Conexiones entre los espacios topológicos finitos, las FD-relaciones y las funciones submodulares

Connections between Finite Topological Spaces, FD-Relations and Submodular Functions

Humberto Sarria Zapata[1,a], **Leonardo Roa Leguizamón**[1,b], **Raul Emilio Varela**[1,c]

Resumen. En este artículo se estudian las conexiones entre los espacios topológicos finitos, las FD-relaciones (o bases de datos) y las funciones submodulares. Se interpretan las propiedades de los operadores de clausura de un espacio topológico finito en términos de FD-relaciones y funciones submodulares, como también algunos conceptos y propiedades tales como: puntos de acumulación, punto exterior, conjunto cerrado, conjunto denso y los axiomas de separación.

Palabras claves: Espacios topológicos finitos, FD-relaciones, funciones submodulares.

Abstract. In this paper we study the connections among finite topological spaces, FD-relations (or databases) and submodular functions. We interpret the properties of closure operators of finite topological spaces, in terms of FD-relations and submodular functions, we also characterize concepts and properties such that: accumulation points, exterior point, closed set, dense set and separation axioms.

Keywords: Finite topological spaces, FD-relations, submodular functions.

Mathematics Subject Classification: 54H10, 68P15, 52B40, 57M15.

Recibido: junio de 2013 Aceptado: octubre de 2013

1. Introducción

Las estructuras matemáticas de dependencia funcional comúnmente conocidas como FD-relaciones, son propias de la Teoría de las bases de datos, introducidas por Armstrong en [1]. Estas también se han utilizado para describir y comprender las teorías que estudian: topologías, matroides, retículos distributivos, variables aleatorias y sus funciones de entropía, redes de flujo y de información y juegos, entre otros, ver por ejemplo [2], [3] y [5].

La definición de FD-relación que se utiliza en este artículo es la que presenta Matus en [3]. Allí el autor da la definición de FD-relación desde un punto de vista conjuntista mediante el siguiente sistema de axiomas: Sea E un conjunto finito, una FD-relación $\mathcal{N}$ es un subconjunto de $2^E \times 2^E$ que satisface:

[1]Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia
[a]hsarriaz@unal.edu.co
[b]lroal@unal.edu.co
[c]revarelap@unal.edu.co

(FD1) Si $I \subseteq J \subseteq E$, entonces $(J, I) \in \mathcal{N}$.

(FD2) Si $(I, J), (J, K) \in \mathcal{N}$, entonces $(I, K) \in \mathcal{N}$.

(FD3) Si $(I, J), (I, K) \in \mathcal{N}$, entonces $(I, J \cup K) \in \mathcal{N}$.

Ejemplo 1.1. La relación de contenencia considerada sobre un conjunto E, define la FD-relación más pequeña que se puede construir sobre dicho conjunto. Esta corresponde a la colección de aquellas parejas en $2^E \times 2^E$ cuya segunda componente es un subconjunto de la primera componente. Se notará esta FD-relación por $\mathcal{N}_E$. Es claro que la FD-relación $\mathcal{N}_E$ está contenida en cualquier otra FD-relación definida sobre E. Por ejemplo, si $E = \{a, b\}$, entonces

$$\mathcal{N}_E = \{(\phi, \phi), (\{a\}, \phi), (\{b\}, \phi), (\{a, b\}, \phi), (\{a\}, \{a\}), (\{b\}, \{b\}), \\ (\{a, b\}, \{a\}), (\{a, b\}, \{b\}), (\{a, b\}, \{a, b\})\}.$$

Uno de los resultados más interesantes que se presentan en [3] y [5] es la relación biunívoca entre las FD-relaciones y los operadores de clausura.

Los operadores de clausura están entre los objetos más conocidos en matemáticas. Estos permiten definir ciertas estructuras matemáticas, entre las cuales se encuentran los espacios topológicos. Sea E un conjunto, un operador $c : 2^E \to 2^E$ es de clausura si satisface las siguientes propiedades:

(CL1) $I \subseteq c(I)$ **Proyección**.

(CL2) Si $I \subseteq J$, entonces $c(I) \subseteq c(J)$ **Monotonía**.

(CL3) $c(I) = c(c(I))$ **Idempotencia**.

Los operadores de clausura de los espacios topológicos satisfacen además las propiedades:

(CT4) $c(\phi) = \phi$.

(CT5) $c(\bigcup_{k=1}^{n} I_k) = \bigcup_{k=1}^{n} c(I_k)$.

Otro de los resultados que se presentan en [3] y [5], es la conexión biunívoca entre las FD-relaciones, los operadores de clausura y las clases de funciones submodulares.

Las funciones submodulares aparecen comúnmente en Teoría de Matroides, Teoría de Grafos, Teoría de Juegos y algunos problemas de optimización lineal, donde se destaca su uso en el Algoritmo Greedy, ver [2]. Sea E un conjunto finito, una *función* $f : 2^E \to \mathbb{R}$ *es submodular* si satisface la propiedad

$$f(A) + f(B) \geq f(A \cup B) + f(A \cap B), \ \ \textit{para todo } A, B \subseteq E. \tag{1}$$

f se dice *no decreciente*, si para todo $A \subseteq B \subseteq E$, $f(A) \leq f(B)$. f se dice *polimatroide* si es submodular, no decreciente y se anula en el conjunto vacío.

Este artículo está organizado de la siguiente manera: en la Sección 2, se establecen las conexiones entre FD-relaciones, operadores de clausura y funciones submodulares siguiendo los lineamientos de [3] y [5]. En la Sección 3, se interpretan las propiedades $(CT4)$ y $(CT5)$ en términos de FD-relaciones y funciones submodulares, de igual manera, se caracterizan algunos conceptos propios de los espacios topológicos finitos tales como *conjunto cerrado, conjunto denso, puntos de acumulación, punto exterior y los axiomas de separación.* En la Sección 4, se presentan las conclusiones y se proponen algunas ideas que se podrían abordar en futuras investigaciones.

Listamos a continuación la notación que se usará y se enuncian algunos conceptos básicos.

1. En el artículo se ha reservado la letra E para denotar un conjunto finito.

2. El complemento de un conjunto A, se denota por A^c.

3. Sean X un conjunto finito, y $P : 2^X \to \mathbb{Z}$ una función de probabilidad dada por $P(Y) = \frac{|Y|}{|X|}$, para $Y \subseteq X$. Se define la entropía de Y como
$$H(Y) = -\sum_{y \in Y} P(y) \ln P(y).$$

2. FD-relaciones, operadores de clausura y funciones submodulares

En esta sección se presentan las proposiciones que establecen la relación entre las FD-relaciones, los operadores de clausura y las funciones submodulares no decrecientes. Los detalles de algunas demostraciones pueden encontrarse en [3], [4] y [5].

En el siguiente resultado se muestra la relación biunívoca que existe entre las FD-relaciones y los operadores de clausura.

Proposición 2.1. *(i) Sea $\mathcal{N} \subseteq 2^E \times 2^E$ una FD-relación. El operador*
$$c_{\mathcal{N}}(I) = \bigcup_{(I,J) \in \mathcal{N}} J \tag{2}$$
es de clausura.

(ii) Sea c un operador de clausura sobre E. Entonces,
$$\mathcal{N}_c = \{(I, J) \in 2^E \times 2^E : J \subseteq c(I)\} \tag{3}$$
es una FD-relación.

(iii) Si $\mathcal{N}$ es una FD-relación, entonces $\mathcal{N} = \mathcal{N}_{c_{\mathcal{N}}}$.

(iv) Si c es un operador de clausura, entonces $c = c_{\mathcal{N}_c}$.

A continuación se presenta una relación entre funciones submodulares, no decrecientes, FD-relaciones y operadores de clausura.

Proposición 2.2. *Sea f una función submodular no decreciente sobre un conjunto E. Entonces:*

(i) El conjunto

$$\mathcal{N}_f = \{(I, J) \in 2^E \times 2^E : f(I) = f(I \cup J)\} \tag{4}$$

es una FD-relación.

(ii) El conjunto

$$c_f(I) = \{x \in E : f(I) = f(I \cup x)\} \tag{5}$$

es un operador de clausura.

Una pregunta natural que surge cuando se tiene una FD-relación (o un operador de clausura) es si existe una función submodular tal que $\mathcal{N} = \mathcal{N}_f$, (o $c = c_f$). En las siguientes proposiciones se construyen funciones submodulares a valor entero y de entropía que satisfacen lo requerido.

Proposición 2.3. *Para cada FD-relación $\mathcal{N}$, existe por lo menos una función submodular f no decreciente a valor entero tal que $\mathcal{N} = \mathcal{N}_f$.*

Demostración. Para mostrar que la proposición es válida, se construye una función $f_{\mathbb{Z}}$ submodular, no decreciente a valor entero y se muestra que $\mathcal{N} = \mathcal{N}_{f_{\mathbb{Z}}}$.

Sea $\mathcal{N}$ una FD-relación con soporte E, consideremos el conjunto

$$\mathcal{C} = \{I \in 2^E : c_{\mathcal{N}}(I) = \bigcup_{(I,J) \in \mathcal{N}} J = I\}, \tag{6}$$

y definamos para cada $J \in \mathcal{C}$ y para todo $I \subseteq E$, la función

$$\begin{aligned} q_J &: 2^E \to \mathbb{Z} \\ &I \mapsto q_J(I) = q_\phi(I - J), \end{aligned} \tag{7}$$

donde

$$\begin{aligned} q_\phi &: 2^E \to \mathbb{Z} \\ &I \mapsto q_\phi(I) = \begin{cases} 0, & \text{si } I = \phi, \\ 1, & \text{si } I \neq \phi. \end{cases} \end{aligned} \tag{8}$$

Note que la función q_J es submodular, pues para todo $A, B \subseteq E$:

1. Si $A - J = \phi$ y $B - J = \phi$, entonces $(A \cup B) - J = \phi$, $(A \cap B) - J = \phi$. Luego
$$q_J(A) + q_J(B) = q_J(A \cup B) + q_J(A \cap B) = 0.$$

2. Si $A - J = \phi$ y $B - J \neq \phi$, entonces $(A \cup B) - J \neq \phi$, $(A \cap B) - J = \phi$. Luego
$$q_J(A) + q_J(B) = q_J(A \cup B) + q_J(A \cap B) = 1.$$

3. Si $A - J \neq \phi$ y $B - J \neq \phi$, entonces $(A \cup B) - J \neq \phi$, $(A \cap B) - J \supseteq \phi$. Luego
$$2 = q_J(A) + q_J(B) \geq q_J(A \cup B) + q_J(A \cap B).$$

Además, la función q_J es no decreciente, si $A \subseteq B \subseteq E$, entonces $q_J(A) \leq q_J(B)$, pues $A - J \subseteq B - J$.

Por último, se define la función

$$\begin{aligned} f_{\mathbb{Z}} &: 2^E \to \mathbb{Z} \\ I &\mapsto f_{\mathbb{Z}}(I) = \sum_{J \in \mathcal{C}} q_J(I). \end{aligned} \tag{9}$$

La función $f_{\mathbb{Z}}$ es submodular no decreciente, debido a que es suma de funciones submodulares no decrecientes.

A continuación se mostrará que $\mathcal{N} = \mathcal{N}_{f_{\mathbb{Z}}}$.

($\subseteq$) Sea $(I, K) \in \mathcal{N}$. Entonces, por la Proposición 2.1, $K \subseteq c_{\mathcal{N}}(I)$. Veamos que $q_J(I) = q_J(I \cup K)$ para cada $J \in \mathcal{C}$.

(i) Si $q_J(I) = 1$, entonces $q_\phi(I - J) = 1$, es decir, $I - J \neq \phi$. Luego $(I \cup K) - J \neq \phi$ y $q_\phi((I \cup K) - J) = 1$, de donde $q_J(I \cup K) = 1$.

(ii) Si $q_J(I) = 0$, entonces $I - J = \phi$, es decir, $I \subseteq J$. Luego, $c_{\mathcal{N}}(I) - J = \phi$ (pues si $x \in c_{\mathcal{N}}(I) - J$, entonces $(I, x) \in \mathcal{N}$ y como $I \subseteq J$, $(J, I) \in \mathcal{N}$, luego por $(FD2)$, $(J, x) \in \mathcal{N}$, de donde $x \in c_{\mathcal{N}}(J) = J$ contradiciendo $x \in c_{\mathcal{N}}(I) - J$). Y como $K \subseteq c_{\mathcal{N}}(I)$, $K - J = \phi$, esto es $q_J(K) = 0$. Además, $I - J = \phi$, implica $q_J(I \cup K) = q_J(I) = 0$.

Entonces,

$$\begin{aligned} f_{\mathbb{Z}}(I) &= \sum_{J \in \mathcal{C}} q_J(I) \\ &= \sum_{J \in \mathcal{C}} q_J(I \cup K) \\ &= f_{\mathbb{Z}}(I \cup K). \end{aligned} \tag{10}$$

Así, por la Proposición 2.2. $(I, K) \in \mathcal{N}_{f_{\mathbb{Z}}}$.

($\supseteq$) Sea $(I, K) \in \mathcal{N}_{f_{\mathbb{Z}}}$, entonces $f_{\mathbb{Z}}(I) = f_{\mathbb{Z}}(I \cup K)$, esto es $\sum_{J \in \mathcal{C}} q_J(I) = \sum_{J \in \mathcal{C}} q_J(I \cup K)$. Veamos que $q_J(I) = q_J(I \cup K)$ para todo $J \in \mathcal{C}$. Supongamos que para algún $J \in \mathcal{C}$, $q_J(I) = 0$ y $q_J(I \cup K) = 1$, como $f_{\mathbb{Z}}(I) = f_{\mathbb{Z}}(I \cup K)$, deberá existir J' tal que $q_{J'}(I) = 1$ y $q_{J'}(I \cup K) = 0$, es decir $I - J' \neq \phi$, de donde $(I \cup K) - J' \neq \phi$, de aquí $q_{J'}(I \cup K) = 1 \neq 0$. Entonces, $q_J(I) = q_J(I \cup K)$ para todo $J \in \mathcal{C}$.

Veamos ahora que $(I, K) \in \mathcal{N}$. Si $I \subseteq E$, se tiene que $I \in \mathcal{C}$ o $I \notin \mathcal{C}$.

(i) Si $I \in \mathcal{C}$, entonces $q_I(I) = q_I(I \cup K) = 0$, de donde $(I \cup K) - I = K - I = \phi$, luego $K \subseteq I$ y por $(FD1)$ se tiene que $(I, K) \in \mathcal{N}$.

(ii) Si $I \notin \mathcal{C}$, entonces $c_{\mathcal{N}}(I) \in \mathcal{C}$, luego $q_{c_{\mathcal{N}}(I)}(I) = q_{c_{\mathcal{N}}(I)}(I \cup K) = 0$, de donde $(I \cup K) - c_{\mathcal{N}}(I) = K - c_{\mathcal{N}}(I) = \phi$. Así, $K \subseteq c_{\mathcal{N}}(I)$ y $(I, K) \in \mathcal{N}$.

$\square$

Para mostrar la existencia de una función submodular no decreciente de entropía, se presenta la construcción realizada por Varela en [5], la cual se obtiene mediante el siguiente plan:

1. A partir de un conjunto especial A, definir una FD-relación $\mathcal{N}_A$ (Proposición 2.4).

2. Construir una función submodular no decreciente r_A, asociada a la FD-relación $\mathcal{N}_A$ (Proposición 2.5).

3. Ver que toda FD-relación tiene la forma $\mathcal{N}_A$ (Proposición 2.6).

A continuación se presentan las proposiciones que soportan la construcción. Los detalles de las demostraciones se pueden encontrar en [5].

Proposición 2.4. *(i) Sea E un conjunto finito. Para cada $i \in E$, sean X_i un conjunto finito no vacío, $X_I = \prod_{i\in I} X_i$ para cada $I \subseteq E$ y $X = X_E$. Además, si $x = (x_i)_{i\in E}$, entonces el conjunto $\mathcal{N}_A$ definido de tal manera que*

$$(I, J) \in \mathcal{N}_A, \text{ si y sólo si } x_I = y_I \text{ implica } x_J = y_J \text{ para todo } x, y \in A$$

es una FD-relación.

(ii) $R_I^A := \{(x, y) \in A \times A : x_I = y_I\}$ es una relación de equivalencia. Si $(I, J) \in \mathcal{N}_A$, entonces $R_I^A \subseteq R_J^A$. Esto quiere decir que A/R_I^A (X/R denota el conjunto de clases de equivalencia definidas sobre X por una relación de equivalencia R) es un refinamiento de A/R_J^A.

Proposición 2.5. *Sea E finito y A como en la Proposición 2.4. La función $r_A : 2^E \longrightarrow \mathbb{R}$*

$$r_A(I) = -\sum_{G\in A/R_I^A} \frac{|G|}{|A|} \ln \frac{|G|}{|A|} \tag{11}$$

es submodular y no decreciente.

Proposición 2.6. *Toda FD-relación $\mathcal{N}$ con soporte E define una función submodular $r_{\mathcal{N}}$.*

Corolario 2.7. *(i) Sea A un conjunto como en la Proposición 2.4. Entonces, $\mathcal{N}_{r_A} = \mathcal{N}_A$.*

(ii) Sea $r_{\mathcal{N}}$ la función submodular obtenida a partir de la FD-relación finita $\mathcal{N}$ según la Proposición 2.5. Entonces $\mathcal{N} = \mathcal{N}_{r_A} = \mathcal{N}_{r_{\mathcal{N}}}$.

A partir de la construcción de la función submodular r_A dada por (11), se deducen las siguientes observaciones:

1. $|A|$ es dos veces el número de elementos en $2^E \times 2^E$ que no pertenecen a la FD-relación $\mathcal{N}$.

2. Si $n_I = |c_{\mathcal{N}}(I)|$, entonces el número de parejas en $2^E \times 2^E$ que tienen como primera componente a I y no están en $\mathcal{N}$ está dado por

$$F_I = 2^{|E|} - 2^{n_I}. \tag{12}$$

3. El número de elementos en cada clase A/R_I^A es uno o dos. Además, el número de clases con dos elementos está dado por

$$S_I = \sum_{I \in c_{\mathcal{N}_\tau}(J)} F_J, \tag{13}$$

por consiguiente el número de clases en A/R_I^A con un elemento es $|A| - 2S_I$.

Teniendo en cuenta las observaciones anteriores se puede escribir la función r_A de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} r_A(I) &= -\sum_{G \in A/R_I^A} \frac{|G|}{|A|} \ln \frac{|G|}{|A|} \\ &= -S_I \left(\frac{2}{|A|} \ln \frac{2}{|A|} \right) - (|A| - 2S_I) \left(\frac{1}{|A|} \ln \frac{1}{|A|} \right) \\ &= -\frac{2S_I}{|A|} \ln 2 + \ln |A|. \end{aligned}$$

Algorithm 1 Determinar la función submodular de entropía

$$r_A : 2^E \to \mathbb{R}$$

Require: Una FD-relación $\mathcal{N}$ definida sobre un conjunto finito E.
Ensure: Para cada $I \subseteq E$,

$$r_A(I) = \begin{cases} \ln |A| - \frac{2S_I}{|A|} \ln 2, & \text{si } I \neq \phi, \\ 0, & \text{si } I = \phi. \end{cases}$$

for $I \subseteq E$, **do**

$$c_{\mathcal{N}}(I) = \bigcup_{(I,J) \in \mathcal{N}} J.$$

$$n_I = |c_{\mathcal{N}}(I)|$$

end for
for $I \subseteq E$, **do**

$$F_I = 2^{|E|} - 2^{n_I}$$

$$|A| = 2 \sum_{I \in 2^E} F_I.$$

end for
for $I \subseteq E$, $I \neq \phi$ **do**

$$S_I = \sum_{I \subseteq c_{\mathcal{N}}(J)} F_J.$$

end for

El anterior algoritmo permite calcular los valores de la función r_A para cualquier FD-relación contenida propiamente en $2^E \times 2^E$ o un operador de clausura definido sobre E. Nótese que si $\mathcal{N} = 2^E \times 2^E$ la función r_A es constante.

Ejemplo 2.8. Sea $E = \{a, b, c\}$, consideremos el operador de clausura

$$\begin{aligned} c : 2^E &\to 2^E \\ \phi &\mapsto \phi \\ \{a\} &\mapsto \{a, c\} \\ \{b\} &\mapsto \{b\} \\ \{c\} &\mapsto \{c\} \\ \{a, b\} &\mapsto \{a, b, c\} \\ \{a, c\} &\mapsto \{a, c\} \\ \{b, c\} &\mapsto \{b, c\} \\ \{a, b, c\} &\mapsto \{a, b, c\} \end{aligned}$$

Para cada $I \subseteq E$ se calcula F_I

$$\begin{aligned} F_\phi &= 8 - 1 = 7 \\ F_{\{a\}} &= 8 - 4 = 4 \\ F_{\{b\}} &= 8 - 2 = 6 \\ F_{\{c\}} &= 8 - 2 = 6 \\ F_{\{a,b\}} &= 8 - 8 = 0 \\ F_{\{a,c\}} &= 8 - 4 = 4 \\ F_{\{b,c\}} &= 8 - 4 = 4 \\ F_{\{a,b,c\}} &= 8 - 8 = 0. \end{aligned}$$

Por lo anterior se tiene que

$$\begin{aligned} |A| &= 2 \sum_{I \subseteq E} F_I \\ &= 62. \end{aligned}$$

Ahora para cada $I \subseteq E$ se obtiene el valor de S_I

$$\begin{aligned} S_{\{a\}} &= F_{\{a\}} + F_{\{a,b\}} + F_{\{a,c\}} + F_{\{a,b,c\}} = 8 \\ S_{\{b\}} &= F_{\{b\}} + F_{\{a,b\}} + F_{\{b,c\}} + F_{\{a,b,c\}} = 10 \\ S_{\{c\}} &= F_{\{a\}} + F_{\{c\}} + F_{\{a,b\}} + F_{\{a,c\}} + F_{\{b,c\}} + F_{\{a,b,c\}} = 18 \\ S_{\{a,b\}} &= F_{\{a,b\}} + F_{\{a,b,c\}} = 0 \\ S_{\{a,c\}} &= F_{\{a\}} + F_{\{a,b\}} + F_{\{a,c\}} + F_{\{a,b,c\}} = 8 \\ S_{\{b,c\}} &= F_{\{a,b\}} + F_{\{b,c\}} + F_{\{a,b,c\}} = 4 \\ S_{\{a,b,c\}} &= F_{\{a,b,c\}} = 0. \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} r_A : 2^N &\to \mathbb{R} \\ \phi &\mapsto 0 \\ \{a\} &\mapsto \ln 62 - \frac{16}{62}\ln 2 \\ \{b\} &\mapsto \ln 62 - \frac{20}{62}\ln 2 \\ \{c\} &\mapsto \ln 62 - \frac{36}{62}\ln 2 \\ \{a,b\} &\mapsto \ln 62 \\ \{a,c\} &\mapsto \ln 62 - \frac{16}{62}\ln 2 \\ \{b,c\} &\mapsto \ln 62 - \frac{8}{62}\ln 2 \\ \{a,b,c\} &\mapsto \ln 62. \end{aligned}$$

Se presenta a continuación un ejemplo de una función submodular no decreciente que define el operador de clausura de un espacio topológico

Ejemplo 2.9. Sea (E,τ) un espacio topológico y c_τ su operador de clausura. Se define

$$\begin{aligned} \overline{f} : 2^E &\to \mathbb{Z} \\ I &\to \overline{f}(I) = |c_\tau(I)|. \end{aligned} \tag{14}$$

La función $\overline{f} : 2^E \to \mathbb{Z}$ es submodular no decreciente y $c_f = c$.

Demostración. Sean c_τ el operador de clausura de una topología definida sobre el conjunto E y $A, B \subseteq E$. Por el principio de inclusión y exclusión de la Teoría de conjuntos y $(CT5)$ se tiene que:

$$\begin{aligned} \overline{f}(A\cup B) + \overline{f}(A\cap B) &= |c_\tau(A\cup B)| + |c_\tau(A\cap B)| \\ &= |c_\tau(A)\cup c_\tau(B)| + |c_\tau(A\cap B)| \\ &= |c_\tau(A)| + |c_\tau(B)| - |c_\tau(A)\cap c_\tau(B)| + |c_\tau(A\cap B)| \\ &\leq |c_\tau(A)| + |c_\tau(B)| - |c_\tau(A)\cap c_\tau(B)| + |c_\tau(A)\cap c_\tau(B)| \\ &= \overline{f}(A) + \overline{f}(B). \end{aligned}$$

Si $A \subseteq B$, por la monotonía $c_\tau(A) \subseteq c_\tau(B)$, entonces $\overline{f}(A) = |c_\tau(A)| \leq |c_\tau(B)| = \overline{f}(B)$. Así, la función $\overline{f}$ es submodular y no decreciente.

A continuación se muestra que $c = c_{\overline{f}}$.

($\subseteq$) Sean $I \subseteq E$ y $x \in c_\tau(I)$. Por la monotonía e idempotencia del operador de clausura, $c_\tau(x) \subseteq c_\tau(I)$ entonces,

$$c_\tau(I\cup x) = c_\tau(I)\cup c_\tau(x) = c_\tau(I).$$

Por lo tanto, $\overline{f}(I) = \overline{f}(I\cup x)$. De aquí y la Proposición 2.2, $x \in c_{\overline{f}}(I)$.

($\supseteq$) Sean $I \subseteq E$ y $x \in c_{\overline{f}}(I)$. Entonces,

$$\overline{f}(I) = |c_\tau(I)| = \overline{f}(I \cup x) = |c_\tau(I) \cup c_\tau(x)|, \tag{15}$$

luego $c_\tau(x) \subseteq c_\tau(I)$. En consecuencia $x \in c_\tau(I)$.

□

Las construcciones de las funciones submodulares $f_{\mathbb{Z}}$, r_A y $\overline{f}$ motivan la siguiente definición.

Definición 2.10. Dada una FD-relación $\mathcal{N}$ (o un operador de clausura c), se define $\lambda(\mathcal{N})$ (respectivamente $\lambda(c)$) como el subconjunto de funciones submodulares no decrecientes tales que $\mathcal{N}_f = \mathcal{N}$,

$$\lambda(\mathcal{N}) = \{f : \mathcal{N}_f = \mathcal{N}\}. \tag{16}$$

La anterior forma de definir $\lambda(\mathcal{N})$ permite construir una partición sobre el conjunto de funciones submodulares no decrecientes, o equivalentemente sobre el conjunto de operadores de clausura definidos sobre un conjunto E, mediante la relación de equivalencia definida de la siguiente manera: sean f y g funciones submodulares no decrecientes, entonces f está relacionado con g, ($f \simeq g$), si y sólo si, $\mathcal{N}_f = \mathcal{N}_g$, o de manera equivalente $c_f = c_g$.

Proposición 2.11. *(i) Sean $\mathcal{N}$ una FD-relación y $f \in \lambda(\mathcal{N})$. Si α es un número real positivo, entonces $f + \alpha$ y αf son funciones submodulares no decrecientes en $\lambda(\mathcal{N})$.*

(ii) El conjunto $\lambda(\mathcal{N})$ es cerrado bajo la suma usual entre funciones.

3. Espacios topológicos, FD-relaciones y funciones submodulares

Un operador de clausura c que define un espacio topológico (E, τ), satisface las propiedades adicionales:

(CT4) $c(\phi) = \phi$.

(CT5) $c(\bigcup_{k=1}^n I_k) = \bigcup_{k=1}^n c(I_k)$.

En esta sección se interpretan las propiedades $(CT4)$ y $(CT5)$ en términos de las FD-relaciones y las funciones submodulares. Esta interpretación permitirá caracterizar algunos conceptos y propiedades de los espacios topológicos finitos tales como: *conjunto cerrado, conjunto denso, punto de acumulación, punto exterior y axiomas de separación* en término de FD-relaciones y funciones submodulares.

En lo que sigue, c_τ denotará al operador de clausura del espacio topológico (E, τ) y $\mathcal{N}_\tau$ la FD-relación que se obtiene a partir del operador de clausura c_τ, es decir, $\mathcal{N}_\tau = \mathcal{N}_{c_\tau}$.

Proposición 3.1. *La FD-relación $\mathcal{N}_\tau$ con soporte E satisface las propiedades adicionales:*

(FD4) *Si* $(\phi, J) \in \mathcal{N}_\tau$ *para algún* $J \subseteq E$*, entonces* $J = \phi$.

(FD5) *Si* $(\bigcup_{k=1}^n I_k, J) \in \mathcal{N}_\tau$*, entonces existe una colección* $\{J_k\}_{k=1,\ldots,n}$ *tal que* $J = \bigcup_{k=1}^n J_k$ *con* $(I_k, J_k) \in \mathcal{N}_\tau$ *para todo* $k = 1, \ldots, n$.

Además, si una FD-relación $\mathcal{N}$ *satisface* $(FD4)$ *y* $(FD5)$*, entonces el operador de clausura* $c_\mathcal{N}$ *satisface* $(CT4)$ *y* $(CT5)$*, es decir,* $c_\mathcal{N}$ *es el operador de clausura de una topología.*

Demostración. Sea $\mathcal{N}_\tau$ la FD-relación con soporte E y $c_\tau = c_{\mathcal{N}_\tau}$ el operador de clausura de la topología τ. Se mostrará que $\mathcal{N}_\tau$ satisface $(FD4)$ y $(FD5)$. Si $(\phi, J) \in \mathcal{N}_\tau$, por la Proposición 2.1, y la propiedad $(CT4)$,

$$J \subseteq c_{\mathcal{N}_\tau}(\phi) = \phi,$$

luego $(FD4)$ se satisface. Si $(\bigcup_{k=1}^n I_k, J) \in \mathcal{N}_\tau$, entonces por la Proposición 2.1, y la propiedad $(CT5)$,

$$J \subseteq c_\tau\left(\bigcup_{k=1}^n I_k\right) = \bigcup_{k=1}^n c_\tau(I_k),$$

luego existen conjuntos J_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, tales que $J = \bigcup_{k=1}^n J_k$ y $J_k \subseteq c(I_k)$, por lo tanto $(I_k, J_k) \in \mathcal{N}_\tau$, en consecuencia $(FD5)$ se cumple.

Por último se mostrará que si la FD-relación $\mathcal{N}$ satisface $(FD4)$ y $(FD5)$, entonces $c_\mathcal{N}$ satisface $(CT4)$ y $(CT5)$. La propiedad $(CT4)$ se sigue de $(FD4)$ y

$$c_\mathcal{N}(\phi) = \bigcup_{(\phi, J) \in \mathcal{N}} J = \phi.$$

Para la propiedad $(CT5)$ veamos que $c_\mathcal{N}(\bigcup_{k=1}^n I_k) = \bigcup_{k=1}^n c_\mathcal{N}(I_k)$.

($\subseteq$) Sea $x \in c_\mathcal{N}(\bigcup_{k=1}^n I_k)$ entonces por la Proposición 2.1, $(\bigcup_{k=1}^n I_k, x) \in \mathcal{N}_{c_\mathcal{N}} = \mathcal{N}$, luego por la propiedad $(FD5)$, $(I_k, x) \in \mathcal{N}$ para algún $k = 1, \ldots, n$. Así, $x \in c_\mathcal{N}(I_k)$ y por consiguiente $x \in \bigcup_{k=1}^n c_\mathcal{N}(I_k)$.

($\supseteq$) Como $I_k \subseteq \bigcup_{k=1}^n I_k$, entonces por la monotonía de los operadores de clausura, $c_\mathcal{N}(I_k) \subseteq c_\mathcal{N}(\bigcup_{k=1}^n I_k)$, luego $\bigcup_{k=1}^n c_\mathcal{N}(I_k) \subseteq c_\mathcal{N}(\bigcup_{k=1}^n I_k)$.

□

Proposición 3.2. *Si* f *es una función submodular no decreciente en* $\lambda(\mathcal{N}_\tau)$*, entonces* f *satisface las siguientes condiciones:*

(T4) *Si* $J \subseteq E$ *y* $f(\phi) = f(J)$*, entonces* $J = \phi$.

(T5) *Si* $f(\bigcup_{k=1}^n I_k) = f(\bigcup_{k=1}^n I_k \cup J)$*, entonces existe una colección* $\{J_k\}_{k=1,\ldots,n}$ *tal que,* $J = \bigcup_{k=1,\ldots,n} J_k$ *con* $f(I_k) = f(I_k \cup J_k)$ *para todo* $k = 1, \ldots n$.

Además, si una función submodular no decreciente f *satisface* $(T4)$ *y* $(T5)$*, entonces el operador de clausura* c_f *satisface* $(CT4)$ *y* $(CT5)$*, es decir,* c_f *es el operador de clausura de una topología.*

Demostración. Sean $\mathcal{N}_\tau$ una FD-relación con soporte E y $f \in \lambda(\mathcal{N}_\tau)$. Se mostrará que f satisface las propiedades $(T4)$ y $(T5)$. Supongamos que $f(\phi) = f(J)$, para algún $J \subseteq E$. Por la Proposición 2.2 $(\phi, J) \in \mathcal{N}_\tau$. Entonces, por la propiedad $(FD4)$ de la Proposición 3.1 $J = \phi$, luego $(T4)$ se satisface.

Si $f\left(\bigcup_{k=1}^n I_k\right) = f\left(\bigcup_{k=1}^n I_k \cup J\right)$, por la Proposición 2.2 $\left(\bigcup_{k=1}^n I_k, J\right) \in \mathcal{N}_\tau$, y por la propiedad $(FD5)$ existe una colección $\{J_k\}_{k=1,\ldots,n}$ tal que, $J = \bigcup_{k=1}^n J_k$ con $(I_k, J_k) \in \mathcal{N}_\tau$, y como $f \in \lambda(\mathcal{N}_\tau)$ se sigue que $f(I_k) = f(I_k \cup J_k)$, para todo $k = 1, \ldots, n$, por lo tanto se cumple $(FD5)$.

Por último, se mostrará que si la función submodular f satisface $(T4)$ y $(T5)$, entonces el operador de clausura $c_{\mathcal{N}_f}$ satisface $(CT4)$ y $(CT5)$. La propiedad $(CT4)$ se sigue directamente de la Proposición 2.2 y la propiedad $(T4)$. Para la propiedad $(CT5)$ veamos que $c_{\mathcal{N}_f}\left(\bigcup_{k=1}^n I_k\right) = \bigcup_{k=1}^n c_{\mathcal{N}_f}(I_k)$.

($\subseteq$) Sea $x \in c_{\mathcal{N}_f}\left(\bigcup_{k=1}^n I_k\right)$, por la Proposición 2.2 $f\left(\bigcup_{k=1}^n I_k\right) = f\left(\bigcup_{k=1}^n I_k \cup x\right)$, entonces por $(T5)$, $f(I_k) = f(I_k \cup x)$ para algún $k = 1, \ldots, n$, así $x \in c_{\mathcal{N}_f}(I_k)$, es decir, $x \in \bigcup_{k=1}^n c_{\mathcal{N}_f}(I_k)$.

($\supseteq$) Se sigue de la propiedad de monotonía para los operadores de clausura aplicada a $c_{\mathcal{N}_f}$.

$\square$

De este modo es posible definir un espacio topológico finito a partir de FD-relaciones y funciones submodulares no decrecientes.

En el siguiente ejemplo se presenta una función submodular no decreciente que define un espacio topológico.

Ejemplo 3.3. Consideremos la siguiente función f a valor entero, definida sobre el conjunto $E = \{a, b, c\}$

$$
\begin{aligned}
f : 2^E &\to \mathbb{Z} \\
\phi &\mapsto 0 \\
\{a\} &\mapsto 2 \\
\{b\} &\mapsto 3 \\
\{c\} &\mapsto 4 \\
\{a,b\} &\mapsto 4 \\
\{a,c\} &\mapsto 4 \\
\{b,c\} &\mapsto 5 \\
\{a,b,c\} &\mapsto 5.
\end{aligned}
$$

La función f es una función submodular no decreciente que satisface $(T4)$ y $(T5)$. El operador de clausura c_f asociado a la función submodular, no decreciente f está determinado por:

$$\begin{aligned} c_f : 2^E &\to 2^E \\ \phi &\mapsto \phi \\ \{a\} &\mapsto \{a\} \\ \{b\} &\mapsto \{b\} \\ \{c\} &\mapsto \{a,c\} \\ \{a,b\} &\mapsto \{a,b\} \\ \{a,c\} &\mapsto \{a,c\} \\ \{b,c\} &\mapsto \{a,b,c\} \\ \{a,b,c\} &\mapsto \{a,b,c\}, \end{aligned}$$

c_f es el operador de clausura de la topología

$$\tau = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,b,c\}\}.$$

3.1. Algunos conceptos de espacios topológicos finitos

En las siguientes proposiciones, se caracterizan definiciones y propiedades de los espacios topológicos finitos, mediante FD-relaciones y funciones submodulares.

Proposición 3.4. *Sean (E,τ) un espacio topológico, c_τ su operador de clausura, $f \in \lambda(\mathcal{N}_\tau)$ y $F \subseteq E$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) F *es un conjunto cerrado.*

(ii) $(F,J) \in \mathcal{N}_\tau$ *si y sólo si* $J \subseteq F$.

(iii) $f(F) = f(F \cup J)$ *si y sólo si* $J \subseteq F$.

Demostración.

$$\begin{aligned} \text{El conjunto } F \text{ es cerrado} &\Leftrightarrow c_\tau(F) = F \\ &\Leftrightarrow (F,J) \in \mathcal{N}_\tau \quad \text{para cada } J \subseteq F \\ &\Leftrightarrow f(F) = f(F \cup J) \quad \text{para cada } J \subseteq F. \end{aligned}$$

□

Proposición 3.5. *Sean (E,τ) un espacio topológico, c_τ su operador de clausura, $f \in \lambda(\mathcal{N}_\tau)$ y $b \in E$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) b *es un punto de acumulación del conjunto* A.

(ii) $(A - \{b\}, b) \in \mathcal{N}_\tau$.

(iii) $f(A) = f(A - \{b\})$.

Demostración.

$$\begin{aligned} b \text{ es un punto de acumulación del conjunto A} &\Leftrightarrow b \in c_\tau(A - \{b\}) \\ &\Leftrightarrow (A - \{b\}, b) \in \mathcal{N}_\tau \\ &\Leftrightarrow f(A) = f(A - \{b\}). \end{aligned}$$

□

Las demostraciones de las siguientes proposiciones son similares a las anteriores.

Proposición 3.6. *Sea (E, τ) un espacio topológico, c_τ su operador de clausura, $f \in \lambda(\mathcal{N}_\tau)$ y $A \subseteq E$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) A *es un conjunto cerrado.*

(ii) $(A, A^a) \in \mathcal{N}_\tau$.

(iii) $f(A) = f(A \cup A^a)$.

Proposición 3.7. *Sean (E, τ) un espacio topológico, c_τ su operador de clausura, $f \in \lambda(\mathcal{N}_\tau)$, $A \subseteq E$ y $b \in E$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) b *es exterior a* A.

(ii) $(A, b) \notin \mathcal{N}_\tau$.

(iii) $f(A) < f(A \cup b)$.

Proposición 3.8. *Sean (E, τ) un espacio topológico, c_τ su operador de adherencia, $f \in \lambda(\mathcal{N}_\tau)$ y $A \subseteq E$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) A *es denso.*

(ii) $(A, E) \in \mathcal{N}_\tau$.

(iii) $f(A) = f(E)$.

Ejemplo 3.9. Consideremos la función f submodular, no decreciente, definida sobre el conjunto $E = \{a, b, c, d\}$

$$\begin{aligned}
f : 2^E &\to \mathbb{Z}\\
\phi &\mapsto 0\\
\{a\} &\mapsto 4\\
\{b\} &\mapsto 4\\
\{c\} &\mapsto 4\\
\{d\} &\mapsto 4\\
\{a, b\} &\mapsto 6\\
\{a, c\} &\mapsto 6\\
\{a, d\} &\mapsto 6\\
\{b, c\} &\mapsto 6\\
\{b, d\} &\mapsto 6\\
\{c, d\} &\mapsto 4\\
\{a, b, c\} &\mapsto 7\\
\{a, b, d\} &\mapsto 7\\
\{a, c, d\} &\mapsto 6\\
\{b, c, d\} &\mapsto 6\\
\{a, b, c, d\} &\mapsto 7.
\end{aligned}$$

La función f satisface las propiedades $(T4)$ y $(T5)$, es decir c_f es el operador de clausura de una topología. Entonces,

1. El conjunto $\{a, d\}$ no es cerrado, puesto que $f(\{a, d\}) = f(\{a, c, d\})$, pero $\{c\} \nsubseteq \{a, d\}$.

2. El punto a no es un punto de acumulación del conjunto $\{a, c, d\}$, debido a que $f(\{a, c, d\}) \neq f(\{c, d\})$.

3. Los conjuntos densos son $\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, b, c, d\}$.

4. El punto c no es exterior al conjunto {a,b,d}, puesto que $f(a, b, d) = f(a, b, c, d)$.

5. La colección de conjuntos cerrados es:

$$\{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\}\}.$$

3.2. Axiomas de separación

En el estudio de los espacios topológicos uno de los conceptos mas interesantes es la separación de puntos o conjuntos del espacio mediante conjuntos abiertos. Este tipo de separaciones se estudian bajo la denominación de axiomas de separación T_k, $k = 0, 1, 2, 3, 4$, normales y regulares. En espacios topológicos finitos los espacios T_1, T_2, T_3 y T_4 son espacios discretos. Nótese sin embargo, que el espacio de Sierpinski, por ejemplo, es normal.

Proposición 3.10. *(i) Sean (E, τ) un espacio topológico, c_τ su operador de clausura y f una función submodular no decreciente en $\lambda(\mathcal{N}_\tau)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a. (E, τ) es un espacio topológico T_0.

b. Para todo $x, z \in E$ con $x \neq z$, $x \notin c_\tau(z)$, o, $z \notin c_\tau(x)$.

c. Para todo $x, z \in E$ con $x \neq z$, $(x, z) \notin \mathcal{N}_\tau$, o, $(z, x) \notin \mathcal{N}_\tau$.

d. Para todo $x, z \in E$ con $x \neq z$, $f(x) < f(x \cup z)$, o, $f(z) < f(x \cup z)$.

(ii) Sean (E, τ) un espacio topológico y f una función submodular no decreciente en $\lambda(\mathcal{N}_\tau)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a. (E, τ) es un espacio topológico T_1.

b. Para todo $x, z \in E$ con $x \neq z$, $(x, z) \notin \mathcal{N}_\tau$, y, $(z, x) \notin \mathcal{N}_\tau$.

c. Para todo $x, z \in E$ con $x \neq z$, $f(x) < f(x \cup z)$ y $f(z) < f(x \cup z)$.

Demostración. (i) Sean $x, z \in E$ con $x \neq z$, y (E, τ) un espacio topológico T_0 con operador de clausura c_τ. Entonces, sin pérdida de generalidad existe un conjunto abierto U tal que

$$\begin{aligned} x \in U \ \ y \ \ z \notin U &\Leftrightarrow z \notin c_\tau(x) \\ &\Leftrightarrow (x, z) \notin \mathcal{N}_\tau \\ &\Leftrightarrow f(x) < f(x \cup z) \\ &\Leftrightarrow z \notin c_f(x) = c_\tau(x). \end{aligned}$$

(ii) Sean (E,τ) un espacio topológico T_1 y c_τ su operador de clausura. Entonces, para todo $x,z \in E$ con $x \neq z$, existen conjuntos abiertos U_x y V_z tales que

$$\begin{aligned} z \notin U_x \ \ y \ \ x \notin V_z &\Leftrightarrow z \notin c_\tau(x), \ \ y \ \ x \notin c_\tau(z) \\ &\Leftrightarrow (x,z) \notin \mathcal{N}_\tau \ \ y \ \ (z,x) \notin \mathcal{N}_\tau \\ &\Leftrightarrow f(x) < f(x \cup z) \ \ y \ \ f(z) < f(x \cup z). \end{aligned}$$

□

Proposición 3.11. *Sean (E,τ) un espacio topológico y f una función submodular no decreciente en $\lambda(\mathcal{N}_\tau)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *(E,τ) es un espacio topológico regular.*

(ii) *Si F es un conjunto cerrado y $x \in E$ tal que $x \notin F$, existe un par de conjuntos U y V disyuntos y abiertos tales que $(V^c, x) \in \mathcal{N}_\tau$ y $(U^c, F) \in \mathcal{N}_\tau$.*

(iii) *Si F es un conjunto cerrado y $x \in E$ tal que $x \notin F$, existe un par de conjuntos U y V disyuntos y abiertos tales que $f(V^c) = F(V^c \cup x)$ y $f(U^c) = F(U^c \cup F)$.*

Proposición 3.12. *Sean (E,τ) un espacio topológico y f una función submodular no decreciente en $\lambda(\mathcal{N}_\tau)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *(E,τ) es un espacio topológico normal.*

(ii) *Si F y G son conjuntos cerrados y disyuntos, existe un par de conjuntos U y V disyuntos y abiertos, tales que $(V^c, F) \in \mathcal{N}_\tau$ y $(U^c, G) \in \mathcal{N}_\tau$.*

(iii) *Si F y G son conjuntos cerrados y disyuntos, existe un par de conjuntos U y V disyuntos y abiertos tal que $f(V^c) = f(V^c \cup F)$ y $f(U^c) = f(U^c \cup G)$.*

La demostración de las Proposiciones 3.11 y 3.12 es similar a la de la Proposición 3.10.

Ejemplo 3.13. La función submodular del Ejemplo 3.9 define el operador de clausura c_f, de una topología regular.

4. Conclusiones

La realización de este artículo surgió como continuación del trabajo desarrollado por Raul E. Varela [5]. Allí el autor plantea una pregunta acerca de la relación entre los espacios topológicos y las FD-relaciones. Con el objetivo de dar respuesta a este problema, se establecen en este artículo las bases de las conexiones entre las FD-relaciones, las funciones submodulares y los espacios topológicos finitos. Lo anterior permite caracterizar conceptos tales como conjunto cerrado, conjunto denso, puntos de acumulación, punto exterior y los axiomas de separación en términos de las FD-relaciones y las funciones submodulares.

A continuación se plantean algunas preguntas que podrían ser abordadas en futuras investigaciones.

1. Encontrar un algoritmo que determine todas las funciones submodulares (salvo dilataciones o contracciones) que definan un espacio topológico finito dado.
2. Describir el cono convexo que determina el conjunto de funciones submodulares que definen un espacio topológico finito dado.
3. Estudiar los poliedros que definen topologías finitas, caracterizando el poliedro independiente y el poliedro base de las funciones submodulares asociadas a dicha topología, ver [2].
4. Verificar que otras propiedades y conceptos básicos pueden ser caracterizados mediante FD-relaciones y funciones submodulares, por ejemplo: bases, compacidad, conexidad, continuidad, etc.
5. Estudiar los espacios topológicos finitos mediante las herramientas de la Teoría de la información, ver [4].
6. Estudiar una posible generalización de los resultados a espacios topológicos infinitos, esto es posible hacerlo para ciertas topologías usando funciones de medida.

5. Anexo: Cálculo de las funciones $f_{\mathbb{Z}}$, $\overline{f}$ y r_A en espacios topológicos con 2 y 3 elementos

En esta sección se calculan los valores de las funciones $f_{\mathbb{Z}}, \overline{f}$ y r_A para los diferentes espacios topológicos que se definen sobre un conjunto de 2 y 3 elementos.

Sea $E = \{a, b\}$. Las topologías no isomorfas que se pueden definir sobre E son:

$$\begin{aligned}
\tau_1 &= \{\phi, \{a, b\}\}, \\
\tau_2 &= \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}, \\
\tau_3 &= \{\phi, \{a\}, \{a, b\}\},
\end{aligned}$$

y los valores de las funciones $f_{\mathbb{Z}}, \overline{f}$ y r_A, se calculan a continuación

$f_{\mathbb{Z}}$	τ_1	τ_2	τ_3
ϕ	0	0	0
{a}	1	2	2
{b}	1	2	1
{a,b}	1	3	2

Tabla 1: Cálculo de valores para el polimatroide $f_{\mathbb{Z}} : 2^E \to \mathbb{Z}$, donde $E = \{a, b\}$

$\overline{f}$	τ_1	τ_2	τ_3
ϕ	0	0	0
{a}	2	1	2
{b}	2	1	1
{a,b}	2	2	2

Tabla 2: Cálculo de valores para el polimatroide $\overline{f} : 2^E \to \mathbb{Z}$, donde $E = \{a, b\}$

r_A	τ_1	τ_2	τ_3
ϕ	0	0	0
{a}	$\ln 6$	$\ln 14 - \frac{2}{7}\ln 2$	$\ln 10$
{b}	$\ln 6$	$\ln 14 - \frac{2}{7}\ln 2$	$\ln 10 - \frac{2}{5}\ln 2$
{a,b}	$\ln 6$	$\ln 14$	$\ln 10$

Tabla 3: Cálculo de valores para la función de entropía $r_A : 2^E \to \mathbb{R}$, donde $E = \{a, b\}$

Sea $E = \{a, b, c\}$. Las topologías no isomorfas que se pueden definir sobre E son:

$$\begin{aligned}
\tau_1 &= \{\phi, \{a, b, c\}\}\\
\tau_2 &= \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}\\
\tau_3 &= \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}\\
\tau_4 &= \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}\\
\tau_5 &= \{\phi, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}\\
\tau_6 &= \{\phi, \{a\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}\\
\tau_7 &= \{\phi, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}\\
\tau_8 &= \{\phi, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}\\
\tau_9 &= \{\phi, \{a\}, \{a, b, c\}\}.
\end{aligned}$$

Los valores de las funciones $f_{\mathbb{Z}}, \overline{f}$ y r_A, se muestran a continuación

$f_{\mathbb{Z}}$	τ_1	τ_2	τ_3	τ_4	τ_5	τ_6	τ_7	τ_8	τ_9
ϕ	0	0	0	0	0	0	0	0	0
{a}	1	4	3	3	4	2	3	2	2
{b}	1	4	4	3	2	2	2	2	1
{c}	1	4	2	1	2	2	1	1	1
{a,b}	1	6	5	4	4	3	3	2	2
{a,c}	1	6	4	3	4	3	3	2	2
{b,c}	1	6	4	3	3	2	2	2	1
{a,b,c}	1	7	5	4	4	3	3	2	2

Tabla 4: Cálculo de valores para el polimatroide $f_{\mathbb{Z}} : 2^E \to \mathbb{Z}$, donde $E = \{a, b, c\}$

$\overline{f}$	τ_1	τ_2	τ_3	τ_4	τ_5	τ_6	τ_7	τ_8	τ_9
ϕ	0	0	0	0	0	0	0	0	0
{a}	3	1	1	2	3	1	3	3	3
{b}	3	1	2	2	1	2	2	3	2
{c}	3	1	1	1	1	2	1	1	2
{a,b}	3	2	3	3	3	3	3	3	3
{a,c}	3	2	2	2	3	3	3	3	3
{b,c}	3	2	2	2	2	2	2	3	2
{a,b,c}	3	3	3	3	3	3	3	3	3

Tabla 5: Cálculo de valores para el polimatroide $\overline{f} : 2^E \to \mathbb{Z}$, donde $E = \{a, b, c\}$

r_A	τ_1	τ_2	τ_3	τ_4	τ_5
ϕ	0	0	0	0	0
{a}	$\ln 14$	$\ln 74 - \frac{14}{37}\ln 2$	$\ln 62 - \frac{10}{31}\ln 2$	$\ln 58 - \frac{8}{29}\ln 2$	$\ln 46$
{b}	$\ln 14$	$\ln 74 - \frac{14}{37}\ln 2$	$\ln 62 - \frac{8}{31}\ln 2$	$\ln 58 - \frac{8}{29}\ln 2$	$\ln 46 - \frac{10}{23}\ln 2$
{c}	$\ln 14$	$\ln 74 - \frac{14}{37}\ln 2$	$\ln 62 - \frac{18}{31}\ln 2$	$\ln 58 - \frac{22}{29}\ln 2$	$\ln 46 - \frac{10}{23}\ln 2$
{a,b}	$\ln 14$	$\ln 74 - \frac{4}{37}\ln 2$	$\ln 62$	$\ln 58$	$\ln 46$
{a,c}	$\ln 14$	$\ln 74 - \frac{4}{37}\ln 2$	$\ln 62 - \frac{4}{31}\ln 2$	$\ln 58 - \frac{8}{29}\ln 2$	$\ln 46$
{b,c}	$\ln 14$	$\ln 74 - \frac{4}{37}\ln 2$	$\ln 62 - \frac{8}{31}\ln 2$	$\ln 58 - \frac{8}{29}\ln 2$	$\ln 46 - \frac{4}{23}\ln 2$
{a,b,c}	$\ln 14$	$\ln 74$	$\ln 62$	$\ln 58$	$\ln 46$

r_A	τ_6	τ_7	τ_8	τ_9
ϕ	0	0	0	0
{a}	$\ln 50 - \frac{12}{50}\ln 2$	$\ln 42$	$\ln 26$	$\ln 38 - \frac{8}{19}\ln 2$
{b}	$\ln 50 - \frac{12}{25}\ln 2$	$\ln 42 - \frac{8}{21}\ln 2$	$\ln 26$	$\ln 38 - \frac{12}{19}\ln 2$
{c}	$\ln 50 - \frac{12}{25}\ln 2$	$\ln 42 - \frac{14}{21}\ln 2$	$\ln 26 - \frac{6}{13}\ln 2$	$\ln 38 - \frac{12}{19}\ln 2$
{a,b}	$\ln 50$	$\ln 42$	$\ln 26$	$\ln 38 - \frac{8}{19}\ln 2$
{a,c}	$\ln 50$	$\ln 42$	$\ln 26$	$\ln 38 - \frac{8}{19}\ln 2$
{b,c}	$\ln 50 - \frac{12}{25}\ln 2$	$\ln 42 - \frac{8}{21}\ln 2$	$\ln 26$	$\ln 38 - \frac{12}{19}\ln 2$
{a,b,c}	$\ln 50$	$\ln 42$	$\ln 26$	$\ln 38$

Tabla 6: Cálculo de valores para el polimatroide $r_A : 2^E \to \mathbb{R}$, donde $E = \{a, b, c\}$

Referencias

[1] W. W. Armstrong, *Dependency structures of database relationships*, Information Processing (1974), 580–583.

[2] Satoru Fujishige, *Submodular functions and optimization*, Annals of discrete mathematics, Second edition (2005).

[3] Frantisek Matús, *Abstract functional dependency structures*, **81** (1991), 117–126.

[4] Leonardo Roa L, *Una nueva construcción de los espacios topológicos finitos desde las funciones submodulares*, Tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Ciencias (2012).

[5] Raul E. Varela P, *Fd relaciones*, Tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Ciencias (2011).