

Superficies con curvatura media constante

Óscar M. Perdomo¹

*Central Connecticut State University,
New Britain, CT USA*

En 1841 Delaunay encontró una forma de construir todas las superficies de revolución con curvatura media constante haciendo rodar cónicas en una línea. En el 2010 y el 2011 el autor encontró una forma similar de construir todas las superficies helicoidales con curvatura media constante. En este artículo explicaremos y compararemos ambas construcciones.

Palabras claves: curvatura media constante, superficies, TreadmillSlead, Delaunay, superficies de revolución, superficies helicoidales.

In 1841 Delaunay found a way to construct every constant mean curvature surface of revolution using the rolling of a conic on a line. In 2010 and 2011 the author found a similar construction for every helicoidal constant mean curvature surface. In this paper we will explain and compare both constructions.

Keywords: Constant mean curvature, surfaces, TreadmillSlead, Delaunay, surfaces of revolution, helicoidal surfaces.

MSC: 53C42, 53A10.

¹ perdomoosm@mail.ccsu.edu

1 Introducción

Los problemas de optimización aparecen de manera muy natural y un ejemplo es el siguiente: Supongamos que deseamos encerrar un área de 16 cm^2 con una curva cerrada. Un rectángulo con lados 2 cm y 8 cm o un cuadrado con lado 4 cm son parte de las infinitas posibilidades. Supongamos que deseamos optimizar el perímetro de la curva que realiza este trabajo. ¿Cuál es la curva que debemos utilizar? La curva cerrada con menor perímetro que encierra un área de 16 cm^2 es un círculo con radio $\frac{4}{\sqrt{\pi}}$. Para cada trozo de curva, la curvatura nos brinda una forma de decidir si este trozo está haciendo un buen trabajo resolviendo el problema de optimización. Recordemos que dado un punto en una curva regular, la curvatura es el recíproco del radio del círculo que mejor aproxima a la curva en el punto; ver figura 1.1.

Para el problema de optimización de arriba tenemos el siguiente resultado local.

Si la curvatura de una curva cambia, esta curva no es solución del problema.

El problema anterior lo podemos generalizar para el caso de superficies de la siguiente manera. *Hallar la superficie cerrada con menor área que encierra un volumen de $V_0 \text{ cm}^3$.* De una manera similar al caso anterior, la solución es una esfera de radio $\sqrt[3]{\frac{3V_0}{4\pi}}$. Una vez más tenemos el siguiente resultado local del problema.

Si la curvatura de una superficie cambia, esta superficie no es solución del problema.

Recordemos que la curvatura de una superficie puede definirse como el promedio de las curvaturas de dos curvas planas. Para cada vector no nulo v en el espacio tangente de la superficie en el punto P , pensemos en el plano $\Pi(v)$ perpendicular al espacio tangente y que contiene a la línea que pasa por P con vector velocidad v . Este plano intersecta a la superficie en una curva $C(v)$; véase la figura 1.2. Notemos que aunque la curva $C(v)$ está en el espacio, la curva es plana porque está contenida en el plano $\Pi(v)$. Como lo explicamos anteriormente, a cada una de estas curvas le podemos calcular la curvatura en el punto P . El promedio de la curvatura mayor con la menor es la curvatura media de la superficie. En esta definición debemos permitir curvaturas negativas para las curvas. Al respecto sólo diremos que las curvaturas de dos de estas curvas tienen

signo opuesto si los centros de los círculos que mejor las aproximan están en lados opuestos del plano tangente.

Pensemos por un momento en el siguiente problema típico de cálculo: Hallar el mínimo de la función $f(x) = x^4 - 11x^3 + 28x^2 - 12x$. Este problema se resuelve usando el siguiente resultado.

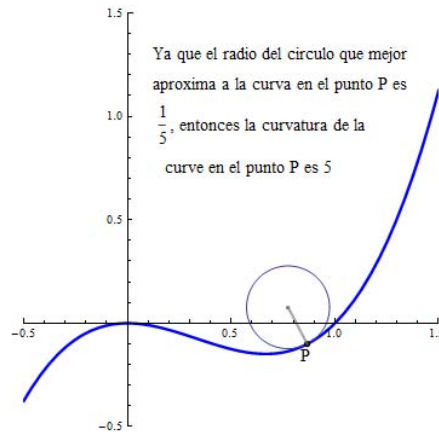


Figura 1.1. La curvatura de una curva es el recíproco del radio que mejor aproxima a la curva.

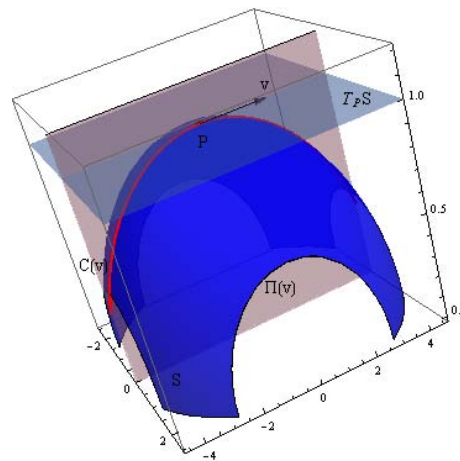


Figura 1.2. La curvatura media de una superficie es un promedio de las curvaturas de dos curvas contenidas en la superficie.

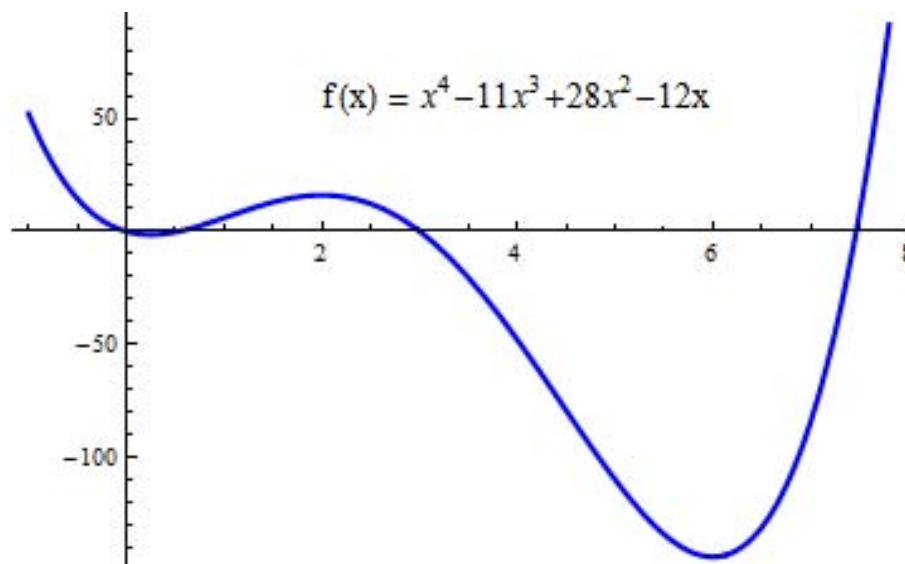


Figura 1.3. Los puntos críticos reducen los problemas de optimización.

Si $f'(x)$ no es cero, entonces x no es una mínimo de la función.

Ya que $f'(x) = (4x - 1)(x - 2)(x - 6)$, concluimos que si f tiene un mínimo, este debe ser $x = \frac{1}{4}$, $x = 2$ o $x = 6$. No es difícil decidir que en este caso la solución es $x = 6$.

Con la idea de comparar estos dos problemas llamemos al problema de encontrar la superficie con menor área que encierre un volumen V_0 el problema A y al problema de hallar el mínimo de la función $f(x)$ el problema B . Tenemos que

- El dominio de la función a optimizar en el problema B son los números reales y el dominio de la función a optimizar en el problema A es un conjunto de superficies.
- El codominio en ambos problemas son los números reales.
- En el problema B , la función a optimizar es la función $f(x)$. En el problema A la función a optimizar es la función $A(S)$ igual al área de la superficie S .

- En el problema B , el problema se reduce a analizar los números $x = \frac{1}{4}$, $x = 2$ y $x = 6$. Estos puntos son llamados los puntos críticos de la función $f(x)$. En el problema A , el problema se reduce a analizar las superficies con curvatura media constante. Llamaremos a estas superficies los puntos críticos del problema A .

2 Interpretaciones

Una de las primeras cosas que descubrimos cuando empezamos a aprender cálculo es el hecho de que encontrar derivadas es relativamente fácil mientras que encontrar integrales es en general difícil —a no ser que estemos intentando resolver las pocas integrales típicas para las cuales existe un método bien definido—. Las integrales pueden verse como los ejemplos más básicos de ecuaciones diferenciales. Recordemos que a diferencia de una ecuación de la forma $3x + 2 = 4$ o $x^2 - 3x - 5 = 0$ en donde la solución, si existe, son algunos números reales. En una ecuación diferencial la solución, si existe, son algunas funciones. Así como la ecuación donde buscamos números involucra una variable x , una ecuación diferencial involucra las variables $f(x)$, x y la variable que no puede faltar, $f'(x)$ o alguna otra derivada de orden superior. Ya que en general es difícil encontrar integrales o resolver ecuaciones diferenciales explícitamente, una forma de entender la solución es encontrando una interpretación geométrica que la describa. Veamos un ejemplo sencillo. Pensemos en resolver la integral

$$\int \sqrt{4 \cos^2(t) + \sin^2(t)} dt,$$

o, equivalentemente, pensemos en encontrar la solución de la ecuación diferencial

$$f'(t) = \sqrt{4 \cos^2(t) + \sin^2(t)},$$

con $f(0) = 0$. A pesar de que no hay una expresión explícita en términos de funciones básicas — $\sin(t)$, $\cos(t)$, t , $\ln(t)$, e^t etc.— la siguiente interpretación geométrica nos permite entender la función solución de la ecuación diferencial. Consideremos la elipse $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$. Podemos verificar si t está entre 0 y 2π , entonces el punto $B = (2 \cos(t), \sin(t))$ es un punto en esta elipse, en particular, el punto $A = (2, 0)$ también está en la elipse.

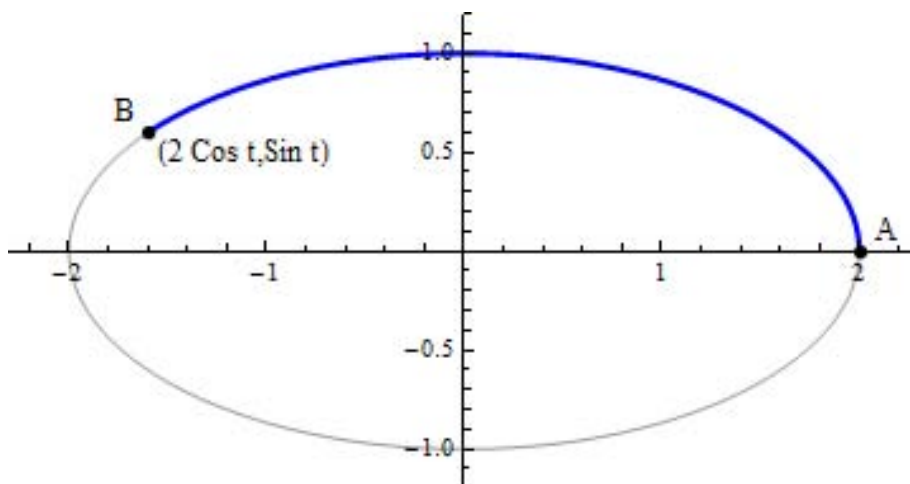


Figura 2.1. Interpretación de la función

$$f(t) = \int_0^t \sqrt{4 \cos^2(\tau) + \sin^2(\tau)} d\tau .$$

Se tiene que si llamamos $f(t)$ a la distancia a lo largo de la elipse (en el sentido contrario a las manecillas del reloj), desde el punto A hasta el punto B , entonces $f(t)$ es la solución de la ecuación diferencial que estamos analizando; ver figura 2.1.

Nótese que a pesar de no tener una expresión explícita para la función f , su interpretación geométrica nos permite decir alguna de sus propiedades. Por ejemplo, si $\ell = f(2\pi)$ es el perímetro de la elipse (ℓ es aproximadamente 9.69), entonces se tiene que $f(t) - \frac{\ell}{2\pi} t$ es una función periódica.

Como veremos luego, podríamos decir que la idea principal de este artículo es la de mostrar interpretaciones geométricas para ciertos sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias.

3 Superficies de revolución

Una superficie de revolución es la superficie que se forma al rotar sobre el eje y una curva contenida en el plano $y - z$. Más precisamente, si tomamos la curva $\alpha(t) = (0, y(s), z(s))$ definida en el intervalo (a, b) , la superficie de revolución generada por esta curva, es la superficie

$$\phi(s, t) = (z(s) \sin(t), y(s), z(s) \cos(t)), \quad (3.1)$$

donde $a < s < b$ y $0 \leq t \leq 2\pi$. Llamaremos a la curva $\alpha(t)$ la *curva generadora* de la superficie de revolución; ver figura 3.1 En general para evitar singularidades de la superficie, supondremos que $z(s) > 0$.

Para cada número real s , pensemos en la rotación

$$R_s(x, y, z) = (x \cos(s) + z \sin(s), y, z \cos(s) - x \sin(s)).$$

En la figura 3.2 vemos el efecto de R_s cuando $s = \frac{\pi}{4}$. La rotación envía el punto A en el punto B y también envía la superficie S_1 en la superficie S_2 .

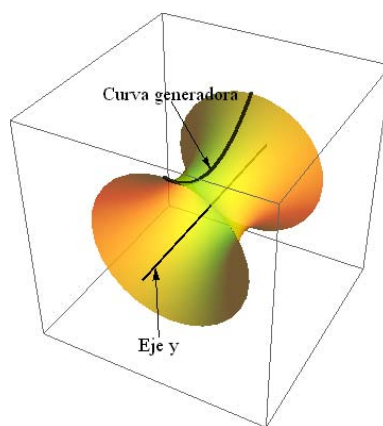


Figura 3.1. Para conocer una superficie de revolución basta conocer su curva generadora.

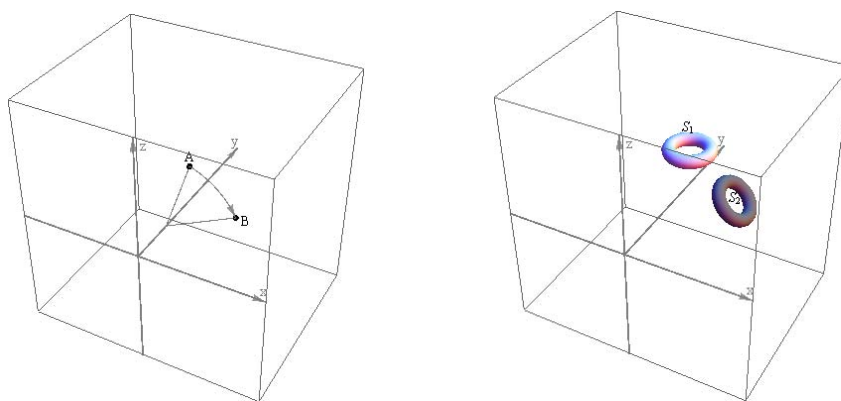


Figura 3.2. Así actúa una rotación. Podemos formar un grupo uniparamétrico con isometrías de este tipo.

Si Σ es una superficie de revolución, fácilmente podemos verificar que para cualquier s , se tiene que $R_s(\Sigma) = \Sigma$. De esta manera podemos decir que las superficies de revolución son aquellas invariantes bajo el grupo uniparamétrico de isometrías $\{R_s\}_{s \in \mathbb{R}}$. La razón por la cual llamamos a este conjunto un grupo es porque satisface las siguientes propiedades,

$$\begin{aligned} R_0(x, y, z) &= (x, y, z), \\ R_{s_1} \circ R_{s_2} &= R_{s_1+s_2}, \end{aligned}$$

para todo s_1 y s_2 .

4 Superficies helicoidales

No es difícil darse cuenta que una superficie de revolución se puede ver como una unión de círculos de la forma $(r \cos(t), a, r \sin(t))$ con $0 \leq t < 2\pi$. Dado un número fijo $w > 0$, una hélice es una curva de la forma

$$\gamma(t) = (r \cos(wt), a + t, r \sin(wt)),$$

donde $-\infty < t < \infty$. Una superficie helicoidal Σ_w , puede verse como una unión de hélices. Más precisamente, si tomamos la curva $\alpha(t) = (x(s), 0, z(s))$ definida en el intervalo (a, b) , la superficie helicoidal generada por esta curva es la superficie

$$\phi(s, t) = (x(s) \cos(wt) + z(s) \sin(wt), t, z(s) \cos(wt) - x(s) \sin(wt)),$$

donde $a < s < b$, $-\infty < t < \infty$. Llamaremos a la curva $\alpha(t)$ la *curva generadora* de la superficie helicoidal; ver figura 4.1.

Pensando en $w > 0$ como un número fijo, para cada número real s , pensemos en la siguiente isometría de \mathbb{R}^3

$$R_s^w(x, y, z) = (x \cos(ws) + z \sin(ws), y + t, z \cos(ws) - x \sin(ws)),$$

Tomando $w = 1$, la figura 4.2 muestra el efecto de R_s cuando $s = \frac{5\pi}{4}$. Esta isometría envía el punto A en el punto B y también envía la superficie S_1 en la superficie S_2 .

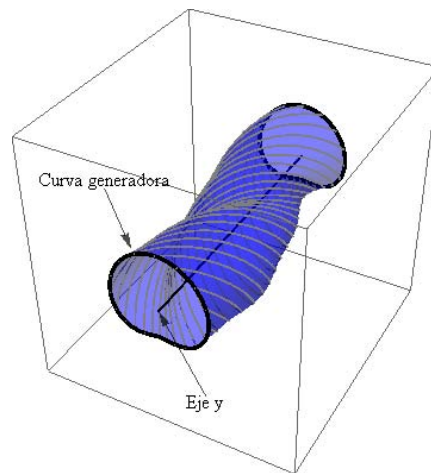


Figura 4.1. Toda superficie helicoidal queda determinada por su curva generadora.

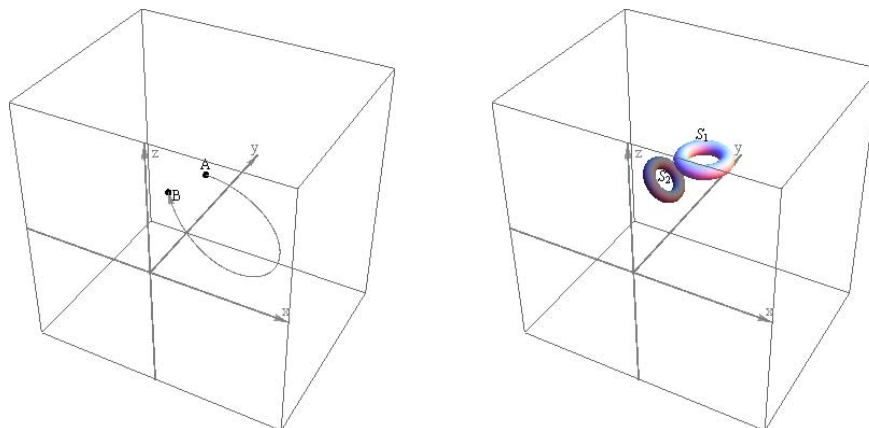


Figura 4.2. Manera cómo actúa una rotación seguida de una translación. Podemos formar un grupo uniparamétrico con isometrías de este tipo.

Si Σ es una superficie helicoidal, fácilmente podemos verificar que para cualquier s , se tiene que $R_s^w(\Sigma) = \Sigma$. De esta manera podemos decir que las superficies de revolución son aquellas invariantes bajo el grupo uniparamétrico de isometrías $\{R_s^w\}_{s \in \mathbb{R}}$. La razón por la cual llamamos a este conjunto un grupo es porque satisface las siguientes propiedades,

$$\begin{aligned} R_0^w(x, y, z) &= (x, y, z), \\ R_{s_1}^w \circ R_{s_2}^w &= R_{s_1+s_2}^w, \end{aligned}$$

para todo s_1 y s_2 .

5 La ecuación $H = \text{constante}$

Localmente toda superficie puede describirse con dos parámetros, por ejemplo, la esfera podría describirse con la latitud y la longitud, un plano con coordenadas cartesianas x e y o con coordenadas polares r y θ . En general tenemos que localmente toda superficie en el espacio euclidiano se describe con tres funciones $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ que dependen de dos parámetros. Más precisamente la superficie se describe con la función

$$\phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)),$$

con (u, v) variando en un abierto de \mathbb{R}^2 . La curvatura media de la superficie en el punto $\phi(u, v)$ puede calcularse de la siguiente forma realizando algunas derivadas parciales, sumas, multiplicaciones y divisiones con las funciones $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$. Dada una función $f(u, v)$ denotaremos por f_u y f_v las derivadas parciales con respecto a u y v respectivamente. Dados dos vectores v y w en \mathbb{R}^3 denotaremos $v \cdot w$ al producto interno o producto escalar de v y w y $v \times w$ al producto cruz o producto vectorial de v y w . Con esta notación tenemos que la curvatura media de la superficie es

$$H = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2},$$

donde

$$\begin{aligned} E &= \phi_u \cdot \phi_u, \\ F &= \phi_u \cdot \phi_v, \\ G &= \phi_v \cdot \phi_v, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} e &= \phi_{uu} \cdot \nu, \\ f &= \phi_{uv} \cdot \nu, \\ g &= \phi_{vv} \cdot \nu, \end{aligned}$$

con

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \phi_u \times \phi_v.$$

Cuando pensamos en el problema de encontrar todas las superficies de revolución con curvatura media constante, lo primero que notamos ya que toda superficie de revolución queda completamente determinada por su curva generadora $\alpha(s) = (x(s), y(s))$, es que el problema se reduce a encontrar las funciones $x(s)$ y $y(s)$. Toda curva regular se puede reparametrizar por medio de su longitud de arco. Esto sencillamente quiere decir que sin pérdida de generalidad podemos suponer que $x'(s)^2 + y'(s)^2 = 1$. Bajo este supuesto, tenemos que una superficie de revolución parametrizada por (3.1) tiene curvatura media constante H si y sólo si su curva generadora satisface

$$\begin{aligned} \frac{y'[s]}{z[s]} + z'[s]y''[s] - y'[s]z''[s] &= 2H, \\ x'[s]^2 + z'[s]^2 &= 1. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Un cálculo directo muestra que para todo $r > 0$, $y(s) = r \cos(\frac{s}{r})$ y $z(s) = r \sin(\frac{s}{r})$ con $H = -\frac{1}{r}$ es una solución del sistema (5.1). Estas soluciones corresponden a las esferas. También podemos verificar que para todo $r > 0$, $y(s) = s$ y $z(s) = r$ con $H = \frac{1}{2r}$ es una solución del sistema (5.1). Estas soluciones corresponden a los cilindros.

Nótese que a pesar de que en general la curvatura media de una superficie depende de los dos parámetros usados para describir la superficie, en este caso no es una sorpresa que la expresión para H dependa sólo del parámetro s . La razón por la cual la curvatura media no depende del parámetro t es porque la superficie es invariante bajo el grupo uniparamétrico de isometrías R_t .

De manera similar tenemos que $\alpha(s) = (y(s), z(s))$ es la curva generadora de una superficie helicoidal con curvatura media constante H si y sólo si

$$\frac{x'[s](z''[s] + w^2(z[s] + (x[s]^2 + z[s]^2)z''[s])) - z'[s](x''[s] + w^2(x[s] + (x[s]^2 + z[s]^2)x''[s]))}{(1 + w^2(z'[s]^2(z[s]^2 - x[s]^2) + 2x[s]z[s]x'[s]z'[s] + x[s]^2))^{3/2}} = 2H,$$

$$x'[s]^2 + z'[s]^2 = 1. \quad (5.2)$$

Un cálculo directo muestra que para todo $r > 0$, $x(s) = r \cos(\frac{s}{r})$ y $z(s) = r \sin(\frac{s}{r})$ con $H = \frac{1}{2r}$ es una solución del sistema (5.2). Estas soluciones corresponden a los cilindros.

El objetivo de este artículo es mostrar interpretaciones geométricas de los dos sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias (5.1) y (5.2). Las soluciones de estos dos sistemas describen todas las superficies con curvatura media constante que son invariantes bajo un grupo uniparamétrico de isometrías en el espacio Euclidiano.

6 Superficies de Delaunay

Delaunay encontró la siguiente forma de describir la curvas generadora de todas la superficies con curvatura media constante. Los siguientes 3 teoremas explican la interpretación dada por Delaunay al sistema (5.1).

Teorema 6.1. Delaunay [1] *Sean a y b dos números reales positivos con $a > b$. Si colocamos la elipse $\frac{z^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ en el plano $y-z$ y la rotamos a lo largo del eje y , entonces cada foco trazará la curva generadora de una superficie de revolución con curvatura media constante $H = \frac{1}{2a}$.*

Las superficies de revolución con curvatura media constante generadas por una elipse son llamadas *Unduloides*; ver figuras 6.1 y 6.2.

Observación 6.2. *El hecho de que la elipse sea una curva cerrada nos permite definir “un pedazo fundamental del Unduloide” como un pedazo generado por una rotación de la elipse. Es claro que dos pedazos fundamentales difieren sólo por una traslación y como una consecuencia se tiene que los unduloides son invariantes bajo el grupo discreto de isometrías de la forma $\{F(x, y, z) = (x, y + kn, z)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ donde k es una constante que depende de la elipse usada y se ve ilustrado en la figura 6.3.*

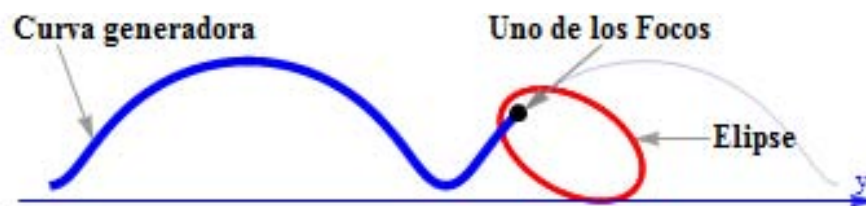


Figura 6.1. Si hacemos rodar una elipse en una línea, su foco trazará la curva generadora de una superficie con curvatura media constante.

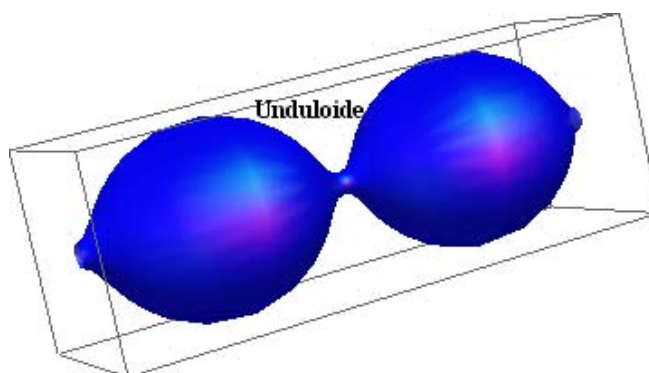


Figura 6.2. La curva generadora de esta superficie con curvatura media constante fue construida usando una elipse.

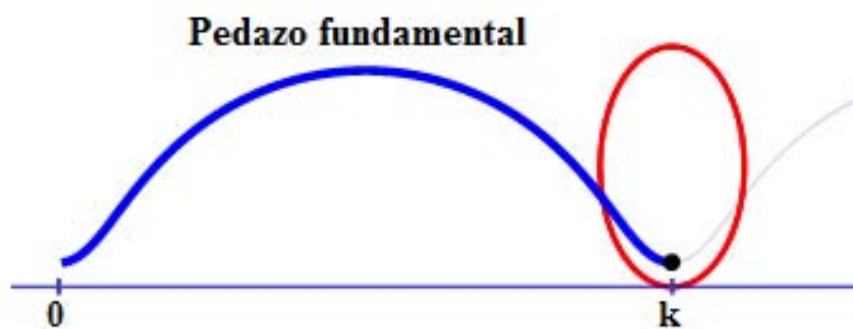


Figura 6.3. El hecho de que la elipse sea una curva cerrada nos permite definir la noción de “un pedazo fundamental de la curva generadora.”

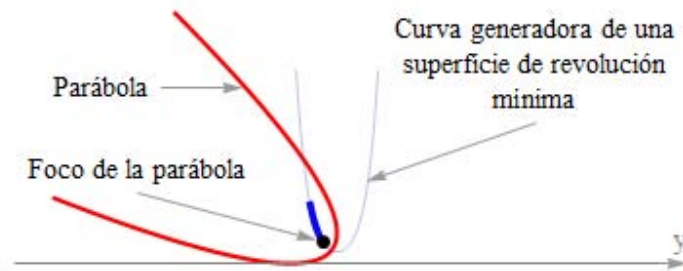


Figura 6.4. Si rodamos una parábola en una línea, su foco trazará la curva generadora de una superficie mínima.

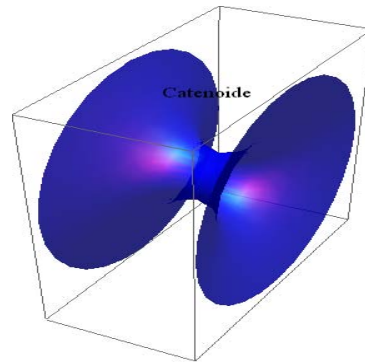


Figura 6.5. La curva generadora de esta superficie mínima fue construida usando una parábola.

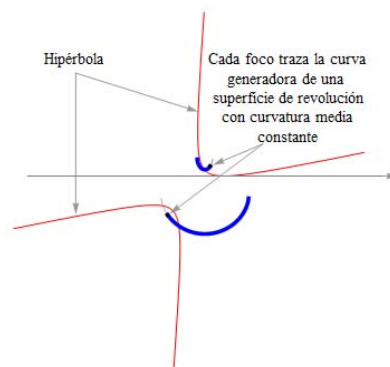


Figura 6.6. Si hacemos rodar una hipérbola en una línea, sus focos trazarán curvas generadoras de superficies con curvatura media constante.

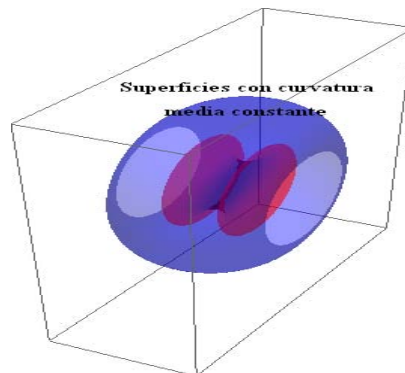


Figura 6.7. Estas son las superficies generadas por las curvas trazados por los dos focos de la hipérbola.

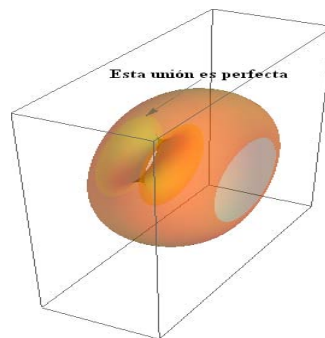


Figura 6.8. Si trasladamos una de las curvas de la gráfica anterior, el embate que se forma es de clase C^∞ .

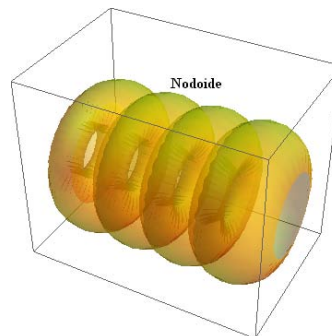


Figura 6.9. Si repetimos periódicamente la superficie anterior, obtendremos una superficie completa sin frontera con curvatura media constante.

Teorema 6.3. Delaunay [1] *Si colocamos una parábola en el plano $y - z$ y la rotamos a lo largo del eje y , entonces su foco trazará la curva generadora de una superficie de revolución con curvatura media constante cero.*

La superficie de Delaunay generada por una parábola es llamada un *catenoide*. Toda superficie con curvatura media cero es llamada una superficie *mínima*; ver figuras 6.4 y 6.5.

Teorema 6.4. Delaunay [1] *Sean a y b dos números reales positivos. Si consideramos las dos ramas de la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1$ en el plano $x - z$ y hacemos que una de estas ramas ruede a lo largo del eje y , entonces cada una de los focos trazará la curva generadora de una superficie de revolución con curvatura media $H = \frac{1}{2a}$.*

A diferencia de cuando rodamos una parábola, las curvas trazadas por los focos de una hipérbola tienen longitud finita y son acotadas. Cada una de estas curvas tiene la forma de la letra U; ver figuras 6.6.

Utilizando los dos pedazos de superficie generados por los dos focos de la hipérbola, se puede demostrar que cuando se traslada uno de estos pedazos de superficie para unirlo con el otro, la unión de los dos, la cual ocurre a lo largo de un círculo, es *completamente suave*, ver figuras 6.7 y 6.8.

Una vez tenemos la superficie que se forma al trasladar uno de los trozos, la podemos repetir infinitas veces y así generar una superficie completa y sin frontera con curvatura media constante llamada *nodoide*; ver figura 6.9.

Delaunay también demostró que su lista de superficies es exhaustiva, pues se tiene que si Σ es una superficie de revolución completa y con curvatura media constante, entonces, salvo un movimiento rígido del espacio euclidiano, Σ es una esfera, un cilindro, un undoloide, un catenoide o un nodoide.

7 El TreadmillSled de una curva:

En esta sección describiremos una noción creada por el autor para construir las curvas generadoras de las superficies helicoidales con curvatura media constante. Veamos alguna de las características de esta noción llamada por el autor *TreadmillSled* y abreviada *TS*.

- El TreadmillSled es un operador que toma una curva regular en \mathbb{R}^2 y la envía en una curva regular en \mathbb{R}^2 .
- Las curvas α_1 y α_2 tienen el mismo TreadmillSled, es decir, $TS(\alpha_1) = TS(\alpha_2)$, si y sólo si la curva α_2 es una rotación alrededor del origen de la curva α_1 .
- El origen de la curva α juega un papel importante en la definición de la curva $TS(\alpha)$. Comparando con la construcción usada por Delaunay para describir las curvas generadoras de las superficies de revolución con curvatura media constante, el origen será el punto que trazará la curva $TS(\alpha)$.
- El TreadmillSled de una curva depende de su orientación. Más precisamente, si α_2 es la curva α_1 con la orientación cambiada, entonces $TS(\alpha_2) = \{-p : p \in TS(\alpha_1)\}$.
- Para calcular el TreadmillSled de la curva α debemos suponer que el plano que la contiene se puede mover libremente. El origen de este plano que contiene a α trazará sobre un plano fijo la curva $TS(\alpha)$ cuando hacemos que todos los puntos de la curva α pasen por el origen del plano fijo, asegurándonos de que si el punto $\alpha(t)$ está pasando por el origen, entonces $\alpha'(t)$ debe estar alineado con la dirección positiva del eje x .

Las figuras 7.1 y 7.2 muestran cómo se construye el TreadmillSled de una curva.

En [6] se demuestran varias propiedades del operador TreadmillSled, en particular, el siguiente teorema podría utilizarse para definir este operador.

Teorema 7.1. Perdomo [6]: *Si la curva $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ está parametrizada por su longitud de arco, es decir, satisface que $x'(t)^2 + y'(t)^2 = 1$ donde $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, entonces el TreadmillSled de la curva α se puede parametrizar como*

$$\begin{aligned} TS(\alpha)(t) &= (-x(t)x'(t) - y(t)y'(t), x(t)y'(t) - y(t)x'(t)) \\ &= (\xi_1(t), \xi_2(t)). \end{aligned}$$

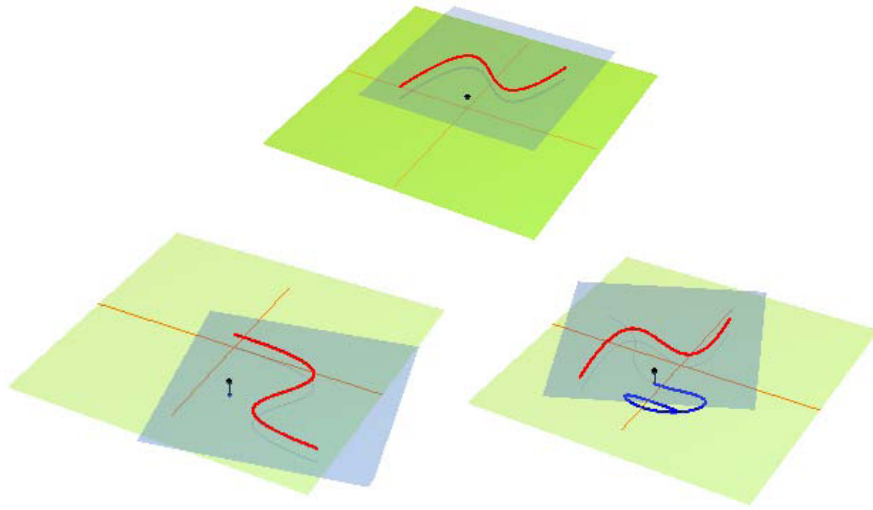


Figura 7.1. Si pretendemos que ponemos una curva a moverse en una maquina caminadora de longitud cero alineada con el eje x , entonces el origen de la curva α trazará la curva $TS(\alpha)$.

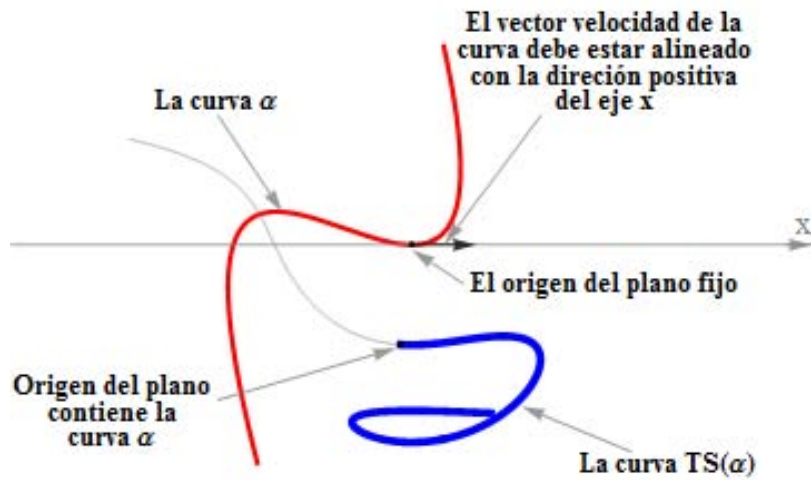


Figura 7.2. Esta figura muestra la gráfica de una función cúbica pasando por una maquina caminadora ubicada en el origen y su TreadmillSled.

Observación 7.2. *Fácilmente se demuestra que, $\xi_1^2(t) + \xi_2^2(t) = x^2(t) + y^2(t)$. Esta ecuación implica que la máxima y mínima distancia de la curva α al origen coincide con la máxima y mínima distancia de la curva $T(\alpha)$ al origen. Esta propiedad también la podemos ver notando que cada punto de $q \in T(\alpha)$ es generado por un punto $p \in \alpha$, q es trazado por el origen del plano que contiene a la curva α cuando el punto $p \in \alpha$ está pasando por el origen del plano donde se está trazando la curva $T(\alpha)$.*

Algunas preguntas naturales cuando definimos una función $f : A \rightarrow B$ son: ¿es la función inyectiva?, ¿es la función sobreyectiva?, si f no es sobreyectiva, ¿cuál es el rango de la función? En [6] el autor responde estas preguntas para la función $TS : A \rightarrow A$ donde A es el conjunto de curvas regulares. Como habíamos mencionado antes, la función TS no es inyectiva, pero sabemos que la pre imagen de una curva en el rango de TS está compuesta de curvas que difieren sólo por una rotación alrededor del origen. Se tiene que TS no es una función sobreyectiva, pues se puede demostrar que toda curva en el rango del operador TS satisface que cuando esta corta el eje y , en caso de que lo haga, debe hacerlo de una manera perpendicular. Más precisamente tenemos

Teorema 7.3. (Perdomo [6]) *Una curva regular $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ está en el rango del operador $TS(\alpha)$ si y sólo si existe una función continua f tal que*

$$\begin{aligned} y'(t) &= -f(t)x(t), \\ y(t)f(t) - x'(t) &> 0, \end{aligned}$$

para todo t .

La noción de TreadmillSled surgió naturalmente al tratar de resolver el sistema de ecuaciones diferenciales (5.2) cuyas soluciones brindan superficies helicoidales con curvatura media constante. Por ejemplo si definimos las funciones ξ_1 y ξ_2 como en el Teorema 7.1 y tomamos una función $\theta(t)$ tal que $x'(t) = \cos(\theta(t))$ y $y'(t) = \sin(\theta(t))$ entonces el sistema (5.2) se reduce al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned}x'(t) &= \cos(\theta(t)), \\y'(t) &= \sin(\theta(t)), \\ \theta'(t) &= \frac{2H(1 + w^2\xi_1^2)^{\frac{3}{2}} + w^2\xi_2}{1 + w^2(\xi_1^2 + \xi_2^2)}.\end{aligned}$$

8 Superficies helicoidales con curvatura media constante

Las cónicas se pueden describir con las ecuaciones,

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} &= 1, \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} &= 1, \\ \frac{y^2}{a^2} &= 4px.\end{aligned}$$

Estas curvas fueron útiles en el estudio de las superficies de revolución con curvatura media constante. Dados dos números reales $M > -\frac{1}{4}$ y $w > 0$, llamemos al conjunto de puntos (x, y) que satisface una relación de la forma

$$x^2 + y^2 - \frac{y}{\sqrt{1 + w^2x^2}} = M,$$

una curva *heart-shaped*.

Las curvas *heart-shaped* ayudarán a describir las superficies helicoidales con curvatura media constante de la misma manera que las cónicas ayudaron a describir las superficies de revolución con curvatura media constante.

No es difícil demostrar que si la superficie Σ tiene curvatura media constante H , entonces para cualquier número real positivo $r > 0$, la curvatura media de la superficie $\{rx : x \in \Sigma\}$ tiene curvatura media constante $\frac{H}{r}$. Por esta razón, para entender las superficies con curvatura media constante diferente de cero, basta entender aquellas superficies con curvatura media 1.

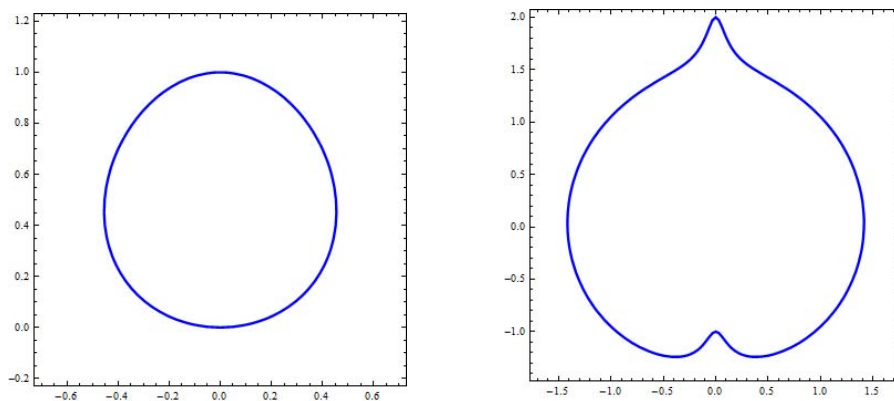


Figura 8.1. Dos ejemplos de curvas heart-shaped. Para la primera curva $w = 1$ y $M = 10$, para la segunda curva $w = 10$ y $M = 2$.

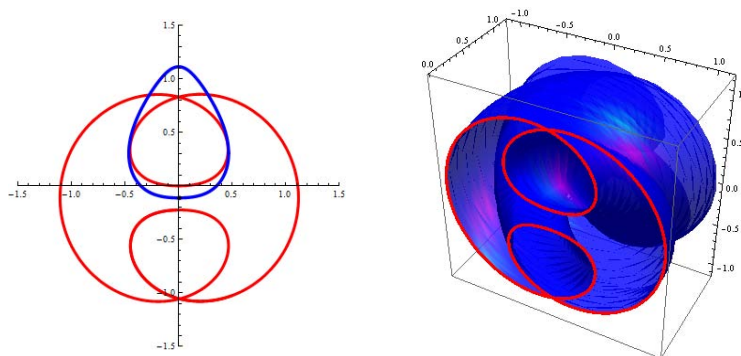


Figura 8.2. La curva generadora de un Twizzler con su correspondiente curva heart-shaped.

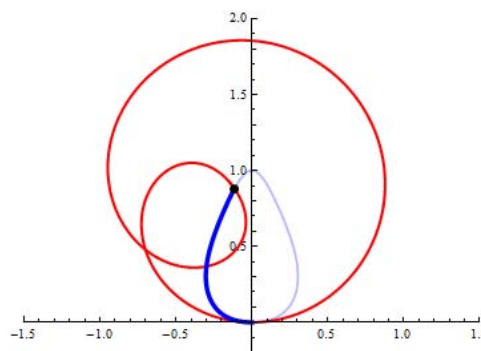


Figura 8.3. El TreadmillSled de la curva generadora de un Twizzler es una curva heart-shaped.

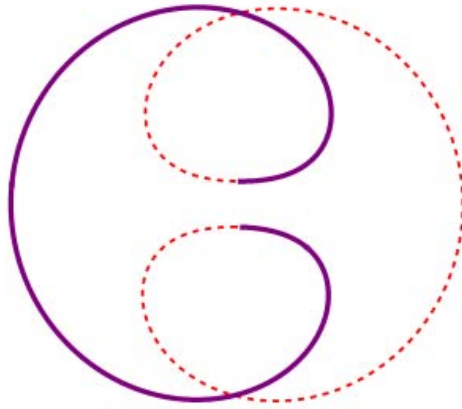


Figura 8.4. Toda curva generadora es la unión de curvas fundamentales. En este caso dos curvas.

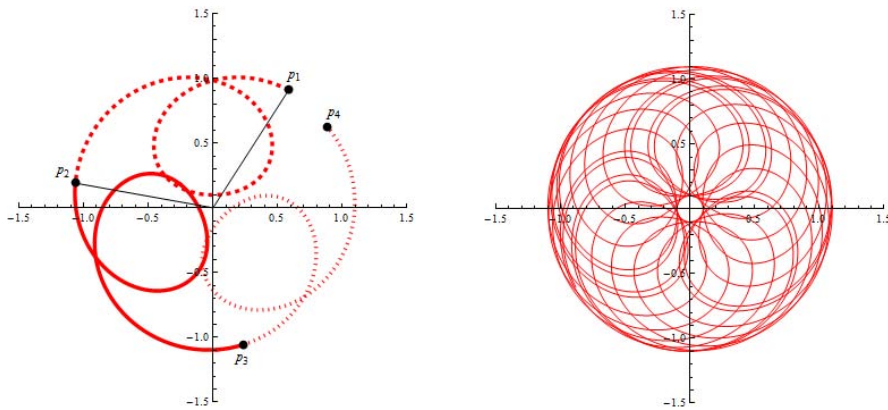


Figura 8.5. Twizzler con curva generadora densa. Las dos curvas son partes de la misma curva generadora, una tiene 3 pedazos fundamentales y la otra tiene casi 21 pedazos fundamentales.

Teorema 8.1. Perdomo [7] *Una curva $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ es la curva generadora de una superficie helicoidal con curvatura media constante 1, si y sólo si su TreadmillSled está contenido en una curva heart-shaped. Llamaremos a las superficies helicoidales con curvatura media constante, Twizzlers.*

Veamos algunas consecuencias del teorema anterior.

Observación 8.2.

- Usando el método de multiplicadores de Lagrange podemos demostrar que el punto más cercano de la curva heart-shaped $x^2 + y^2 - \frac{y}{\sqrt{1+w^2x^2}} = M$ al origen está a una distancia $r_1 = \frac{|\sqrt{1+4M}-1|}{2}$ y el punto más lejano está a una distancia $r_2 = \frac{\sqrt{1+4M}+1}{2}$. Ya que la distancias mínimas y máximas entre el origen y las curvas α y $TS(\alpha)$ son las mismas (ver observación 7.2) entonces podemos concluir que la curva generadora de toda superficie helicoidal es acotada, más aun, si su TreadmillSled es $x^2 + y^2 - \frac{y}{\sqrt{1+w^2x^2}} = M$, entonces la distancia entre el origen y los puntos en la curva generadora están entre r_1 y r_2 .
- Es fácil verificar que las curvas heart-shaped satisfacen las condiciones del teorema 7.3, es decir, ellas están en la imagen del operador TreadmillSled. Por lo tanto, toda curva heart-shaped determina superficies helicoidales con curvatura media constante. Es fácil ver que si dos curvas generadoras de superficies helicoidales difieren por una rotación con respecto al origen, entonces las superficies que generan son esencialmente las mismas, una es una movimiento rígido de la otra. Por esta razón podremos decir que cada curva heart-shaped determina una única superficie helicoidal con curvatura media constante.
- Ya que cuando $M = 0$ la curva heart-shaped contiene el origen, entonces la superficie helicoidal con curvatura media constante correspondiente contiene el eje de simetría.
- De la misma manera que definimos un pedazo fundamental para los unduloides, podemos definir un pedazo fundamental para las superficies helicoidales con curvatura media constante. Esta vez, diremos que una curva conexa α es un pedazo fundamental si su TreadmillSled recorre exactamente una vez la curva heart-shaped.
- No es difícil darse cuenta de que la curva generadora de un Twizzler completo es la unión de curvas fundamentales.
- De la observación 7.2 se concluye que el punto inicial p_1 y el punto final p_2 de un pedazo fundamental están a la misma distancia del origen. En caso de que estos puntos sean distintos, la curva generadora continuará con otro pedazo fundamental que empieza en p_2 y termina en p_3 . Si $p_1 \neq p_2$ entonces $p_2 \neq p_3$. Si $p_3 = p_1$ entonces la curva generadora será la unión de dos pedazos fundamentales. En general, si seguimos con esta forma de definir p_i ,

se tiene que la curva generadora es la unión de n pedazos fundamentales cuando $p_n = p_{n+1}$. Además, si la curva generadora no es una curva cerrada, lo cual ocurre cuando el ángulo entre los vectores p_1 y p_2 dividido por 2π es un número irracional, entonces se puede demostrar que esta curva generadora es densa en el conjunto $\{p : r_1 \leq |p| \leq r_2\}$

9 Superficies helicoidales mínimas

La superficie helicoidal mínima más conocida es el helicoides, ver figura 9.1.

Existe una deformación de superficies mínimas helicoidales muy conocida que lleva un helicoides a un catenoide. Esta familia de superficie se puede describir explícitamente con las siguientes parametrizaciones,

$$\begin{aligned} \phi_\alpha(u, v) = & (\cos(\alpha) \sinh(v) \sin(u) + \sin(\alpha) \cosh(v) \cos(u), \\ & -\cos(\alpha) \sinh(v) \cos(u) + \sin(\alpha) \cosh(v) \sin(u), \\ & u \cos(\alpha) + \sin(\alpha)). \end{aligned}$$

Sorprendentemente las cónicas vuelven a aparecer describiendo la curva generadora de una superficie mínima helicoidal.

Teorema 9.1. *Si S es una superficie helicoidal mínima diferente de un helicoides, entonces el TreadmillSled de la curva generadora de S es una hipérbola.*

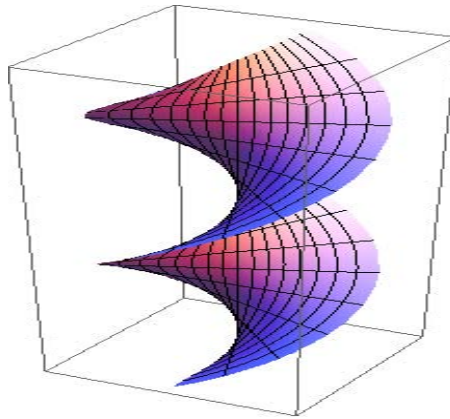


Figura 9.1. Este es un helicoides, su curva generadora es una línea.

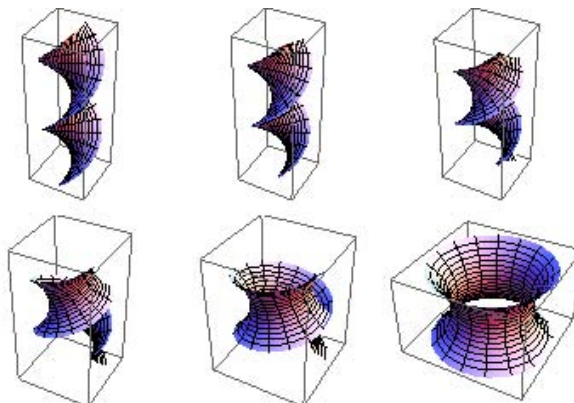


Figura 9.2. Algunas superficies de la familia que deforma un helicoides en un catenoide. Explícitamente, las gráficas de $\phi_0, \phi_{\frac{\pi}{10}}, \phi_{\frac{2\pi}{10}}, \phi_{\frac{3\pi}{10}}, \phi_{\frac{4\pi}{10}}, \phi_{\frac{5\pi}{10}}$.

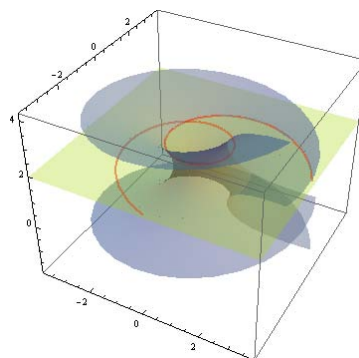


Figura 9.3. Curva generadora de una superficie mínima helicoidal.

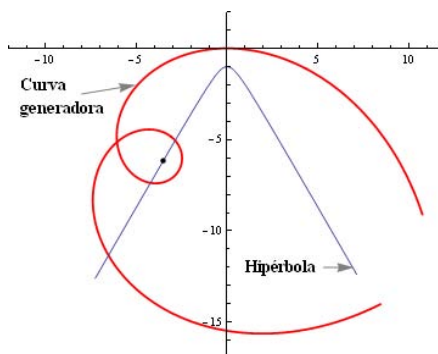


Figura 9.4. El TreadmillSled de la curva generadora de una superficie helicoidal mínima diferente del helicoides es una hipérbola.

10 Observaciones finales

Las superficies helicoidales con curvatura media constante han estado en la literatura por mucho tiempo. Por ejemplo, en 1970 Lawson [3] mostró la existencia de estas superficies como familias de superficies isométricas a las superficies de Delaunay. Do Carmo y Dajczer en [2] y Haak en [5] mostraron que los ejemplos de Lawson son todos los ejemplos posibles. En [4] Hitt y Roussos muestran varias imágenes de estas superficies.

La forma dinámica de construir las superficies helicoidales con curvatura media constante ayuda a entender mejor estas superficies. Por ejemplo, las superficies que continen el eje de simetría no eran muy conocidos hasta que el autor encontró estas construcciones. Además de los artículos en las referencias, el autor ha creado dos videos que pueden ser vistos en

<http://www.youtube.com/watch?v=wZlF1XzTr5o>

<http://www.youtube.com/watch?v=5puYWqd1x08>

Referencias

- [1] C. Delaunay, *Sur la surface de revolution dont la courbure moyenne est constante*, J. Math. Pures Appl., Ser. 1 **6**, 309 (1841).
- [2] M. Dajczer and M. Do Carmo, *Helicoidal surfaces with constant mean curvature*, Tohoku Math. J. **34**, 425 (1982).
- [3] B. Lawson, *Complete minimal surfaces in S^3* , Ann. Math. **92**(2), 335 (1970).
- [4] R. Hitt and I. Roussos, *Computer graphics of helicoidal surfaces with constant mean curvature*, An. Acad. Bras. Ci. **63**(3), 211 (1991).
- [5] G. Haak, *On the Theorem by Do Carmo and Dajczer*, Proc. Am. Math Soc. **126**(5), 425 (1998).
- [6] O. Perdomo, *Helicoidal minimal surfaces in R^3* , ArXiv:1105.3460 (2011).
- [7] O. Perdomo, *A dynamical interpretation of the profile curve of cmc Twizzlers surfaces*, ArXiv:1001.5198 (2011).