La sucesión $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ como generadora de los espacios secuenciales

The sequence $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ as a generator of sequential spaces

José Reinaldo Montañez Puentes[1,a]

En memoria del Professor Carlos Javier Ruiz Salguero

Resumen. Se presenta una forma de generar subcategorías topológicas reflexivas y correflexivas de Top a través de topologías iniciales y finales. En particular, usando la teoría expuesta, se muestra que al considerar la sucesión $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ se genera la categoría de los espacios secuenciales.

Palabras claves: Topologías finales, topologías iniciales, funtor.

Abstract. We present a way to generate reflective and coreflective topological subcategories of Top through initial and final topologies. In particular, using the exposed theory, we show that the category of sequential spaces is generated by considering the sequence $\left\{\frac{1}{n}\right\}$.

Keywords: Final topologies, initial topologies, functor.

Mathematics Subject Classification: 54C05, 54F65, 18B30.

Recibido: junio de 2013 Aceptado: septiembre de 2013

1. Introducción

Construir un espacio óptimo, con características especiales, a partir de un espacio topológico dado, motiva las nociones de subcategorías reflexivas y correflexivas, que expresan nociones de mejoramiento y densidad. Por ejemplo: la categoría de los espacios compactos Hausdorff es una subcategoría reflexiva de la categoría de los espacios completamente regulares. En este caso el proceso de optimización es precisamente la compactificación de Stone - Čech, que define un funtor adjunto a izquierda del funtor de inclusión de los compactos Hausdorff en los completamente regulares. En este como en muchos ejemplos, no solo en la topología sino también en el álgebra, el objeto y su *mejorado* cambian de conjunto subyacente. Al observar la categoría de los espacios topológicos como una categoría de conjuntos con estructura pensamos en lo que significaría mejorar un espacio topológico sin cambiar el conjunto subyacente. Esta idea nos condujo a la noción de *elevador* en la categoría de los espacios topológicos, que se interpreta, de manera intuitiva, como un funtor que asigna a un espacio topológico otro espacio con el mismo conjunto subyacente pero con topología mas fina.

[1]Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia
[a]jrmontanezp@unal.edu.co

El estudio de la teoría de elevadores nos condujo a la creación de un método de construcción de categorías topológicas que resultan subcategorías correflexivas en Top. En este trabajo, partiendo de un espacio topológico arbitrario, se propone un método de construcción de elevadores a través de topologías finales, en particular, resulta interesante mostrar que la categoría de los espacios secuenciales es generada por este método. En la categoría de los espacios secuenciales están entre otros los espacios 1-contables y por lo tanto los espacios métricos, de esta manera dicha categoría contiene a todos los espacios importantes para el trabajo de la topología y el análisis.

Como lo advertimos anteriormente, la teoría de elevadores es motivada desde la topología. Así que las nuevas definiciones y resultados obtenidos y mencionados aquí corresponden en primera instancia a categorías de espacios topológicos. Finalmente, es de anotar que este trabajo toma como base [6] en donde se desarrolla una teoría más general.

2. Conceptos básicos

Con el fin de contextualizar al lector, en esta sección se presentan algunos resultados y conceptos básicos de la topología general y de la teoría de categorías que consideramos necesarios en el desarrollo del trabajo.

2.1. La categoría de los espacios topológicos y su estructura de categoría topológica

El estudio de la topología categórica puede considerarse como el estudio de la generalización del funtor olvido O_e de la categoría de los espacios topológicos Top en la categoría de los conjuntos $Sets$, en particular de las construcciones relacionadas con topologías iniciales y finales que permite dicho funtor. Recordemos estas construcciones, que serán la clave para el desarrollo del trabajo.

Si Y es un conjunto y $\{\mathbf{X}_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos, la topología final para un sumidero $\{f_i : \mathbf{X}_i \to Y\}_{i\in I}$ corresponde a la intersección de la familia $\{A \mid f_i^{-1}(A)$ es abierto en $\mathbf{X}_i\}_{i\in I}$. Dicha construcción verifica la siguiente propiedad universal: para todo espacio topológico $\mathbf{Z}$ y toda función $g : Y \to Z$ tal que gof_i es continua, se tiene que g es continua. [1]

De manera dual se tiene la definición de topología inicial para una fuente. Ahora bien, se puede notar que la construcción de topologías iniciales y finales de familias arbitrarias usa el hecho de que la colección de topologías sobre un conjunto (la fibra) tiene estructura de retículo completo, con el orden inducido por la inclusión. En particular, dada un familia de topologías sobre un conjunto, el ínfimo está dado por la intersección y el supremo por la topología generada por la unión.

Observe que algunos espacios de interés en la topología algebraica se obtienen a partir de topologías finales, como por ejemplo, el cilindro, el toro, la

[1] Para facilitar la comprensión de algunas definiciones y resultados en algunos apartes del trabajo, los objetos y morfismos de una categoría topológica los notaremos en negrilla y su imagen por el funtor los escribiremos sin negrilla. Por ejemplo, en la categoría de los espacios topológicos $\mathbf{f} : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ simboliza una función continua y $f : X \to Y$ su función correspondiente en la categoría de los conjuntos.

cinta de Möbius y la botella de Klein.

Veamos ahora la noción de categoría topológica, que como podremos observar será muy particular debido a los intereses de esta exposición.

2.2. La noción de categoría topológica

Definición 2.1 (Adámek [1])**.** Sea $F : \mathcal{C} \to \mathcal{S}ets$ un funtor. Se dice que F es un funtor topológico y que $\mathcal{C}$ es una categoría topológica, si se cumplen las siguientes condiciones:

(i) F es fiel,

(ii) F es apto para construir estructuras iniciales y finales de fuentes y sumideros unitarios,

(iii) Para cada conjunto X, la fibra $Fib(X)$ tiene estructura de retículo completo.

Como lo acabamos de anotar, esta definición es un poco restrictiva pues $\mathcal{S}ets$ puede reemplazarse por otra categoría. Note que las propiedades (ii) y (iii) generalizan las nociones de topología inicial y final, es decir se definen como estas y con semejantes propiedades universales. La propiedad (iii) captura el hecho de que la colección de topologías sobre cada conjunto tiene estructura de retículo completo con el orden dado por la inclusión. En particular para el caso que nos ocupa, si X es un conjunto, notamos con $Fib(X)$ la colección de los objetos $\mathbf{X}$ de $\mathcal{C}$, tales que $F(\mathbf{X}) = X$. En $Fib(X)$ se define la relación "$\leq$" así: dados $\mathbf{X}_1$ y $\mathbf{X}_2$ en $Fib(X)$, se dice que $\mathbf{X}_1 \leq \mathbf{X}_2$, si y solamente si, existe un morfismo $\mathbf{f} : \mathbf{X}_2 \to \mathbf{X}_1$ tal que $F(\mathbf{f}) = 1_X$. A la pareja $(Fib(X), \leq)$ se le llama la fibra de X y algunas veces se notará simplemente $Fib(X)$. En general la relación "$\leq$" definida en $Fib(X)$ es reflexiva y transitiva, pero note que la exigencia en (iii) es que este orden sea un retículo completo.

Ahora bien, para los propósitos de este trabajo nos interesan solamente las subcategorías de Top, en este sentido, vale la pena advertir que no toda subcategoría incluso plena de Top es una categoría topológica,[2] tal es el caso de la subcategoría plena de Top formada por los espacios de Hausdorff. Con estas ideas en mente podemos pensar a $\mathcal{C}$ como una subcategoría de Top fibrada sobre $Sets$ por medio del funtor olvido y en las propiedades (i) y (ii) como topologías iniciales y finales.

Ejemplo 2.2. Las categorías de los espacios uniformes, espacios secuenciales, pretopológicos y pseudotopológicos son categorías topológicas fibradas sobre la categoría de los conjuntos, ver [1].

[2]Herrlich y Strecker proponen en [1] una definición de funtor topológico que exige la existencia de estructuras iniciales de fuentes arbitrarias. La definición considerada en este trabajo corresponde a una caracterización de funtor topológico. Probar que ésta es una caracterización es un problema propuesto en [1]. En [2] hemos demostrado este resultado, en donde, además hemos relacionado estas nociones con la de constructo topológico dada por Preuss en [9].

2.3. Subcategorías reflexivas y correflexivas

Definición 2.3 (Adámek [1])**.** Sean $\mathcal{C}$ una categoría y $\mathcal{H}$ una subcategoría de $\mathcal{C}$. Se dice que $\mathcal{H}$ es reflexiva en $\mathcal{C}$, si para todo objeto V de $\mathcal{C}$ existe un objeto V^* en H y un morfismo $r_V : V \to V^*$, llamado la reflexión de V, tal que para cualquier objeto U de H y cualquier morfismo $f : V \to U$ existe un único morfismo $f^* : V^* \to U$ tal que $f^* \circ r_V = f$.

Pensando en $\mathcal{H}$ como una subcategoría de $\mathcal{C}$ pero con mejores propiedades, la definición expresa que todo objeto de $\mathcal{C}$ puede ser mejorado por medio de un determinado proceso, que realmente será un funtor, dicho funtor asigna a cada objeto de $\mathcal{C}$ su mejorado en $\mathcal{H}$ con una propiedad universal, además los dos objetos, el de partida y su mejorado, están debidamente relacionados.

Una proposición que caracteriza las categorías reflexivas es la siguiente: H es una subcategoría reflexiva de $\mathcal{C}$, si y solamente si, el funtor de inclusión $I : H \to \mathcal{C}$ admite adjunto a izquierda. De manera dual se tiene la definición de subcategoría correflexiva y su caracterización correspondiente.

Ejemplo 2.4.

1. La categoría de los espacios compactos de Hausdorff es una subcategoría reflexiva de los espacios completamente regulares.
2. La categoría de los espacios métricos es una subcategoría reflexiva de los espacios pseudométricos.
3. La categoría de los espacios completamente regulares es una subcategoría reflexiva de la categoría de los espacios topológicos.

3. Elevadores de estructura en la categoría de los espacios topológicos

Los funtores elevadores de estructura son motivados desde la topología, con un poco mas de precisión, en la búsqueda de endofuntores de Top que respeten las fibras y al mismo tiempo asignen topologías mas finas. En particular, los elevadores idempotentes generan subcategorías topológicas y correflexivas de Top. Ahora bien, haciendo uso de topologías finales, un espacio topológico define un elevador idempotente, teoría que, como se verá en la siguiente sección, permitirá construir la categoría de los espacios secuenciales.

3.1. La noción de elevador de estructura

Definición 3.1. Sea $F : \mathcal{C} \to \mathcal{S}ets$ un funtor topológico y sea $E : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ un funtor. Diremos que E es un elevador de estructura si se satisfacen las siguientes condiciones:

(i) $F \circ E = F$,

(ii) $\mathbf{X} \leq E(\mathbf{X})$ para todo objeto $\mathbf{X}$ de $\mathcal{C}$[3].

[3] A pesar de la sencillez de la noción de elevador de estructura, esta no se encuentra referenciada de manera explícita en la literatura, hasta el conocimiento del autor.

La condición (i) implica, entre otros, que E es un funtor concreto y por lo tanto fiel, además que E respeta las fibras, esto es, $E(\mathbf{X}) \in Fib(X)$ para todo objeto $\mathbf{X}$ de $\mathcal{C}$.

Análogamente se dice que un funtor $C : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ es un coelevador de estructura si $F \circ C = F$ y para todo objeto $\mathbf{X}$ de $\mathcal{C}$ se tiene que $C(\mathbf{X}) \leq \mathbf{X}$.

En adelante, nos referiremos a los funtores elevadores (coelevadores) de estructura simplemente como elevadores (coelevadores).

3.2. Elevadores idempotentes en la categoría de los espacios topológicos y subcategorías generadas

Un funtor E definido en Top se dice idempotente si $E \circ E = E$. Nótese que en tal caso los puntos fijos de E coinciden con su imagen. La subcategoría plena de Top formada por los puntos fijos de E se notará $E(Top)$ y a esta nos referiremos como la subcategoría de Top generada por E.

Como se verá mas adelante los puntos fijos de elevadores y coelevadores idempotentes generan categorías topológicas. Sin embargo, el siguiente teorema que se constituye en uno de los resultados centrales, usa funtores con menos propiedades.

Teorema 3.2. *Sea $E : Top \to Top$ un funtor concreto e idempotente. Entonces, $E(Top)$ es una categoría topológica.*

Demostración. Basta observar que los supremos, ínfimos, topologías iniciales y topologías finales se construyen en Top y luego se trasladan por medio del funtor E a $E(Top)$, ver [6]. $\square$

Puesto que el centro de atención de esta sección es el estudio de los elevadores de estructura definidos en Top, así como las categorías topológicas que estos producen, destacamos como una consecuencia derivada del resultado anterior el siguiente teorema.

Teorema 3.3. *Sea E un elevador concreto e idempotente definido en Top. Entonces:*

(i) $E(Top)$ es una categoría topológica.

(ii) $E(Top)$ es una subcategoría correflexiva de Top.

Demostración. (i) es consecuencia del Teorema 3.2. Una forma de ver (ii) es evidenciando que el funtor E es el adjunto a derecha del funtor de inclusión de $E(Top)$ en Top, sin embargo, aquí presentamos la prueba aplicando la definición. Sea $\mathbf{X}$ un espacio topológico. Puesto que E es elevador, la función identidad $i_{\mathbf{X}} : E(\mathbf{X}) \to \mathbf{X}$ es continua. Sea $\mathbf{Y}$ un espacio de $E(Top)$ y $\mathbf{f} : \mathbf{Y} \to \mathbf{X}$ una función continua. Entonces, puesto que E es un funtor concreto e idempotente, al aplicar E a $\mathbf{f}$ se tiene que $\mathbf{f} : \mathbf{Y} \to E(\mathbf{X})$ es una función continua y claramente verifica la igualdad $i_{\mathbf{X}} \circ \mathbf{f} = \mathbf{f}$. Por lo tanto $E(Top)$ es una subcategoría correflexiva de Top. $\square$

De manera dual se obtienen los resultados para coelevadores idempotentes definidos en Top.

3.3. Elevadores idempotentes generados por espacios topológicos y subcategorías asociadas

Haciendo uso de estructuras finales los espacios topológicos definen elevadores, como se ilustra a continuación.

Sean $\mathbf{W}$ y $\mathbf{X}$ espacios topológicos. En la colección de funciones continuas de $\mathbf{W}$ en $\mathbf{X}$, $[\mathbf{W},\mathbf{X}]_{Top}$, al olvidar la topología de $\mathbf{X}$ se obtiene el sumidero que notamos $S_{(\mathbf{W},\mathbf{X})} = \{f : \mathbf{W} \to X \mid \mathbf{f} \in [\mathbf{W},\mathbf{X}]_{Top}\}$. La estructura final para $S_{(\mathbf{W},\mathbf{X})}$ la notaremos $F_{S_{(\mathbf{W},\mathbf{X})}}$.

Es natural que $F_{S_{(\mathbf{W},\mathbf{X})}}$ resulte un espacio con topología más fina que la de $\mathbf{X}$. Otro detalle a resaltar es que las funciones continuas de $\mathbf{W}$ en $\mathbf{X}$ y de $\mathbf{W}$ en $F_{S_{(\mathbf{W},\mathbf{X})}}$ coinciden. Estos hechos se consideran en los siguientes lemas, los que finalmente van a permitir definir un elevador idempotente a partir de $\mathbf{W}$ haciendo uso de topologías finales.

Lema 3.4. *Sean* $\mathbf{W}$ *y* $\mathbf{X}$ *espacios topológicos. Entonces* $\mathbf{X} \leq F_{S_{(\mathbf{W},\mathbf{X})}}$.

Demostración. Sea $g \in S_{(\mathbf{W},\mathbf{X})}$. Entonces, $\mathbf{g} : \mathbf{W} \to F_{S_{(\mathbf{W},\mathbf{X})}}$ es continua. Ahora, dada la función identidad $i_{\mathbf{X}} : F_{S_{(\mathbf{W},\mathbf{X})}} \to \mathbf{X}$, se tiene que
$\mathbf{g} = i_{\mathbf{X}} \circ g : \mathbf{W} \to \mathbf{X}$ es continua. Entonces, por definición de estructura final para un sumidero, se tiene que la función identidad $\mathbf{i_X} : F_{S_{(\mathbf{W},\mathbf{X})}} \to \mathbf{X}$ es continua. Por lo tanto $\mathbf{X} \leq F_{S_{(\mathbf{W},\mathbf{X})}}$. □

Lema 3.5. *Sean* $\mathbf{W}$ *y* $\mathbf{X}$ *espacios topológicos. Entonces*

$$[\mathbf{W},\mathbf{X}]_{Top} \cong [\mathbf{W}, F_{S_{(\mathbf{W},\mathbf{X})}}]_{Top}.$$

Demostración. Sea $\mathbf{g} \in [\mathbf{W},\mathbf{X}]_{Top}$. Entonces, $\mathbf{g} \in S_{(\mathbf{W},\mathbf{X})}$ lo cual implica que $\mathbf{g} \in [\mathbf{W}, F_{S_{(\mathbf{W},\mathbf{X})}}]_{Top}$.

Ahora, sea $\mathbf{h} \in [\mathbf{W}, F_{S_{(\mathbf{W},\mathbf{X})}}]_{Top}$, por el lema anterior $\mathbf{X} \leq F_{S_{(\mathbf{W},\mathbf{X})}}$, por lo tanto $\mathbf{h} \in [\mathbf{W},\mathbf{X}]_{Top}$. □

Nótese que según el lema, el mecanismo de construir topologías finales, con el proceso antes descrito, es idempotente.

Teorema 3.6. *Sea* W *un espacio topológico. La aplicación* $E_{\mathbf{W}} : Top \to Top$ *definida por* $E_{\mathbf{W}}(\mathbf{X}) := F_{S_{(\mathbf{W},\mathbf{X})}}$ *y* $E_{\mathbf{W}}(\mathbf{f}) := \mathbf{f}$ *define a* $E_{\mathbf{W}}$ *como un elevador idempotente en* Top.

Demostración. (i) Por el Lema 3.4, para cada espacio topológico $\mathbf{X}$, se tiene que $\mathbf{X} \leq E_{\mathbf{W}}(\mathbf{X})$.

(ii) Sea $\mathbf{f} : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ una función continua. Veamos que $\mathbf{f} : E_{\mathbf{W}}(\mathbf{X}) \to E_{\mathbf{W}}(\mathbf{Y})$ es continua. Basta demostrar que para toda $g \in S_{(\mathbf{W},\mathbf{X})}$, la composición $\mathbf{f} \circ \mathbf{g} : \mathbf{W} \to E_{\mathbf{W}}(\mathbf{Y})$ es continua.

Sea $g \in S_{(\mathbf{W},\mathbf{X})}$. Entonces, $\mathbf{g} : \mathbf{W} \to \mathbf{X}$ es continua, luego $\mathbf{f} \circ \mathbf{g} : \mathbf{W} \to \mathbf{Y}$ es continua; de donde $\mathbf{f} \circ \mathbf{g} : \mathbf{W} \to E_{\mathbf{W}}(\mathbf{Y})$ es continua. Entonces, por definición de estructura final para un sumidero, se tiene que la función $\mathbf{f} : E_{\mathbf{W}}(\mathbf{X}) \to E_{\mathbf{W}}(\mathbf{Y})$ es continua.

De (ii) se sigue que $E_{\mathbf{W}}$ es un funtor y por la forma como este se definió se deduce que este es un funtor concreto. Así, de (i) y (ii) se tiene que $E_{\mathbf{W}}$ es un elevador. Para completar la prueba veamos que $E_{\mathbf{W}}$ es idempotente.

Sea $\mathbf{X}$ un espacio topológico. Como consecuencia del Lema 3.5, para cada espacio topológico $\mathbf{X}$, $[\mathbf{W}, E_{\mathbf{W}}(\mathbf{X})]_{Top} \cong [\mathbf{W}, \mathbf{X}]_{Top}$. Entonces, al aplicar $E_{\mathbf{W}}$ a $E_{\mathbf{W}}(\mathbf{X})$ se consideran las funciones continuas de $[\mathbf{W}, \mathbf{X}]_{Top}$. Por lo tanto las topologías finales para los sumideros $S_{(\mathbf{W},\mathbf{X})}$ y $S_{(\mathbf{W},\mathbf{E_W}(\mathbf{X}))}$ coinciden, de donde $E^2_{\mathbf{W}}(\mathbf{X}) = E_{\mathbf{W}}(\mathbf{X})$.

Por lo tanto $E_{\mathbf{W}}$ es un elevador idempotente.

□

Nota 3.7. En primer lugar, cabe anotar que $\mathbf{W}$ es un punto fijo del elevador $E_{\mathbf{W}}$, esto es $E_{\mathbf{W}}(\mathbf{W}) = \mathbf{W}$ y que para todo espacio topológico $\mathbf{X}$ se tiene que $[\mathbf{W}, \mathbf{X}]_{Top} \cong [\mathbf{W}, E_{\mathbf{W}}(\mathbf{X})]_{Top}$. En segundo lugar, puesto que $E_{\mathbf{W}}$ es un elevador idempotente, resaltamos como una consecuencia derivada del Teorema 3.3 que $E_{\mathbf{W}}(Top)$ es una categoría topológica y una subcategoría correflexiva de Top.

De manera dual, haciendo uso de topologías iniciales, un espacio topológico da origen a un coelevador idempotente, obteniéndose los resultados duales a los del Teorema 3.3 [4].

Definición 3.8. Sea F un elevador idempotente definido en Top. Diremos que F es representable si existe un espacio topológico $\mathbf{W}$ tal que $F = E_{\mathbf{W}}$. En tal caso, se dice que $\mathbf{W}$ es un representante de F y que F es representable por $\mathbf{W}$. De manera dual se define coelevador representable.

Observe que si un elevador idempotente es representable, no necesariamente su representante es único. El siguiente teorema, cuya demostración es inmediata, establece que las subcategorías de Top generadas por el método de los elevadores representables pueden ser generadas por varios espacios topológicos.

Teorema 3.9. *Espacios isomorfos generan el mismo elevador representable y por lo tanto la misma categoría topológica.*

Definición 3.10. Sea $\mathcal{C}$ una categoría.

(i) Decimos que $\mathcal{C}$ es representable si $\mathcal{C}$ es una subcategoría de Top y existe un espacio topológico $\mathbf{W}$ tal que $\mathcal{C} = E_{\mathbf{W}}(Top)$.

(ii) Se dice que $\mathcal{C}$ es propiamente representable o simplemente p-representable si existe un espacio topológico $\mathbf{W}$ tal que $\mathcal{C}$ es equivalente a $E_{\mathbf{W}}(Top)$.

Nota 3.11. En general si $\{\mathbf{W}_i\}_{i\in I}$ es una familia de espacios topológicos, es posible determinar un elevador idempotente $E_{(\mathbf{W}_i)}$, el cual se define asociando a cada espacio topológico $\mathbf{X}$ la estructura final para el sumidero $\{f : \mathbf{W}_i \to X \mid \mathbf{f} \in [\mathbf{W}_i, \mathbf{X}]_{Top}\}_{i\in I}$; en funciones continuas el funtor se define por $E_{(\mathbf{W}_i)}(\mathbf{f}) = \mathbf{f}$.

Más aún, con este mismo método, una clase de espacios topológicos $\mathcal{C}$ determina un elevador idempotente $E_{\mathcal{C}}$ en Top. En efecto, puesto que para cada conjunto X la colección de topologías sobre X es un conjunto, para cada espacio topológico $\mathbf{X}$ se determina el conjunto $\{E_{\mathbf{W}}(\mathbf{X}) \mid \mathbf{W} \in \mathcal{C}\}$; $E_{\mathcal{C}}(\mathbf{X})$ corresponde a la intersección de los elementos de este conjunto.

De manera dual se obtienen los resultados para coelevadores definidos en Top.

[4]Otros trabajos que relacionan subcategorías generadas a través de topologías iniciales y temas afines, han sido publicados por A. Oostra en [7] y [8].

Ejemplos 3.12.

1. Consideremos $\mathbb{N}_* = \{0, 1, 1/2, \ldots, 1/n, \ldots\}$ como subespacio del conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ con su topología usual. La categoría $E_{\mathbb{N}_*}(Top)$ corresponde a la categoría de los espacios secuenciales, ejemplo que será tratado en detalle en la siguiente sección.

2. Consideremos el espacio de Sierpinski $\mathbf{S} = (S, \tau)$ donde $S = \{0, 1\}$ y $\tau = \{\emptyset, \{0, 1\}, \{1\}\}$. Entonces $C_{\mathbf{S}}(Top) = Top$. Por lo tanto el funtor identidad de Top es representable, de lo cual se sigue que Top es una categoría co-representable.

3. Sea $\mathcal{C}$ la clase de los espacios compactos. La categoría de los k-espacios corresponde a la categoría generada por el elevador determinado por $\mathcal{C}$ en Top.

4. Sea $\mathcal{A}$ la clase de los espacios compactos de Haussdorff. La categoría de los espacios de Kelley corresponde a la categoría generada por el elevador determinado por $\mathcal{A}$ en Top.

5. Sea I el intervalo $[0, 1]$ con su topología usual. La categoría $C_I(Top)$ corresponde a la categoría de los espacios completamente regulares.

6. La categoría de los espacios de proximidad $Prox$ es isomorfa a la categoría de los espacios completamente regulares, ver [10]. Por lo tanto $Prox$ es una categoría p-co-representable.

7. La categoría de los espacios uniformes $Unif$ es isomorfa a la categoría de los espacios completamente regulares, ver por ejemplo [10]. Por lo tanto $Unif$ es una categoría p-co-representable.

Los ejemplos 2, 3 y 4 se siguen directamente de la definiciones de elevador, coelevador y de los espacios involucrados, por su parte, 5 se sigue de la caracterización de los espacios completamente regulares dada en [10].

4. La categoría de los espacios secuenciales como categoría representable

En esta sección se demuestra que la categoría de los espacios secuenciales es representable por el espacio $\mathbb{N}_* = \{0, 1, 1/2, \ldots, 1/n, \ldots\}$. Es de anotar que la prueba no será del todo directa, pues para tal fin usaremos el espacio $\mathbb{N}_\infty$, que es isomorfo al anterior, siendo este último el compactado de Alexandroff del espacio de los números naturales con la topología discreta.

Recalcamos que dentro de los espacios secuenciales se encuentran espacios importantes para el trabajo del análisis y de la topología. Los espacios 1-contables, en particular los espacios métricos son secuenciales, ver por ejemplo [5] y [10].

Definición 4.1 (Willard [10])**.** Sea $(\mathbf{X}, \tau)$ un espacio topológico de Hausdorff, no compacto y localmente compacto. Sea $\mathbf{X}_\infty = \mathbf{X} \cup \{\infty\}$, donde $\infty \notin \mathbf{X}$.

El compactado de Alexandroff sobre $\mathbf{X}$ se define como el espacio $\mathbf{X}_\infty$ cuya topología $\tau_{\mathbf{X}_\infty}$ está dada por

$$\tau_{\mathbf{X}_\infty} := \tau \cup \{(\mathbf{X} - \mathbf{K}) \cup \{\infty\} \mid \mathbf{K} \text{ es compacto y cerrado en } \tau\}.$$

Consideremos el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ con la topología discreta. En tal caso, puesto que todo subconjunto $\mathbf{K}$ de $\mathbb{N}$ es cerrado, se tiene que $\mathbf{K}$ es finito, si y solo si, $\mathbf{K}$ es compacto. Por lo tanto,

$$\tau_{\mathbb{N}_\infty} = P(\mathbb{N}) \cup \{(\mathbb{N} - \mathbf{K}) \cup \{\infty\} \mid K \text{ es finito}\}.$$

Nótese que $(\mathbb{N}_\infty, \tau_{\mathbb{N}_\infty})$ es homeomorfo al espacio $\mathbb{N}_* = \{0, 1, 1/2, \ldots, 1/n, \ldots\}$ como subespacio de $\mathbb{R}$.

Definición 4.2 (Franklin [3])**.** Se dice que un espacio X es secuencial, si cada subconjunto secuencialmente abierto de X es abierto. Un subconjunto $A \subseteq X$ es secuencialmente abierto si cada sucesión en X que converge a un punto de A está eventualmente en A, en otras palabras, por fuera de A solo hay un número finito de términos de la sucesión.

Proposición 4.3. *Sea $\mathbf{X}$ un espacio topológico. Una función $s : \mathbb{N}_\infty \longrightarrow \mathbf{X}$ es continua, si y solamente si, la sucesión $s : \mathbb{N} \to \mathbf{X}$ es convergente a $s(\infty)$.*

Demostración. Supongamos que $\mathbf{s} : \mathbb{N}_\infty \to \mathbf{X}$ es una función continua. Sea $\mathbf{s}(\infty) = x_0$. Veamos que la sucesión $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbf{X}$ converge a x_0. Sea A abierto en $\mathbf{X}$ tal que $x_0 \in A$. Entonces, puesto que $\mathbf{s} : \mathbb{N}_\infty \longrightarrow \mathbf{X}$ es continua, $\mathbf{s}^{-1}(A)$ es abierto en $\mathbb{N}_\infty$ y su complemento es finito. Por lo tanto la sucesión $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbf{X}$ converge a x_0.

Recíprocamente, consideremos $s : \mathbb{N}_\infty \longrightarrow \mathbf{X}$ una función tal que la sucesión $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbf{X}$ es convergente a $s(\infty)$. Supongamos que $s(\infty) = x_0$. Sea A un abierto de X. Si $x_0 \notin A$, entonces $s^{-1}(A)$ no contiene a ∞ y por lo tanto $s^{-1}(A) \subseteq \mathbb{N}$, de donde $s^{-1}(A)$ es abierto en $\mathbb{N}_\infty$. Si $x_0 \in A$, entonces, ya que la sucesión $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbf{X}$ converge a x_0, $s^{-1}(A)$ contiene a ∞ y su complemento es finito, luego $s^{-1}(A)$ es abierto en $\mathbb{N}_\infty$. Por lo tanto $\mathbf{s} : \mathbb{N}_\infty \longrightarrow \mathbf{X}$ es continua. $\square$

Proposición 4.4. *La subcategoría plena de Top formada por los espacios secuenciales corresponde a la categoría $E_{\mathbb{N}_\infty}(Top)$.*

Demostración. Sea $\mathbf{X} \in E_{\mathbb{N}_\infty}(Top)$. Veamos que $\mathbf{X}$ es secuencial. Sea $A \subseteq \mathbf{X}$, A secuencialmente abierto. Sea F el conjunto de funciones continuas de $\mathbb{N}_\infty$ en $\mathbf{X}$ y S el conjunto de funciones continuas de $\mathbb{N}_\infty$ en $\mathbf{X}$ determinadas por las sucesiones convergentes de $\mathbf{X}$ a elementos de A. Entonces $\mathbf{f}^{-1}(A)$ es finito y $\infty \notin \mathbf{f}^{-1}(A)$ para toda $\mathbf{f} \in S$, lo cual significa que $\mathbf{f}^{-1}(A) \subseteq \mathbb{N}$ y por lo tanto $\mathbf{f}^{-1}(A)$ es abierto en $\mathbb{N}_\infty$. Ahora, $\infty \notin \mathbf{f}^{-1}(A)$ y $\mathbf{f}^{-1}(A)^c$ es finito para toda $\mathbf{f} \in F - S$, luego $\mathbf{f}^{-1}(A)$ es abierto en $\mathbb{N}_\infty$. Entonces para toda $\mathbf{f} \in F$, $\mathbf{f}(A)$ es abierto en $\mathbb{N}_\infty$ y por la forma como se construye la estructura final para el sumidero determinado por F, se sigue que A es abierto en $\mathbb{N}_\infty$, que era lo que se quería demostrar.

Sea ahora $\mathbf{X}$ un espacio secuencial, veamos que $\mathbf{X} \in E_{\mathbb{N}_\infty}(Top)$. Para esto, supongamos que $E_{\mathbb{N}_\infty}(\mathbf{X}) = \overline{\mathbf{X}}$ y veamos que $\overline{\mathbf{X}} = \mathbf{X}$. Puesto que $E_{\mathbb{N}_\infty}$ es elevador $\mathbf{X} \subseteq \overline{\mathbf{X}}$, luego resta probar que $\overline{\mathbf{X}} \subseteq \mathbf{X}$. Sea A abierto en $\overline{\mathbf{X}}$. Nuevamente, sean F el conjunto de funciones continuas de $\mathbb{N}_\infty$ en $\mathbf{X}$ y S el conjunto de funciones continuas de $\mathbb{N}_\infty$ en $\mathbf{X}$ determinadas por las sucesiones convergentes de $\mathbf{X}$ a elementos de A. Entonces, puesto que F también corresponde al conjunto de funciones de $\mathbb{N}_\infty$ en $\overline{\mathbf{X}}$, se tiene que para toda $\mathbf{f} \in F$, con $\mathbf{f} : \mathbb{N}_\infty \longrightarrow \overline{\mathbf{X}}$, $\mathbf{f}^{-1}(A)$ es abierto en $\mathbb{N}_\infty$; pero también considerando a $\mathbf{f} : \mathbb{N}_\infty \longrightarrow \mathbf{X}$, $\mathbf{f}^{-1}(A)$ es abierto en $\mathbb{N}_\infty$. Entonces en este último caso, si $\mathbf{f} \in S$, entonces $\mathbf{f}(\infty) \in A$ y como $\mathbf{f}^{-1}(A)$ es abierto en $\mathbb{N}_\infty$, $\infty \in \mathbf{f}^{-1}(A)$ y $\mathbf{f}^{-1}(A)^c$ es finito, lo cual implica que A contiene casi todos los términos de cada sucesión $\mathbf{f}$ convergente en $\mathbf{X}$ a elementos de A. Por lo tanto A es un subconjunto secuencialmente abierto de $\mathbf{X}$ y como $\mathbf{X}$ es secuencial se tiene que A es abierto en $\mathbf{X}$. $\square$

Corolario 4.5. *La categoría de los espacios secuenciales es una categoría representable.*

Corolario 4.6. *La categoría de los espacios secuenciales es una categoría topológica y una subcategoría correflexiva de Top.*

Corolario 4.7. *La categoría de los espacios secuenciales es generada por el espacio* $\mathbb{N}_* = \{0, 1, 1/2, \ldots, 1/n, \ldots\}$.

A continuación se señalan algunas propiedades de los espacios secuenciales. Puesto que la categoría $E_{\mathbb{N}_\infty}(Top)$ es topológica, y fibrada sobre la categoría de los conjuntos, resulta completa y cocompleta. Sin embargo, $E_{\mathbb{N}_\infty}(Top)$ no es cerrada para la formación de productos, ver [3]; en otras palabras, el producto de espacios secuenciales en $E_{\mathbb{N}_\infty}(Top)$ no necesariamente corresponde al producto realizado en Top. Aquí lo que se quiere expresar es que al hacer el producto en Top de dos espacios secuenciales, en general este no resulta espacio secuencial, pero al aplicar el funtor $E_{\mathbb{N}_\infty}$ a dicho producto este corresponde al producto en $E_{\mathbb{N}_\infty}(Top)$. Entonces, en general los límites en $E_{\mathbb{N}_\infty}(Top)$ no coinciden con los de Top. Para calcular los límites en $E_{\mathbb{N}_\infty}(Top)$, estos se calculan primero en Top y luego se les aplica el funtor $E_{\mathbb{N}_\infty}$, por lo tanto, en general el espacio topológico correspondiente a un límite en $E_{\mathbb{N}_\infty}(Top)$ tiene una topología más fina que el correspondiente en Top. Los colímites en $E_{\mathbb{N}_\infty}(Top)$ se calculan de la misma forma que sus límites, pero en este caso coinciden con los de Top.

La categoría de los espacios secuenciales es cartesiana cerrada, ver [4]. Es importante resaltar este hecho pues Top no lo es.

La categoría $E_{\mathbb{N}_\infty}(Top)$ no es cerrada para la formación de subespacios, esto es, un subespacio de un espacio secuencial no necesariamente es secuencial, pero un subespacio abierto o cerrado de un espacio secuencial es secuencial, hecho observado en [3].

La propiedad de ser secuencial es heredada por cocientes, ver [3]. Inversamente, en [3] se muestra que cada espacio secuencial es cociente de un espacio metrizable.

5. Agradecimientos

Agradezco al Profesor Ruiz las sugerencias para la elaboración de este trabajo, el cual fue presentado en el Encuentro de Topología celebrado en su memoria en el mes de noviembre de 2012 en la Universidad Nacional de Colombia.

Referencias

[1] J. Adámek, H. Herrlich, and G. Strecker, *Abstract and concrete categories*, John Wiley and Sons Inc., 1990.

[2] V. Ardila, R. Montañez, and C. Ruiz, *Nociones equivalentes de categorías topológicas*, Boletín de Matemáticas. Nueva serie. **1** (2000), 19–27.

[3] S. P. Franklin, *Spaces in which sequences suffice*, Fundamenta Mathematicae **57** (1965), no. 1, 107–115.

[4] A. Frölicher and A. Kriegl, *Linear spaces and differentiation theory*, vol. 23, Wiley Interscience Publication, 1988.

[5] J. L. Kelley and M.H. Stone, *General topology*, vol. 233, van Nostrand Princeton, 1955.

[6] R. Montañez and C. Ruiz, *Elevadores de estructura*, Boletín de Matemáticas (2006), 111–135.

[7] A. Oostra, *Subcategorías generadas mediante estructuras iniciales*, Lecturas Matemáticas **16** (1995), 63–72.

[8] ______, *The uniformizable spaces are generated by the real numbers*, Annals of the New York Academy of Sciences **767** (1995), no. 1, 165–167.

[9] G. Preuss and A. Behling, *Theory of topological structures: an approach to categorical topology*, D. Reidel Publishing Company, 1988.

[10] S. Willard, *General topology*, 1970.