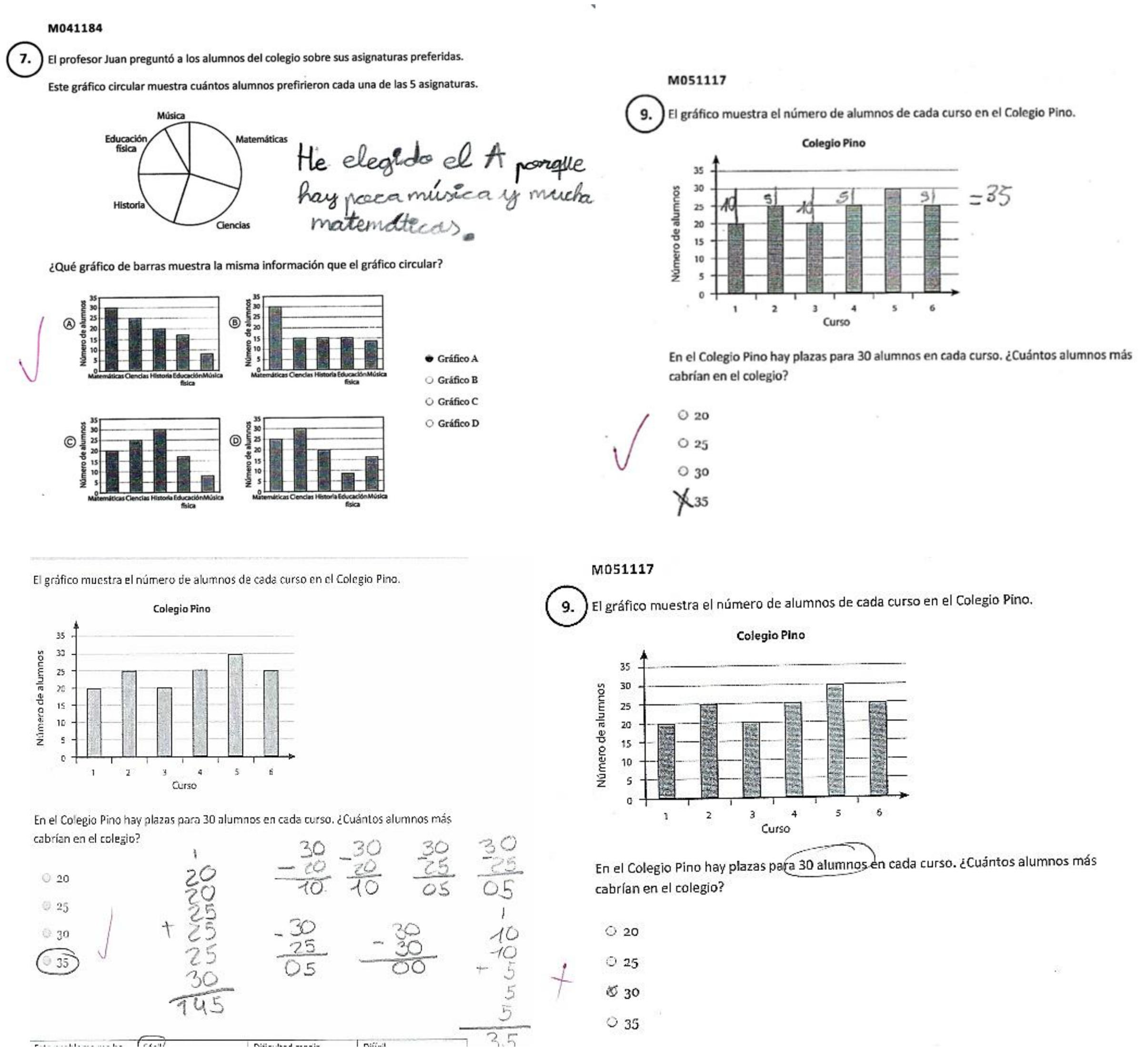

Figura 8. Actividad M041184, del alumno 28 y M051117 de los alumnos 28, 36, 68 y 8

5. Conclusiones

La actitud de los alumnos y los profesores fue de predisposición al trabajo, se mostraron interesados y motivados durante el desarrollo de la actividad y muy participativos en los momentos de discusión en grupo. En general, las preguntas planteadas en la prueba no resultaron familiares, ni sus respuestas evidentes, a ninguno de los alumnos y esto facilitó que el trabajo con las mismas lo vieran como un reto. Estas preguntas se han mostrado como marcadores fiables para identificar los vínculos entre los conceptos trabajados en el aula y su comprensión. Las cuestiones, aun estando basadas en los contenidos curriculares y su aplicación, no responden a los modelos estándar de nuestros textos. Esto da la oportunidad de comprobar el grado de comprensión del alumno y hasta qué punto es capaz de transferir los conocimientos adquiridos a nuevas situaciones.

No pretendemos generalizar, pero sí consideramos interesante llamar la atención sobre una serie de cuestiones que creemos que el trabajo pone de manifiesto:

- El estudio nos ha permitido comprobar que los alumnos recurren fundamentalmente a hechos numéricos, seleccionan una operación cuyo significado entienden que es adecuado a su interpretación del texto y en ocasiones lo hacen bajo una estrategia irreflexiva (buscan una palabra clave o un dato numérico en el enunciado para a partir del mismo utilizar aquella operación aritmética con la que identifican esta clave). Son pocos los alumnos que resuelven los problemas mediante recursos gráficos o tanteos inteligentes.
- En aquellos problemas que presentan información gráfica, los alumnos no consiguen relacionarla de forma eficaz con el resto del texto del enunciado ni con los procedimientos numéricos empleados por los alumnos.
- Se pone de manifiesto que el enfoque más extendido para el aprendizaje de algoritmos, basado en la repetición y desconectado de la interpretación, no parece ayudar a resolver eficazmente problemas. En muchas situaciones los alumnos que prescinden de los algoritmos tradicionales son los que obtienen mejores resultados.
- Es aconsejable plantear problemas no estándar y formatos de enunciados más variados que permitan trabajar de una manera amplia los tres dominios de habilidades matemáticas: conocer, aplicar y razonar. Es también conveniente reforzar los contenidos del currículo más ligados al contexto de la resolución de problemas. En particular, la necesidad de trabajar en la comprensión de las operaciones más que en el automatismo de los algoritmos
- Reflexionar sobre la "heurística de resolución de problemas" que se está aplicando en las aulas del test, pero que está ampliamente extendida: recomendaciones formales orientadas a organizar el problema en términos de datos, operaciones y resultado, no se muestra como una herramienta eficaz. Esta segmentación del proceso de resolución parece desviar a los alumnos de la tarea global de la interpretación y resolución (*relational understanding*) y no parece tener ninguna influencia sobre el pensamiento.
- El trabajo en grupo permitiendo que el alumno verbalice su pensamiento y sienta la necesidad de justificarlo ante sus pares aporta claves importantes para detectar sus fortalezas y deficiencias. Dar a los alumnos la oportunidad de verbalizar sus estrategias les ayuda a tomar conciencia de los procesos utilizados y en particular de los errores cometidos.
- Es necesario trabajar la resolución de problemas junto con actividades encaminadas a instruir al alumno en aspectos metacognitivos. Los alumnos de este estudio han mostrado carencias en este aspecto.

Referencias

Anderson, L. W., Krathwohl, D. R., & Bloom, B. S. (2001). *A taxonomy for learning, teaching, and assessing: A revision of Bloom's taxonomy of educational objectives*. Allyn & Bacon.

Barrera, V. J., Castro, E. y Cañadas, M. C. (2009). Cuaderno de trabajo sobre razonamiento inductivo para profesores de primaria en formación. En M.J. González; M. T. González; J. Murillo (Eds.): Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XIII Simposio de la SEIEM. Santander

Blanco, B., & Blanco, L. J. (2009). Contextos y estrategias en la resolución de problemas de primaria. Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 71, 75-85.

Bloom, B. S., Engelhart, M. D., Furst, E. J., Hill, W. H., & Krathwohl, D. R. (1956). Taxonomy of educational objectives: Book 1: Cognitive domain. New York: David McKay Company.

Bruner, J. S., & Linaza, J. L. (1984). *Acción, pensamiento y lenguaje*. Madrid: Alianza Psicología.

Bruner, J., Shulman, L., & Keislar, E. (1979). Algunos elementos del descubrimiento. Aprendizaje por Descubrimiento. Evaluación Crítica, 115-132.

Cabrera, C. R., & Campistrous, L. A. (1999). Estrategias de resolución de problemas en la escuela. *RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *2*(2), 31-46.

Crocker, L., & Algina, J. (2006). Introduction to classical and modern test theory. Cengage Learning Custom Publishing.

Durand, M., Hulme, C., Larkin, R., & Snowling, M. (2005). The cognitive foundations of reading and arithmetic skills in 7- to 10-year-olds. *Journal of Experimental Child Psychology, 91*(2), 113-136. https://doi:10.1016/j.jecp.2005.01.003

Duval, R. (1999). Traducción del libro "Semiosis y Pensamiento Humano: Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales" por VEGA R, Miryam *Merlyn I D. Cali*.

Fuchs, L. S., Fuchs, D., Compton, D. L., Powell, S. R., Seethaler, P. M., Capizzi, A. M., . . . Fletcher, J. M. (2006). The cognitive correlates of third-grade skill in arithmetic, algorithmic computation, and arithmetic word problems. *Journal of Educational Psychology, 98*(1), 29-43. https://doi:10.1037/0022-0663.98.1.29

Gusmão, Tânia Cristina R. S, Cajaraville, J. A., Font, V., & Godino, J. D. (2014). El caso victor: Dificultades metacognitivas en la resolución de problema. *Bolema - Mathematics Education Bulletin, 28*(48), 255-275. https://doi:10.1590/1980-4415v28n48al3

Hodnik Čadež, T., & Manfreda Kolar, V. (2015). Comparison of types of generalizations and problem-solving schemas used to solve a mathematical problem. *Educational Studies in Mathematics, 89*(2), 283-306. https://doi:10.1007/s10649-015-9598-y

IEA, TIMSS_2011_Frameworks_Spanish.pdf, Disponible en: http://www.iea.nl/fileadmin/user_upload/Publications/Electronic_versions/TIMSS_2011_Frameworks_Spanish.pdf [Consultado en mayo de 2016]

INEE, PIRLS - TIMS 2011. Estudio Internacional de progreso en comprensión lectora, matemáticas y ciencias. IEA. Volumen I INFORME ESPAÑOL. Disponible en: http://www.mecd.gob.es/dctm/inee/internacional/pirlstimss2011vol1-1.pdf?documentId=0901e72b81710232 [Consultado en mayo de 2016]

INEE, Preguntas Liberadas TIMSS y PIRLS. Disponible en: http://evaluacion.educalab.es/timsspirls/ [Consultado en mayo de 2016]

Krutetskii, V. A., Teller, J., Kilpatrick, J., & Wirszup, I. (1977). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren* National Council of Teachers of Mathematics. https://doi:10.2307/748528

LOMCE. Gobierno de España. Ley Orgánica 8/2013, 10 de diciembre, para la mejora de la educación. Boletín Oficial del Estado, núm. 295, 97858- 97921. Disponible en: http://www.boe.es/diario_boe/txt.php?id=BOE-A-2013-12886 [Consultado en mayo de 2016]

Martin, M. O., Mullis, I. V. (Eds.)., TIMSS and PIRLS 2011: Relationships Among Reading, Mathematics, and Science Achievement at the Fourth Grade—Implications for Early Learning. Chestnut Hill, MA: Boston College. 2013. Disponible en: http://timss.bc.edu/isc/publications.html [Consultado en mayo de 2016]

Marzano, R. J., & Kendall, J. S. (Eds.). (2008). *Designing and assessing educational objectives: Applying the new taxonomy*. Corwin Press.

Molina, M. Resolución de igualdades numéricas por estudiantes de tercer grado. Un estudio sobre la comprensión del signo igual y el desarrollo de pensamiento relacional. Trabajo de investigación tutelada. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada. 2005

Mullis, I. V., Martin, M. O., Smith, T. A., Garden, R. A., Gregory, K. D., Gonzalez, E. J., & O'Connor, K. M. TIMSS Trends in mathematics and science study: Assessment frameworks and specifications 2003. Disponible en: http://timss.bc.edu/isc/publications.html [Consultado en mayo de 2016]

Mullis, I. V., Martin, M. O., Ruddock, G. J., O'Sullivan, C. Y., Arora, A., & Erberber, E. TIMSS 2007 Assessment Frameworks. TIMSS & PIRLS International Study Center. Boston College. MA 02467. 2005. Disponible en: http://timss.bc.edu/isc/publications.html [Consultado en mayo de 2016]

Mullis, I. V., Martin, M. O., Ruddock, G. J., O'Sullivan, C. Y., & Preuschoff, C. (2009). *TIMSS 2011 Assessment Frameworks*. International Association for the Evaluation of Educational Achievement. Herengracht 487, Amsterdam, 1017 BT, The Netherlands.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Parveva, T., Noorani, S., Ranguelov, S., Motiejunaite, A., & Kerpanova, V. (2011). *Mathematics Education in Europe: Common Challenges and National Policies*. Education, Audiovisual and Culture Executive Agency, European Commission (EACEA). Disponible en EU Bookshop. http://eacea.ec.europa.eu/education/eurydice/documents/thematic_reports/132en.pdf

Siegler, R. S. (2005). Children's learning. *The American Psychologist, 60*(8), 769-778. https://doi:10.1037/0003-066X.60.8.769

TIMSS 2011 Grade 4 Released Items and Percent Correct Statistics Assessment. International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA). Publisher: TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College. 2011 Disponible en: http://timss.bc.edu/timss2011/international-released-items.html

Watson, C. S., Kidd, G. R., Horner, D. G., Connell, P. J., Lowther, A., Eddins, D. A., . . . Watson, B. U. (2003). Sensory, cognitive, and linguistic factors in the early academic performance of elementary school children: The benton-IU project. *Journal of Learning Disabilities, 36*(2), 165-197. https://doi:10.1177/002221940303600209

Webb, N., Franke, M., Ing, M., Wong, J., Fernandez, C., Shin, N., & Turrou, A. (2014; 2013). Engaging with others' mathematical ideas: Interrelationships among student participation, teachers' instructional practices, and learning. *International Journal of Educational Research, 63*, 79-93. https://doi:10.1016/j.ijer.2013.02.001

María Arántzazu Fraile Rey. Profesora de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Alcalá, Madrid, España.

Email: arantzazu.fraile@uah.es