Bol. Mat. **18**(2), 143–156 (2011)

Grandes corrientes de la matemática en el siglo XX. III. La matemática de las estructuras 1940–1970[1]

Fernando Zalamea[2]

Departamento de Matemáticas
Universidad Nacional de Colombia
Bogotá

Este tercer artículo completa la mitad de nuestra serie de seis textos ligados a la *Cátedra Granés* 2008, *Grandes corrientes de la matemática en el siglo* XX. Los textos exploran tres frentes —*(i)* elucidación de núcleos conceptuales y problemáticas centrales en la matemática de la época; *(ii)* descripción de entornos históricos correspondientes, entrelazando matemática y cultura; *(iii)* determinación de temáticas filosóficas que emergen paralelamente a los avances técnicos— ilustrando así *instancias de desarrollo del pensamiento matemático*, inscritas dentro de la cultura como un todo. En esta tercera entrega, ligada a la emergencia del estructuralismo, enfatizaremos ejemplos alrededor de Bourbaki, MacLane y Lawvere.

Palabras claves: estructuralismo, Bourbaki, teoría de categorías.

Continuing the series *Great currents of mathematics in the* XX*th century*, we present the emergence of structuralist mathematics, both through the group Bourbaki and the creation of category theory. Further, we advance a philosophical and cultural discussion of the main conceptual ideas involved.

Keywords: structuralism, Bourbaki, category theory.

MSC: 01A60

[1] Las dos partes anteriores de esta entrega han sido publicadas en Boletín de Matemáticas, **16**(2), 95 (2009) y **17**(1), 13 (2010).

[2] www.matematicas.unal.edu.co/ fzalamea

1 Eclosión del estructuralismo

La estructura y la forma se atraen, complementan y repelen desde la Antigüedad. Organizar el conocimiento, encontrar cánones de creatividad y apuntar a apropiarse del mundo ancho que nos rodea son algunas acciones, entre muchas otras, que fuerzan una búsqueda *natural* de estructuras. Si esa exploración ha sido una constante del pensamiento humano —con momentos álgidos, y distantes en el tiempo, como el *Ars* de Llull, la *Combinatoria* de Leibniz, el *Borrador General* de Novalis, el *Pragmaticismo* de Peirce o los *Cuadernos* de Valéry— la *sistematización comunitaria* de la búsqueda se da sin duda en las décadas 1920–1960 del siglo XX. Las fuerzas orginales mayores parecen surgir del fantástico experimento soviético de la primera mitad de la década del veinte, antes de que la inmensa imaginación rusa cayera bajo el horror estalinista. Los *constructivistas* impulsan la búsqueda de estructuras formales minimales en los más diversos dominios: arte (Malevich), poesía (Klebnikov), arquitectura (Melnikov), cine (Vertov). Trubetzkoy lanza las primeras investigaciones a fondo de las estructuras lingüísticas y fonológicas de la comunicación. Florenski sistematiza la noción de perspectiva invertida y explora las apariciones de la invención desde el *revés de estructuras antinómicas*. Una suerte de "milagro generacional" hace que el entorno del constructivismo aprenda a apreciar los lineamientos globales de una estructura, allende nodos locales de información, los encajes de las piezas, allende descripciones de contenidos, los bordes de las configuraciones, allende nociones de "mensaje" o de "relleno". Por fuera del primer milagro soviético, la influencia directa de Trubetzkoy recae sobre el *Círculo de Praga*, con figuras mayores en lingüística (Mukarovsky, Jakobson) que asentarán el desarrollo del estructuralismo. En arquitectura, la *Escuela de Amsterdam* realiza un centenar de obras maestras donde el ladrillo, la madera pintada de blanco y el vidrio develan la enorme elegancia de un ordenamiento estructural que supera con creces la diversión del ornamento.

En matemáticas, el pionero de esa *sistemática* búsqueda "arquitectónica" de la estructura debe ser considerado David Hilbert (remitimos al primer artículo de esta serie, donde evocamos la importancia de la estructura en Hilbert). La *gran visión* del genio alemán, donde cada subcampo de la matemática adquiere precisas axiomatizaciones, líneas de sostén y problemáticas de tensión, se cimentará en un grupo inesperado de jóvenes estudiantes franceses, que revolucionará los modos de hacer y entender la matemática. La *École Normale Supérieure*, en París, a mitad de la década de los veinte, reúne un insólito enjambre de talentos, entre los cuales aparecerán algunos de los mayores matemáticos del siglo: Weil ("promoción" 1922, es decir, año de entrada a la Escuela), Cartan (1923), Dieudonné y Ehresmann (1924), Herbrand (1925), Chevalley (1926). Después de terminar sus estudios, realizar sus exámenes de agregación y concluir sus doctorados, los integrantes del grupo —apodado Bourbaki— se reunirán a mediados de los treinta para lanzar su famoso programa de *reescritura arquitectónica de la matemática.* Nos adentraremos en esa "filosofía bourbakista" en la segunda sección de este artículo.

Veíamos en el anterior artículo de nuestra serie cómo los pasos de lo *singular* (una ecuación, un objeto, una función) a lo *múltiple* (clases de ecuaciones, objetos y funciones) abrían el paso a la modernidad en matemáticas. La *sistemática organización estructural* de esas multiplicidades —iniciada en Hilbert, retomada y elevada a su máxima expresión en Bourbaki— se constituirá en otro nuevo motor de desarrollo para el pensamiento matemático. La modernidad alcanzará entonces una suerte de "cenit", aunque el revés de la medalla empezará también a vislumbrarse y emergerán al final reacciones violentas contra el grupo francés. Por el momento, mencionaremos sólo el proceso de "ascenso" del grupo, así como la emergencia paralela de la *teoría de categorías* (Eilenberg, MacLane, Lawvere, Freyd). La tensión será máxima antes de la entrada en liza del que debe ser considerado como el mayor matemático de la segunda mitad del siglo XX, Alexander Grothendieck, con quien abriremos el cuarto artículo de la serie.

Las décadas 1940–1970 conforman un periodo de "normalización" de la escritura matemática. En efecto, si los procesos creativos han sido siempre, y *necesariamente* siguen siendo, oscuros y antinómicos, las formas de presentación de esa creatividad han cambiado. La claridad, el rigor y la exigencia de las pruebas ha adquirido —muy específicamente gracias a Bourbaki— un altísimo nivel que se ha convertido en "pan común" del matemático hoy en día. Basta con hojear los libros de algunos grandes matemáticos de finales del siglo XIX y comienzos del siglo XX —algunas lecciones de Cantor, Lie, Lindemann, Hadamard, Borel, Sierpinski, Luzin, Veblen, etc.— para darse cuenta del gigantesco cambio realizado. Una hermosa, aunque también inquietante, "plasticidad" recorría la escritura matemática de hace cien años. Se enfatizaban ideas, se "suavizaban" los conceptos, se llegaba tal vez más directamente al fondo de los problemas, pero el rigor detallado de las pruebas dejaba mucho que desear. En matemáticas, la develación de las estructuras caminó en cambio con la elucidación de axiomatizaciones minimales y la limpieza de las escrituras asociadas. Un esfuerzo sostenido de "clarificación de las ideas" (según propugnaba Peirce, a fines del siglo XIX) se consiguió al concentrar la atención en los modos de entrelazamiento del conocimiento matemático. Allende las regiones (lógica, álgebra, topología, análisis, geometría, etc.) y allende las particularidades locales, las perspectivas universales permitieron desbrozar muchas malezas innecesarias.

Traigamos de nuevo a colación la "tabla fenomenológica" que guía esta serie:

tránsito matemático

qué	*cómo*	*por qué*	*cuándo*	*dónde*
objetos	modos	razones	momentos	lugares
ejemplos *problemas*	*transformaciones* *regulaciones*	*obstrucciones* *singularizaciones*	*diagramas* *temporales*	*diagramas* *culturales*
ontología	epistemología	metafísica	historia	geografía

cuestionamiento filosófico y cultural

Tabla III.1. Perspectivas de la Cátedra Granés 2008–I.

Los *objetos* centrales ("qué") con los que trabaja la matemática de la época son, a nivel "atómico", las *estructuras* y, a nivel "molecular", sus conglomerados (espacios de estructuras, es decir, *categorías*). Esos conglomerados se distribuyen a lo largo de las regiones matemáticas y dan lugar a categorías de conjuntos, grupos, anillos, órdenes, espacios topológicos, espacios funcionales, etc. Se alcanza así un pleno *control estructural* de propiedades centrales clásicas (algebraicidad, continuidad, etc.) a través de un nuevo nivel de elevación: la detección de comportamientos *funtoriales* entre las categorías. Mientras que las estructuras viven sobre los conjuntos, en un salto de nivel se empieza a operar sobre funtores entre categorías, dando lugar a uno de los conceptos fundamentales de mediados de siglo XX: las *transformaciones naturales* entre funtores. Se trata de un sostenido proceso de *ascenso* hacia lo genérico, que tendrá espectaculares consecuencias en su descenso posterior, especialmente bajo la dúctil inventividad de Grothendieck.

Los *problemas* ("qué") asociados son diversos: *(i) escalonar* las propiedades acumulables en estructuras dadas (por ejemplo, grupos topológicos ordenados), clasificar sus modos de comportamiento (por ejemplo, vaivén *global/local*) e introducir herramientas sistemáticas de contrastación (por ejemplo, *(co)homologías)*; *(ii)* caracterizar la riqueza de las estructuras de acuerdo con las propiedades *sintéticas* en el "medio–ambiente" que las cobija (libertad, proyectividad, inyectividad, etc.); *(iii)* pensar la matemática desde una nueva perspectiva, atenta a *tensiones* *generales* (adjunciones, teoremas de representación) y a *tránsitos universales* entre los conceptos, más allá de oclusiones locales o disfraces particulares. La *metodología* asociada ("cómo") es particularmente importante. Los "macros" de información que se elevan sobre los conjuntos de base (operaciones algebraicas, redes de topologías, simetrías geométricas, atlas diferenciales) llevan a rigurosas axiomatizaciones, dentro de un nivel muy alto de generalidad. Un nuevo paradigma —*el entendimiento de los objetos "en plural"* (vía estructuras y síntesis)— origina una dialéctica pendular con la tradición (objetos "en sí", vía elementos y análisis). Múltiples recomposiciones contrastan con descomposiciones previas, permitiendo una original elucidación de bloques compositivos generales, acoplamientos y pegamientos. Surge así un intento de armar un *control estructural* autosuficiente de TRANSformaciones estructurales, de donde —a través de las escuelas francesa y norteamericana ("cuándo" y "dónde")— brotan algunos de los más profundos problemas de la matemática para el medio siglo subsiguiente.

2 Bourbaki. Estructura y rigor

Bajo la influencia de la matemática alemana (Hilbert, Noether, Artin) y buscando una renovación de la escuela francesa, algunos jóvenes de la *École Normale* fundan el *Grupo Bourbaki* (n. 1935). El primer congreso reúne a Delsarte, Weil, Dieudonné, Cartan, Chevalley, Ehresmann, de Possel, Mandelbrojt. Se trata de un conjunto variable de matemáticos que, además de los fundadores, irá incluyendo figuras excepcionales a medida que el Grupo se transforme (edad límite de pertenencia, 50 años): Serre, Schwartz, Armand Borel, Grothendieck, Godement, Samuel, Connes, Yoccoz, además de una veintena de otros grandes matemáticos franceses e invitados extranjeros (Eilenberg, Tate, Lang, Bass). Eran proverbiales el humor negro del Grupo y las violentas peleas intelectuales en los congresos internos, donde se armaban y se criticaban *ad infinitum* las múltiples versiones de los *Elementos de Matemática*, el tratado que produjo los muy exigentes cánones de rigor que adoptaría luego la matemática de la segunda mitad del siglo XX (para información detallada sobre el Grupo, véanse [Mashaal 2002] o [Aczel 2006]). La actividad continua del *Seminario Bourbaki*, excelente indicador de la enorme e influyente actividad del Grupo, acumula cerca de 1.000 exposiciones y más de 10.000 páginas redactadas hasta el momento. Prácticamente toda la matemática del siglo XX ha pasado por el *Seminario*, pues, además de incluir multitud de investigaciones propias de los miembros del Grupo, muchas de las exposiciones consisten también en reportes de avances de la matemática contemporánea en acción.

En *La arquitectura de las matemáticas* [Bourbaki 1946], el Grupo expresa los lineamientos generales de su visión de la(s) matemática(s). La idea de quitar los paréntesis alrededor del plural resulta central en su filosofía: gracias a una mirada transversal, la *estructuración* transforma lo Múltiple en lo Uno. Bourbaki realiza una lista de diversos tipos de estructuras (algebraicas, ordenadas, topológicas) y propone la búsqueda de "estructuras–madre" que permitan jerarquizar el universo matemático. Ello conlleva una "estandarización" de los instrumentarios en juego —labor ciclópea de los *Elementos de Matemática*—, que fuerza altos niveles de rigor, así como explicitaciones extremas de axiomas, hipótesis, pasos de prueba. La estandarización y el extremismo formal de Bourbaki constituirán tanto su éxito, como su fracaso. Por el lado del éxito, puede anotarse por ejemplo, localmente en nuestro medio, la enorme influencia del Grupo en la eclosión de la matemática moderna en el país (J. Charris, C. Ruiz, A. Campos —este último estudiante directo de Ehresmann— abriendo el estudio serio de las matemáticas en Colombia). Por el lado del fracaso, el método bourbakista supuestamente cercenó la libertad y la intuición, aunque, como sucede a menudo, esto puede haber sucedido más por culpa de seguidores obtusos que debido a la visión del Maestro. En efecto, ya en el artículo señalado de 1946, Bourbaki subrayaba un *imprescindible vaivén* entre intuición y axiomatización, descubrimiento y abstracción, multiplicidad y unidad: "Menos que nunca, la matemática se reduce a un juego puramente mecánico de fórmulas aisladas; más que nunca, la intuición reina en la génesis de los descubrimientos, pero dispone ahora de potentes palancas provistas por la teoría general de las estructuras y domina de un solo vistazo inmensos dominios unificados por la axiomática, donde antes sólo parecía observarse el caos más informe".

Allende los elementos, los nuevos *objetos* de la matemática ("qué") pasan a ser las estructuras, entendidas a través del conglomerado jerárquico de axiomas que se impone sobre ellas. Los *problemas* asociados ("qué") tienen que ver con el entendimiento "medio–ambiental" de las estructuras: clases de homomorfismos (objetos inyectivos y proyectivos), teoremas de factorización (universalidad y unicidad), teoremas de representación (objetos libres, canonicidad). El "qué" se enlaza de manera original con el "cómo" a través del interés central acordado a las *transformaciones* de los entes. De hecho, los comienzos del incipiente paradigma categórico (Eilenberg, MacLane), según el cual las transformaciones de un objeto le definen completamente, pueden rastrearse arqueológicamente en la propuesta bourbakista (ver [Krömer 2007]). Las *regulaciones* ("cómo") adquieren un lugar preponderante en la perspectiva de Bourbaki, donde se combinan un *ascenso a la máxima generalidad* —altura que libera la mirada, permite recorrer transversalmente amplias clases de ejemplos y consigue proponer axiomas de muy amplio alcance— y una novedosa *re–composición estructural* de las regiones usuales de la matemática. La *sistemática metodología triple* del ascenso, la transversalidad y el descenso, ejecutada sobre el *espectro entero* de la matemática —táctica propia del "espíritu" bourbakista y potenciada al extremo en Grothendieck— resulta enteramente novedosa y su influencia cambiará el rumbo de las matemáticas en el siglo XX.

El intento de entender el complejo paisaje matemático, vía *(i) estructuras naturales* en las diversas regiones y *(ii) axiomas genéricos* para esas estructuras, dio progresivamente lugar a *problemas* profundos ("por qué") que impulsaron el desarrollo de la disciplina. Varias invenciones de la época provienen del "espíritu" bourbakista encarnado en sus exponentes singulares: el "buen" acoplamiento de la información local y global sobre una estructura, que originó la *teoría de haces* (Leray, Cartan); el tránsito natural entre las estructuras de la geometría proyectiva y de la geometría analítica, que impulsó el GAGA de haces sobre *variedades algebraicas complejas* (Serre); la jerarquización y la clasificación de álgebras diferenciales, que dio lugar a los teoremas de representación de *grupos y álgebras de Lie* (Chevalley, Borel); la conjugación de técnicas de teoría de números y de cálculo armónico abstracto, que confluyó en los *adeles e ideles* (Weil); la búsqueda de entornos generales para el análisis funcional, que llevó a la *paracompacidad* (Dieudonné); la eliminación de obstrucciones singulares a favor de convoluciones globales, que propulsó la teoría de *distribuciones* (Schwartz), etc. Por otro lado, no mencionamos aquí la verdadera multitud de aportes de Grothendieck, que evocaremos brevemente en nuestro cuarto artículo. El Grupo Bourbaki alcanza así no sólo una irradiación excepcional a través del *ejemplo comunitario* de su escritura —los *Elementos*— y de su labor investigativa —el *Seminario*—, sino que lo consigue también a través del *ejemplo individual* de sus miembros: experimento único de *integración y diferenciación* inventiva en la matemática del siglo XX.

3 MacLane. Estructura y forma

La escuela de Hilbert lanza también sus dardos a través del Atlántico. MacLane (1909–2005) cruza el océano y realiza su tesis en Göttingen bajo la dirección de Weyl y Bernays sobre "pruebas abreviadas en el cálculo lógico" (1934). Al regresar a Estados Unidos, en una década prodigiosa en Harvard, MacLane afianza la escuela algebraica americana (*Survey of Modern Algebra*, con Birkhoff, en 1941) y se convierte en experto mundial en homología. Comienza su extensa colaboración con Eilenberg (conectado a su vez con Bourbaki), surgen los espacios de Eilenberg–MacLane y, sobre todo, emerge la teoría de categorías [Eilenberg and MacLane 1942, 1945]. Instalado en Chicago desde 1947, a lo largo de las décadas posteriores MacLane generará una enorme escuela en categorías (más de 40 doctorados) y escribirá varias monografías que se convertirán en paradigma de claridad expositiva (*Homology*, 1963; *Categories for the Working Mathematician*, 1972; *Mathematics. Form and Function*, 1986).

Las *categorías abstractas* ("qué") son colecciones de morfismos con una operación de composición que cumple un par de condiciones mínimas (asociatividad, identidades). A partir de allí, las ideas y las construcciones universales que pueden realizarse en las categorías abstractas (básicamente a partir del cuantificador "existe un único") adquieren forma particular en *categorías concretas*. Las identidades encarnan en *estructuras de contenido matemático similar, cuyos morfismos preservan la similaridad*: categoría de conjuntos con funciones, categoría de grupos con homomorfismos de grupos, categoría de anillos con homomorfismos de anillos, categorías de órdenes con funciones monótonas, categoría de espacios topológicos con funciones continuas, categorías de espacios vectoriales con transformaciones lineales, etc. De esta manera, las regiones naturales de la matemática (que en Bourbaki correspondían a "matrices" o "estructuras–madre") no sólo aunan tipos de estructuras, sino que esas unidades mismas se *estructuran en un metanivel superior*. En realidad, las *categorías* conforman un nivel inicial para poder hablar de *funtores* entre categorías, y estos a su vez sirven de segundo nivel para poder introducir el concepto básico de *transformación natural*. De hecho, ese tercer nivel de las transformaciones naturales ("cómo") fue el requerido históricamente por Eilenberg y MacLane para llevar a cabo complejos cálculos homológicos en topología algebraica, y a partir de ese tercer nivel fue desde donde se realizó una *retrotracción* a los anteriores para fundamentar axiomáticamente la teoría (ejemplo interesante, filosófico y metodológico, entre muchos de la matemática, del paso del "cómo" al "qué": la epistemología y la ontología no pueden escindirse radicalmente en el pensamiento matemático).

Con la teoría de categorías, muchos *problemas* ("qué") giran alrededor del control del *tránsito* matemático: *(i)* construcción de estrategias y técnicas para el ir y venir pendular entre lo abstracto y lo concreto; *(ii)* elaboración de conceptos y teoremas *universales* (en el espectro de *todas* las categorías abstractas), que puedan luego encarnar en categorías concretas; *(iii)* entendimiento de los *transvases* de información entre categorías, funtores y transformaciones naturales. De esta manera, la teoría de categorías se enfrenta a grandes problemáticas matemático–filosóficas ("por qué"): *(A) vaivén entre lo uno y lo múltiple*, oscilación que da lugar a un extraordinario *cálculo conceptual integral y diferencial* cuyo espectro cubre todas las estructuras matemáticas; *(B) alternación hacia lo sintético* (objetos entendidos "en plural", a través de morfismos con el entorno externo, recompuestos por su acción–reacción con el medio ambiente), estrategia que se contrapone con la corriente analítica conjuntista de comienzos del siglo XX (objetos entendidos "en sí", a través de su información atómica interna, descompuestos a través de sus elementos); *(C) dialéctica dinámica de la matemática*, movimiento cuyas tensiones (adjunciones, representaciones) originan muchos de los conceptos centrales de la disciplina.

La *jerarquía de tránsitos* entre los "transitadores" categóricos (morfismos, funtores, transformaciones naturales, etcétera: n–morfismos para cualquier n) constituye una de las grandes fortalezas de la teoría. En particular, el Lema de Yoneda, que identifica un objeto con su funtor representable ("corona" de información saliente del objeto), asegura que *cualquier* categoría pequeña C (entendida como contexto discreto "real" de partida) puede sumergirse en una categoría de prehaces sobre C que resulta ser continua (donde se incluyen todos los límites de los prehaces "ideales" asociados a C). Se trata de un "completamiento" conceptualmente similar al de los números reales con los imaginarios, o al de ciertas extensiones algebraicas con sus cuerpos de clases (véanse los notables comentarios metodológicos en [Hilbert 1925] sobre la importancia de la ascensión a lo "ideal" en matemáticas). Desde un punto de vista técnico, el Lema de Yoneda resulta ser imprescindible para describir los clasificadores de subobjetos en topos de prehaces (véase la próxima sección), clasificadores que determinan a su vez la lógica del entorno categórico correspondiente. De manera precisa se entrelazan entonces estructuras geométricas y formas lógicas en un ambiente sintético de largo alcance.

En su manifiesto final, *Mathematics. Form and Function*, MacLane entiende el mundo matemático como una red compleja, cuyas estratificaciones principales se consiguen mediante *tensiones de la forma y razones de la función*. Muchas ideas de MacLane se acercan (sin que este lo mencione) al pragmaticismo de Peirce y a la filosofía de las formas simbólicas de Cassirer. Los objetos y los conceptos matemáticos ("qué") viven de la dialéctica pendular entre forma y estructura (por ejemplo, dialéctica entre homologías y categorías), adquieren su fuerza al poner en cuestión su función ("cómo") dentro del panorama matemático (por ejemplo, proyectividad de los objetos libres, ubicuidad de las adjunciones), y consiguen su objetivo al romper modos univalentes de visión (por ejemplo, la tradición analítica) o al abrir nuevos campos de acción para la invención matemática ("por qué"). Desde sus inicios, hace ya cerca de 70 años, la teoría de categorías ha crecido de forma espectacular y varios de los grandes geómetras contemporáneos (Quillen, Connes, Gromov, Kontsevich, por sólo mencionar algunos "monstruos") han aprovechado multitud de ideas y técnicas de la teoría.

4 Lawvere. Estructura y dialéctica

Lawvere (n. 1937) puede ser considerado como la mayor cabeza pensante de la teoría de categorías. Al lado de MacLane —iniciador, normador y estabilizador de la teoría— y de Grothendieck —inventor mayor y gigantesco técnico—, Lawvere ha ejercido un papel fundamental de "oráculo" y de guía clarividente a lo largo de más de cuarenta años de actividad. Combinando una capacidad única de análisis conceptuales y una amplísima cultura matemática, Lawvere ha impulsado enormes programas de desarrollo en la teoría de categorías: teorías algebraicas, lógica categórica, teoría de topos, geometría sintética, física de los medios continuos. Desde su tesis doctoral (teorías algebraicas vía categorías, 1963) y desde su muy original axiomatización (1964) de la categoría de conjuntos —que deja de lado la noción de "elemento" ordinal, en el sentido restringido de la torre Frege–Peano–von Neumann, para abrirse a elementos extendidos, como secciones continuas o relaciones de incidencia en clasificadores no clásicos—, Lawvere empieza a pensar sistemáticamente "al contrario". Una triple estrategia abre el *revés* de su reflexión: *(i)* obtención de *axiomatizaciones categóricas elementales* para regiones de la matemática tradicionalmente reservadas a tratamientos analíticos (conjuntos, topologías, prehaces); *(ii)* investigación de *dialécticas* matemáticas transversales, a través de un rastreo sistemático de *adjunciones* en todo el espectro de la disciplina; *(iii)* exploración de la *lógica y la geometría de las variaciones y los tránsitos* de los conceptos matemáticos.

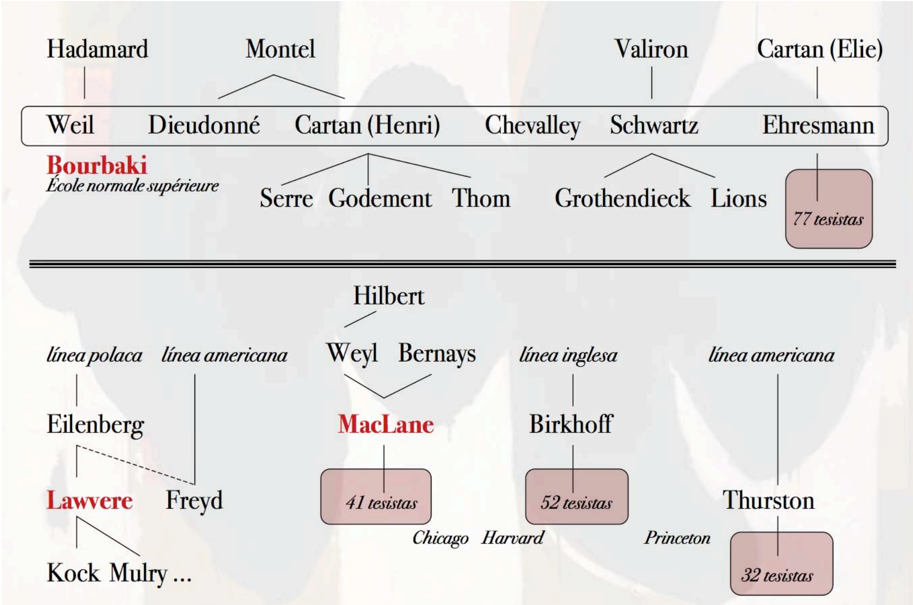
En su programa de entender los cuantificadores ("qué") vía adjuntos ("cómo"), Lawvere estudia el operador de proyección (por ejemplo, de una figura bidimensional sobre un eje) y muestra que el cuantificador *existencial* es el *adjunto izquierdo* de la proyección, así como el *universal* es el *adjunto derecho.* Ya que los adjuntos generalizan el comportamiento de las conexiones de Galois (en órdenes) y la existencia de objetos libres (en álgebra universal), emergen entonces, a través de la "geometría universal” de las categorías, profundas conexiones entre álgebra y lógica. La riqueza de las adjunciones —a la vez operadores de optimización (coherencia de las conexiones) y de irradiación (proyección de los objetos libres)— ayuda así a comprender diversos operadores lógicos vía “dialécticas generales” (“por qué”). Yendo aun más lejos, allende el caso particular de la proyección cartesiana conjuntista, Lawvere plantea la situación en categorías abstractas y consigue definir existenciales e universales vía *pullbacks*, categorías “coma” y categorías cartesianas cerradas (“cómo”). Se realiza así un *doble proceso de ascenso y axiomatización* que, desde la categoría de conjuntos, se eleva a categorías abstractas con algunas condiciones estructurales universales, para luego descender a *cualquier* otra categoría que cumpla esas condiciones. Otro descubrimiento notable (“argumento diagonal de Lawvere”, 1969) muestra cómo, en el ambiente de las categorías cartesianas cerradas, la existencia de operadores sin puntos fijos sobre un objeto J fuerza una “elevación” en los exponenciales (J^X “crece” sobre X). Como caso particular, para $J = \{0, 1\}$ y para el operador negación sobre J (sin puntos fijos), se tiene el usual teorema de Cantor (2^X mayor que X en tamaño). El interés del enunciado surge, sin embargo, al tomar su *contrarrecíproca en otras* categorías (doble forma de “revés”), ya que se obtienen los *teoremas de punto fijo* de Tarski (en retículos completos), de Gödel (en la aritmética de Peano) y de Brouwer (en topología).

Basándose sobre los trabajos de la escuela de Grothendieck, Lawvere y Tierney proponen luego (1969–70) una axiomatización elemental de la *teoría de topos*. Presentada bajo el lema “Topos = Geometría ∩ Lógica” la teoría alcanzará un enorme desarrollo, siguiendo el impulso de Lawvere, Freyd y toda la comunidad de categoristas en los años 1970. Un desglose axiomático de los topos de Grothendieck (es decir, topos de haces sobre categorías con topologías abstractas, ver el próximo artículo de la serie) lleva a Lawvere a definir los topos (“cómo”) vía axiomas que aseguren suficientes *límites* (para capturar parte de la geometría, según Grothendieck) y *subobjetos clasificadores* (para capturar parte de la lógica). La mayor sorpresa de la época se obtiene cuando se observa que los topos constituyen una semántica adecuada y completa para la *lógica intuicionista.* El fondo de la situación (“por qué”) corrobora el descubrimiento, pues el intuicionismo se encuentra muy cercano a la topología (Tarski, años 1930), a los conjuntos variables (Lawvere) y a la transformación de los objetos que propugna la teoría de categorías. Si una cierta “ceguera” había situado hasta el momento a la lógica clásica como paradigma inexpugnable (con enorme influencia en teoría de conjuntos y teoría de modelos), la emergencia de los topos (y de sus múltiples subcategorías intermedias) impulsará la renovación estructural de las lógicas superintuicionistas (*continuo* de sistemas bajo la lógica clásica).

En un notable artículo sobre el futuro de la teoría de categorías, Lawvere caracteriza a la teoría como "la primera en capturar en forma reproducible una incesante contradicción de la práctica matemática: fijar un objeto dado con precisión, más que en cualquier otra ciencia, para construir, calcular y deducir; y, sin embargo, constantemente transformarlo en otros objetos" [Lawvere 1991, p. 1]. La capacidad de la teoría de categorías de *axiomatizar* con gran nitidez el *vaivén* fundamental entre consideraciones estáticas (estados, puntos, objetos) y dinámicas (procesos, vecindades, morfismos) es una de las razones profundas de su éxito ("cristalinos descubrimientos filosóficos", *ibidem*). La teoría presenta un permanente *back–and–forth* ("cómo") entre las tres dimensiones básicas de la semiótica, enfatizando traslados y correlaciones pragmáticas (comparaciones funtoriales, adjunciones) sobre aspectos semánticos (clases canónicas de modelos) o sintácticos (ordenamientos de tipos). En palabras de Lawvere, "el uso explícito de la unidad y cohesividad de las matemáticas enciende la chispa de muchos procesos particulares en los que la ignorancia se torna en conocimiento" (*ibidem*, p. 2). Los procesos dialécticos, la progresiva liberación de los objetos, la contraposición de esqueletos opuestos ("por qué", desde el revés) permiten tomar distancia, decantar, estructurar con *otros ojos*.

5 Encuentros y desencuentros con la cultura

El "dónde" y el "cuándo" de la Tabla III.1 abren nuevos registros espacio–temporales para la matemática del siglo XX. Hilbert y su escuela lanzan las últimas flechas de la matemática alemana, antes de su declinar en el futuro. Las incidencias de la visión hilbertiana en el Grupo Bourbaki relanzan en cambio la riqueza universal de la matemática francesa, asociada a una verdadera catarata de talento y de invención que no ha menguado desde entonces (ver quinto artículo de nuestra serie: *Panorama de las Medallas Fields*). Por otro lado, la escuela norteamericana empieza a despegarse en los años 1930 de su tradicional dependencia con Europa. Harvard y Princeton se sitúan en primer rango mundial. Emergen Chicago (Stone, MacLane), Berkeley (Tarski, Kelley) y muchas otras universidades del Nuevo Mundo apoyan el desarrollo de las matemáticas. La figura siguiente resume algunas de las líneas de descendencia mayores en la matemática de la época, tanto en el espectro bourbakista como en la escuela norteamericana:



Estructuración, categorización y dialéctica invaden las principales problemáticas filosóficas asociadas a los desarrollos matemáticos: *(i) ontología* ("qué"): el estructuralismo observa *bloques* y representaciones externas, la categorización *morfismos* y composicionalidad, la dialéctica *polaridades* y contrastaciones; *(ii) epistemología* ("cómo"): el estructuralismo introduce *homomorfismos* y problemas de preservabilidad, la categorización *funtores* y problemas de naturalidad, la dialéctica *proyecciones* y problemas de libertad; *(iii) metafísica* ("por qué"): el estructuralismo busca *jerarquías* ordenadoras, la categorización *arquetipos* universales, la dialéctica *pendularidades* (adjunciones) orientadoras. Algunas grandes líneas de desarrollo en la filosofía francesa de la matemática se asocian a la emergencia (Lautman), vigor (Desanti) y superación (Deleuze) del estructuralismo. La matemática —*estructura de las estructuras*— se entiende como constructo cultural y, soportada en una compleja red de metáforas propias, encuentra su *alter ego* en los *Paradigmas para una metaforología* (1960) de Blumenberg. Se trata, en cualquier caso, de circunstancias de *apertura* (por ejemplo, Lévi–Strauss influenciado por Weil y Bourbaki), donde la matemática se sintoniza *naturalmente* con las tendencias culturales del momento.

Diversas correlaciones pueden encontrarse por ejemplo entre los actores matemáticos, las literaturas "estructuralistas" y las pinturas del expresionismo abstracto norteamericano: *(i)* al intento bourbakista de reconstruir la matemática, se le acercan el *Yoknapatawpha* de Faulkner, como tratado de la totalidad de la historia con su reinvención por bloques novelísticos, así como el universo–todo y las *constelaciones* de Pollock; *(ii)* al esfuerzo categórico de MacLane por medir obstrucciones homológicas y correlacionar forma y función, se le acercan la *Alejandría* de Durrell, como tratado de la correlatividad del alma con sus obstrucciones interiores, así como los trances–bordes y los *mares de color* de Rothko; *(iii)* a la atención de Lawvere hacia el movimiento y la dialéctica de los conceptos matemáticos, se le acercan la *Santa María* de Onetti, como tratado de las oscilaciones humanas con sus modalidades contrastantes, así como los tensores–colgantes y las *manchas negras* de Motherwell. De manera *natural*, los énfasis formales acercan así las diversas manifestaciones de la cultura, donde matemáticas, filosofía, arquitectura, literatura, pintura, música, etc., deben entenderse como un *todo estructuralmente interconectado.*

Bibliografía

[Aczel 2006] A. Aczel, *The Artist and the Mathematician. The story of Nicolas Bourbaki, the genius mathematician who never existed* (Thunders Mouth Press, New York, 2006).

[Bourbaki 1946] N. Bourbaki, *L'architecture des mathématiques*, en *Les grands courants de la pensée mathématique*, ed. F. le Lionnais (Albert Blanchard, París, 1962).

[Eilenberg and MacLane 1942] S. Eilenberg and S. MacLane, *Natural isomorphisms in group theory*, Proc. Nat. Acad. Sci. **28**, 537 (1942).

[Eilenberg and MacLane 1945] S. Eilenberg and S. MacLane, *General theory of natural equivalences*, Trans. Am. Math. Soc. **58**, 231 (1945).

[Krömer 2007] R. Krömer, *Tool and Object. A History and Philosophy of Category Theory* (Birkhäuser, Basel, 2007).

[Hilbert 1925] D. Hilbert, *On the infinite*, en J. van Heijenoort, *From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic* 1879–1931 (Harvard University Press, Cambridge, 1967), p. 367.

[Lawvere 1991] W. Lawvere, *Some thoughts on the future of Category Theory*, en *Proceedings of the Como Meeting on Category Theory* (Springer, New York, 1991), p. 1.

[Mashaal 2002] M. Mashaal, *Bourbaki. Une société secrète de mathématiciens* (Belin, París, 2002).