BERCEO

revista riojana de
ciencias sociales
y humanidades

175

Instituto de Estudios Riojanos

BERCEO. REVISTA RIOJANA DE CIENCIAS SOCIALES Y HUMANIDADES.
Nº 175, 2º Sem., 2018, Logroño (España).
P. 1-302, ISSN: 0210-8550

INSTITUTO DE ESTUDIOS RIOJANOS

BERCEO

REVISTA RIOJANA DE CIENCIAS
SOCIALES Y HUMANIDADES

Núm. 175

HOMENAJE A GUSTAVO BUENO

COORDINADOR:
PEDRO SANTANA MARTÍNEZ

Gobierno de La Rioja
Instituto de Estudios Riojanos
LOGROÑO
2018

Homenaje a Gustavo Bueno /Pedro Santana Martínez (coordinador). – Logroño : Instituto de Estudios Riojanos, 2018. 302 p.: il. ; 24 cm. Número monográfico de: Berceo : revista riojana de ciencias sociales y humanidades, ISSN 0210-8550. -- N. 175 (2º sem. 2018)

Bueno, Gustavo - Homenajes. I. Santana Martínez, Pedro. II. Instituto de Estudios Riojanos. III Serie.

1 Bueno, Gustavo

La revista *Berceo*, editada por el Instituto de Estudios Riojanos, publica estudios científicos de las Áreas de Ciencias Sociales, Filología, Historia y Patrimonio Regional con el objetivo de aportar conocimiento relevante para la investigación y el desarrollo cultural de La Rioja. Estos trabajos van dirigidos a la comunidad científica, así como a otras personas interesadas en estas materias, de los ámbitos regional, nacional e internacional.

Diseño de cubierta e interior: ICE Comunicación
ISSN 0210-8550
Depósito Legal LO-4-1958

Impreso en España - Printed in Spain

DIRECCIÓN Y ADMINISTRACIÓN:
Instituto de Estudios Riojanos
C/ Portales, 2
26071 Logroño
Tel.: 941 291 187 · Fax: 941 291 910

E-mail: *publicaciones.ier@larioja.org*
Web: *www.larioja.org/ier*
Suscripción anual España (2 números): 15 €
Suscripción anual extranjero (2 números): 20 €
Número suelto: 9 €

Calidad de Revistas Científicas Españolas
FECYT | FUNDACIÓN ESPAÑOLA PARA LA CIENCIA Y LA TECNOLOGÍA | 2016

Berceo se encuentra en las siguientes bases de datos bibliográficas, directorios y repositorios:

APH (L'Année Philologique)

CARDHUS PLUS (Sistema de clasificación de revistas científicas de los ámbitos de las Ciencias Sociales y Humanidades)

DIALNET (Portal de difusión de la producción científica hispana)

ERIH (European Science Foundation History)

ISOC (Ciencias Sociales y Humanidades, CSIC)

LATINDEX (Sistema regional de información en línea para revistas científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal)

MIAR (Matriu d'informació per a l'avaluació de revistes)

MLA (Modern Language Asociation database)

PIO (Periodical Index Online)

REGESTA IMPERII (Base de datos internacional del ámbito de la historia)

ULRICH'S (International periodical directory)

ÍNDICE

Berceo 175 163-184 Logroño 2018

¿QUÉ SON LAS MATEMÁTICAS? LA RESPUESTA DE LA TEORÍA DEL CIERRE CATEGORIAL*

CARLOS M. MADRID CASADO**

RESUMEN

¿Qué son las matemáticas? ¿Cuál es su fundamento? ¿Qué son los números, las figuras geométricas o los conjuntos? ¿En qué consiste una demostración? ¿Por qué funcionan las matemáticas cuando se aplican al mundo natural? Éstas son sólo algunas de las preguntas que pertenecen a la filosofía de las matemáticas. El objetivo del presente artículo es esbozar las novedosas respuestas que la teoría del cierre categorial de Gustavo Bueno ofrece a estas cuestiones.

Palabras clave: filosofía de las matemáticas, materialismo formalista, cierre categorial, Gustavo Bueno.

What is mathematics? What is its foundation? What are numbers, geometric figures or sets? What is a mathematical proof? Why does mathematics work so well at modeling the physical world? These are just some of the questions that belong to the philosophy of mathematics. The main aim of this paper is to outline the original answers that Gustavo Bueno's categorical closure theory offers to these questions.

Keywords: *philosophy of mathematics, formalist materialism, categorical closure, Gustavo Bueno.*

* Recibido el 10 de marzo de 2018. Aprobado el 21 de noviembre de 2018.

** Fundación Gustavo Bueno, cmadrid@fgbueno.es.

1. FILOSOFÍA Y FILOSOFÍAS DE LAS MATEMÁTICAS

La filosofía de las matemáticas es una disciplina que parece el pariente pobre de la filosofía de la física o de la biología. La mayoría de filósofos de la ciencia se plantean primero qué es la física o qué es la biología y, sólo posteriormente, qué son las matemáticas y qué papel desempeñan en las ciencias naturales. La filosofía de las matemáticas pierde así su autonomía y deviene *ancilla philosophiae naturalis*, vale decir que se cultiva con carácter servil respecto de la filosofía de otras ciencias.

Pues bien, el filósofo español Gustavo Bueno (1924-2016), autor del sistema conocido como *materialismo filosófico* y de la teoría de la ciencia conocida como *teoría del cierre categorial*, invirtió los términos, negándose a obviar el estudio del quehacer matemático[1]. Y ello porque, como enseguida explicaremos, la teoría del cierre considera las matemáticas como una ciencia más, como la física o la biología, y la aparición de la geometría griega como la revolución científica por antonomasia, a la altura de la acontecida en el siglo XVII. Ninguna verdad científica aventaja en antigüedad a los teoremas de Tales, Pitágoras o Euclides.

No está de más subrayar la importancia destacada que Gustavo Bueno concedió a las matemáticas dentro de su sistema filosófico. En primer lugar, porque para Bueno las ideas filosóficas brotan de los conceptos científicos y, en particular, de los conceptos matemáticos: "Nadie entre aquí –rezaba el frontón de la Academia de Platón– sin saber geometría" (de hecho, la filosofía platónica cristalizó como una suerte de geometría de las ideas y Bueno consideró la matemática como el reino mismo de la dialéctica). En segundo lugar, por la insistencia con que Bueno recurrió a ejemplos entresacados de las matemáticas para ilustrar las nociones centrales de cierre categorial e identidad sintética.

Es probable que la supervivencia de la filosofía de las matemáticas se explique por dos hechos singulares: el carácter de acero de las demostraciones matemáticas y la riqueza inagotable de sus aplicaciones en el mundo natural[2]. Mientras que el primer hecho suscita preguntas como las siguientes: ¿cuál es el fundamento de las matemáticas? ¿qué son los números, las figuras geométricas o los conjuntos? ¿en qué consiste la verdad matemática?; el segundo hecho plantea con toda crudeza la cuestión de la irrazonable efectividad de las matemáticas.

1. La teoría del cierre categorial surgió hace casi cincuenta años y, desde aquel tiempo, ha venido siendo aplicada a diversas ciencias (física, química, geología, biología, etología…). En lo que atañe a las matemáticas y a la lógica puede verse: Bueno, G. (1979). "Operaciones autoformantes y heteroformantes (I y II)". *El Basilisco* 7 y 8, pp. 16-39 y 4-25. Bueno, G. (2000). "Las matemáticas como disciplina científica". Ábaco 25/26, pp. 48-71. Velarde, J. (1992). "Teoría del cierre categorial aplicado a las matemáticas". *Revista Meta*, pp. 105-126. Madrid Casado, C. M. (2009). "Filosofía de las Matemáticas. El cierre de la Topología y la Teoría del Caos". *El Basilisco* 41, pp. 1-48. Madrid Casado, C. M. (2018). *Filosofía de la Cosmología. Hombres, teoremas y leyes naturales*. Oviedo: Pentalfa.

2. Cf. Hacking, I. (2014). *Why Is There Philosophy of Mathematics?* Cambridge: Cambridge UP.

núm. 175 (2018), pp. 163-184
ISSN 0210-8550 | Berceo

El problema con estos enigmas (que no son matemáticos, sino filosóficos) es que no tienen una única respuesta sino muchas. En otras palabras, no hay una única filosofía de las matemáticas sino varias, tanto si volvemos la mirada a las filosofías preocupadas por los fundamentos de las matemáticas a principios del siglo XX (los enfoques fundacionales[3]) como si miramos las filosofías más atentas a la práctica de las matemáticas que han surgido en los últimos tiempos (los enfoques históricos o naturalistas). De resultas de esta pluralidad, se hace necesario –antes de tomar partido– elaborar una clasificación, de acuerdo a algún criterio, en la que se recojan la mayoría de filosofías de las matemáticas.

Si tomamos como punto de partida el *factum* de que las matemáticas están dadas en el presente, la pregunta gnoseológica "¿qué son las matemáticas?" no puede entenderse como la búsqueda de una esencia eterna sino de por qué la geometría, el álgebra o el análisis poseen un cuerpo científico propio que los diferencia del resto de ciencias. En otras palabras: ¿cómo quedan organizados, *conformados*, por los matemáticos de carne y hueso, los signos, los dibujos, el papel, la pizarra, las reglas, los compases, los modelos de sólidos platónicos o arquimedianos, las calculadoras, los ordenadores, los artículos, los libros, las proposiciones, los teoremas y los corolarios en cuanto *materiales* de las matemáticas? Lo que sucede es que cada filosofía de las matemáticas asigna un peso diferente a la *materia* y a la *forma* en matemáticas. Para diseñar nuestra clasificación nos servimos –siguiendo a Gustavo Bueno[4]– del siguiente artificio: consideremos Materia (M) y Forma (F) como dos variables independientes a las que puede dárseles un cierto peso relativo entre 0 (ningún peso) y 1 (todo el peso). Siguiendo esta estrategia, se nos dibujan cuatro alternativas límite:

(1) Teorías *adecuacionistas* o caracterizadas por el par (M, F) = (1, 1), que sostienen que, en matemáticas, materia y forma pesan lo mismo, y que se da una suerte de adecuación o conexión entre objetos matemáticos (M) y sujetos matemáticos (F), ya sea porque se postule que los entes de la matemática existen independientemente de sus menciones y de nuestras mentes (*platonismo* de Pitágoras, Platón, Cantor, Hardy o Penrose) o porque se diga que dichos entes matemáticos son reducibles a entes lógicos, también reales y autosubsistentes (*logicismo* de Frege o Russell). Dentro de este grupo entran también platonismos más refinados (como el de compromiso de Quine o el naturalizado de

3. Los grandes intentos de fundamentación de la matemática –logicismo, formalismo, intuicionismo– surgieron cuando los matemáticos pasaron a considerar funciones, conjuntos y clases cada vez más abstractos durante la segunda mitad del siglo XIX, lo que fue fuente de paradojas lógicas y antinomias conjuntistas. Hemos reconstruido la historia de la crisis de fundamentos en: Madrid Casado, C. M. (2013). *Hilbert. Las bases de la matemática*. Barcelona: RBA. Madrid Casado, C. M. (2017). *Brouwer. Un geómetra entre la topología y la filosofía*. Barcelona: RBA.

4. Cf. Bueno, G. (1992). *Teoría del cierre categorial* (5 volúmenes). Oviedo: Pentalfa. Bueno, G. (1995). ¿Qué es la ciencia? Oviedo: Pentalfa.

Berceo | núm. 175 (2018), pp. 163-184
ISSN 0210-8550

Maddy), así como el logicismo renovado (Wright, Boolos) y el estructuralismo logicista (Parsons, Shapiro, Resnik). Además, cabe decir que el platonismo es la filosofía originaria de las matemáticas y la religión ejercitada en privado por la mayoría de matemáticos, mientras faenan entre teoremas, proposiciones y corolarios, pues tienden a abstraer la matemática del espacio y del tiempo, de lo físico y lo mental (reduciéndola, podríamos añadir desde las coordenadas del materialismo filosófico, al tercer género de materialidad M_3).

(2) Teorías *descripcionistas* o caracterizadas por el par (M, F) = (1, 0), que defienden que el ser y la exactitud de las matemáticas están en el papel escrito (por ello Peso (M) = 1 y, sin embargo, Peso (F) = 0). Es el *formalismo* de Hilbert, Zermelo, Bernays o Von Neumann, que identifica la matemática con marcas comprendidas en los márgenes del folio; pero es también el nominalismo fisicalista de Hartry Field, que concibe una ciencia sin números, sin abstracciones (reduciéndola, por tanto, al primer género M_1).

(3) Teorías *teoreticistas* o caracterizadas por el par (M, F) = (0, 1), que mantienen que las matemáticas yacen en el intelecto humano (por ello Peso (F) = 1 y Peso (M) = 0). Frente al platonismo-logicismo, que defiende que las verdades matemáticas se descubren, el *intuicionismo* de Brouwer defiende, influido por Kant y Poincaré, que éstas son, en realidad, inventadas: la matemática es una construcción mental (reducción a M_2), independiente del papel, del lenguaje y, por descontado, de cualquier cielo platónico. En este grupo también podemos contar constructivismos como los de Bishop o Dummett.

(4) Teorías *circularistas* o caracterizadas por el par (M, F) = (0, 0). Esta última alternativa corresponde al *materialismo formalista* de Gustavo Bueno (aunque en algunos puntos podemos coordinarlo con las posiciones mantenidas por Ian Hacking, Brian Rotman o Javier de Lorenzo), que niega la hipóstasis de M o de F (por ello Peso (M) = Peso (F) = 0), su yuxtaposición (como en el platonismo y el logicismo) o la reducción hacia un polo u otro (como en el formalismo y el intuicionismo); por cuanto se da cuenta de que M y F aparecen intrincadas dialécticamente, conjugadas circularmente: F *fabrica* M pero M *se segrega de* F, imponiendo sus condiciones y pudiendo actuar, a su vez, como F de otra M (es el caso de los ordenadores, que de construcciones matemáticas han pasado a ser matemáticos artificiales)[5].

5. Imre Lakatos lo expresó bellamente: "La actividad matemática es actividad humana. Pero la actividad matemática produce matemáticas. Las matemáticas, ese producto de la actividad humana, se enajenan de la actividad humana que las ha estado produciendo. Se vuelven un organismo viviente en crecimiento que adquiere cierta autonomía de la actividad que lo produjo". Lakatos, I. (1994). *Pruebas y refutaciones*. Madrid: Alianza, p. 169.

núm. 175 (2018), pp. 163-184
ISSN 0210-8550 | **Berceo**

La tabla que ofrecemos a continuación se hace eco de esta clasificación. De momento, la principal conclusión es –empero– que no hay una sino múltiples filosofías de las matemáticas, entre las que es preciso –guste o no– optar. En nuestro caso, tomamos partido por el materialismo formalista de Gustavo Bueno, cuya potencia a la hora de diseccionar el campo de las matemáticas esperamos poder aducir como justificación *a posteriori*; y que, pese a romper con el enfoque fundamentalista, no por ello abandona la filosofía para sumergirse en la historia o las ciencias cognitivas, puesto que no desdeña los compromisos ontológicos.

M	**F**	**ENFOQUES FUNDACIONALES**	**ENFOQUES HISTÓRICOS / NATURALISTAS**
1	1	**Platonismo** (Cantor, Hardy, Penrose) **Logicismo** (Frege, Russell, Círculo de Viena)	Platonismos refinados (Quine, Maddy) Logicismo renovado, Estructuralismo logicista
1	0	**Formalismo** (Hilbert, Zermelo, Bernays)	Nominalismo fisicalista (Field)
0	1	**Intuicionismo** (Kant, Poincaré, Brouwer)	Constructivismos (Bishop, Dummett)
0	0	$\emptyset$	**Materialismo Formalista** (Gustavo Bueno) ¿Lakatos, Javier de Lorenzo, Rotman, Hacking?

Tabla 1

2. EL MATERIALISMO FORMALISTA

El materialismo formalista de Gustavo Bueno comienza realizando una relectura de la crisis de fundamentos de las matemáticas acaecida a caballo entre los siglos XIX y XX. En esos años, las matemáticas estaban viviendo una auténtica edad de oro, con espléndidos desarrollos (topología, teoría de la medida, análisis funcional, etc.), de manera que no había amenaza de derrumbe y la mal llamada crisis de fundamentos encubría más bien una crisis de métodos, donde las clásicas definiciones y demostraciones constructivas estaban siendo arrinconadas por las nuevas definiciones axiomáticas y demostraciones existenciales (por reducción al absurdo)[6].

Cuestionado este mito, Bueno se fija en el formalismo hilbertiano, dado que *a priori* parece la posición más solida del debate. La preponderancia

6. Cf. Bueno, G. (1979). “Operaciones autoformantes… (I)”, p. 22. De hecho, De Lorenzo también subraya que no hubo crisis de fundamentos en la praxis matemática, sino que lo que estaba sucediendo era una inversión en la forma de hacer matemáticas: el clásico hacer figural dejaba paso al contemporáneo hacer global. Cf. De Lorenzo, J. (1998). *La matemática: de sus fundamentos y crisis*. Madrid: Tecnos, pp. 13-14.

Berceo | núm. 175 (2018), pp. 163-184
ISSN 0210-8550

del infinito en matemáticas, que descarta cualquier realismo ingenuo, ya que –como Hilbert entrevió– del infinito no poseemos intelección completa alguna, hace insostenible el platonismo tradicional. Por su parte, para sortear las paradojas, el logicismo termina reduciendo las matemáticas a una especie de megalógica bastante insatisfactoria; y el intuicionismo, con su matemática constructivista, tira por la borda la mayoría de resultados de la matemática clásica. En cambio, el formalismo reserva una gran libertad creativa al matemático puro: para que un objeto matemático exista basta con que no engendre contradicción.

No obstante, y dejando aparte el golpe letal que los teoremas de Gödel asestaron al programa de Hilbert (jamás podrá probarse la consistencia –la ausencia de contradicción– de la matemática clásica), la posición formalista no encaja con el quehacer cotidiano del matemático, con su faena de cada día. Para el formalista estricto, toda teoría matemática se resume en una combinación de signos, organizados dentro un sistema axiomático, sin ulterior significado. Sin embargo, si observamos a cualquier matemático en acción (porque los artículos no son más que los productos acabados de su hacer), nos asombraremos de la cantidad de razonamientos no formales que realiza sobre el papel o en la pizarra. Para el topólogo o el analista, el continuo de números reales es una realidad operacional antes que un modelo axiomático. De hecho, los axiomas de los números reales, como los de la teoría de conjuntos o los de la lógica, se han obtenido a partir del análisis de las demostraciones informales (el método genético precede –como sabía Poincaré– al método axiomático). El rigor es un producto final, a pesar de que la tendencia ultraformalista tome la cáscara por el contenido del hacer matemático.

El materialismo formalista de Gustavo Bueno rompe con la obsesión fundamentalista del formalismo, pero lo radicaliza al aseverar que los propios signos materiales de carácter tipográfico son los términos *fisicalistas* de la matemática y de la lógica. Con palabras de Bueno:

> El materialismo formalista coincide con el formalismo de Hilbert en su momento negativo (la *desconexión semántica* respecto de todo contenido exterior a los símbolos), pero en cambio no comparte la interpretación que el formalismo dio a esta desconexión –la teoría de las fórmulas como *fórmulas vacías* destituidas de todo contenido y significativas únicamente en virtud de su juego interno en el sistema axiomático– puesto que, según su interpretación, el materialismo formalista reconoce a los símbolos un contenido material, a saber, la propia entidad de sus *significantes* y toda la estructura geométrica (ordenaciones, permutaciones a derecha e izquierda, etc.) que en su propia realidad de significantes ha de ir implicada[7].

Según esto, las matemáticas o la lógica no guardan un significado oculto o latente, más allá de la inmanencia de los signos, de la manipulación

7. Bueno, G. (1979). “Operaciones autoformantes… (I)”, p. 29.

núm. 175 (2018), pp. 163-184
ISSN 0210-8550 | Berceo

operatoria de su simbolización escrita con tinta en el papel o con tiza en la pizarra. Éste es, precisamente, su significado. Los signos matemáticos son auto-referentes: "la *desconexión semántica* del formalismo no habría que entenderla como una evacuación de toda interpretación, sino como la evacuación de toda interpretación no contenida en el *ejercicio* mismo de los significantes"[8].

Se alcanza, así, un formalismo materialista, que comprende las matemáticas o la lógica como ciencias de materialidades tipográficas. Desde la teoría del cierre, toda ciencia es, por construcción, ciencia *material*. No existen las ciencias *formales*, es decir, las ciencias ocupadas en el estudio de formas (lógicas o matemáticas) puras e inmateriales. Y no tanto por cuestiones ontológicas cuanto por cuestiones de índole gnoseológica, que tienen que ver con la *praxis*: como toda ciencia, las mal llamadas ciencias formales son, en realidad, ciencias materiales, porque su construcción exige que el científico realice operaciones con algo, con referenciales fisicalistas, como signos, líneas o redondeles corpóreos. Pero, entonces, si la teoría del cierre conculca la distinción ciencias formales / ciencias naturales, ¿dónde radica la diferencia entre ambas? En que los términos que forman parte del campo de la lógica y las matemáticas están hechos por el hombre, mientras que en general no ocurre así con los de la física o la geología, que parte de los planetas o las rocas (y aquí subyace, como veremos, el privilegio ontológico de la lógica y las matemáticas)[9].

A nuestro entender, la ceguera de la mayoría de matemáticos y filósofos radica en que contaron con la *suppositio materialis* pero no repararon en ella. En efecto, contaron con ella, como patentizan observaciones al respecto de Hilbert ("en el principio fue el signo", "a nuevas ideas corresponden nuevos signos"), de Kolmogórov ("mi lápiz pertenece a las matemáticas"), del filósofo Jaime Balmes ("quitad a la matemática sus signos y desaparece") o del lógico Ernst Schröder, que introdujo el siguiente axioma en su *Manual de Aritmética y Álgebra* de finales del XIX: "El principio en el que estoy pensando podría bien llamarse axioma de la adherencia de los signos... Nos da la seguridad de que en todas nuestras argumentaciones y deducciones, los signos permanecen en nuestra memoria o –aún más firmemente– sobre el papel".[10] Pero no repararon en ella, porque pusieron entre paréntesis la corporeidad del matemático y replegaron las matemáticas al lenguaje o al

8. Ibídem.

9. Bueno subtitulaba su artículo "Operaciones autoformantes y heteroformantes" de 1979 como "Ensayo de un criterio de demarcación gnoseológica entre la lógica formal y la matemática", y proponía que la lógica tiene más que ver con *operaciones autoformantes*, es decir, con operaciones que incluyen la reproducción o reiteración de uno o más de los términos operados: $\neg(\neg\phi) = \phi$; $A \cup A = A$; $A \cap A = A$; $x \cdot x = x$; etc. A diferencia, las matemáticas acusan mayor presencia de *operaciones heteroformantes* (es decir, no autoformantes o idempotentes, por decirlo con George Boole): $7+5 = 12$; $2 \cdot 2 = 4$; $A \cup B = C$; $x \cdot x = x^2$; etc.

10. Frege, G. (1996). *Escritos filosóficos*. Barcelona: Crítica, p. 37.

Berceo | núm. 175 (2018), pp. 163-184
ISSN 0210-8550

pensamiento, olvidando que el geómetra no puede prescindir de las figuras dibujadas ni el algebrista de las marcas escritas[11].

3. SABER MATEMÁTICAS ES HACER MATEMÁTICAS

El materialismo formalista de Gustavo Bueno se distingue por afirmar con mayor rotundidad que el formalismo que la matemática se sustenta sobre su materialidad tipográfica; pero, al mismo tiempo, rechaza reducirla a este plano, hipostasiando los *términos* fisicalistas (M_1), porque en matemáticas también cuentan las *operaciones* ejercitadas por el matemático con esos términos (M_2) y las *relaciones* representadas por ellos (M_3).

El teorema de Pitágoras pertenece al *tercer género* de materialidad (es una *relación* con una realidad muy diferente de la cósica o la mental, aunque curiosamente más resistente y objetiva), pero su construcción precisa invariablemente de las *operaciones* del matemático (*segundo género* de materialidad) articulando *términos* como signos algebraicos y/o dibujos geométricos (*primer género* de materialidad). Ahora bien, no se trata de una esencia que resida en un mundo transuránico, porque no puede ser desprendida de este mundo en que vivimos y actuamos (M_3 es disociable pero no separable de M_2 ni de M_1, que funciona siempre como primer analogado): "a cada contenido terciogenérico ha de corresponderle por lo menos un par de contenidos procedentes de los otros dos géneros"[12].

Para fijar ideas, prestemos atención al cuadro *El matemático renacentista Luca Pacioli demostrando uno de los teoremas de Euclides*, del pintor Jacopo di Barbari (1495). En este lienzo puede observarse cómo la construcción operatoria de un juego de figuras objetuales hace aparecer relaciones necesarias y, en especial, cómo M_1 (el círculo, las rectas y los triángulos dibujados en la pizarra, a la izquierda), M_2 (la conducta del matemático manipulando diversos aparatos como la pluma, la tiza o el compás, en el centro) y M_3 (las proposi-

11. A día de hoy, esta imagen cuasi-empírica de las matemáticas no resulta tan extraña tras los trabajos de Quine, Putnam, Lakatos, Piaget o Philip Kitcher. En contraposición a los enfoques fundacionales, los enfoques históricos y naturalistas enmarcan el conocimiento matemático en el ser natural del hombre, centrándose unos en las bases biológicas o psicológicas y otros en los aspectos sociales y culturales. Aunque llevados por el entusiasmo frente a las concepciones apriorísticas de la matemática, algunos terminan deslizándose hacia el *cerebrocentrismo* (Dehaene) y otros, como el sociólogo David Bloor, hacia el relativismo etnomatemático ligado al constructivismo social. Bloor se atreve con el sancta sanctorum de las matemáticas y, apoyándose en el psicologismo de John Stuart Mill, concibe la matemática como una colección de convenciones sociales negociadas a partir de la aritmética con guijarros. Pero Bloor olvida que la matemática no presenta una variabilidad sin límites (hay ciertos invariantes, como π); y es incapaz de dar cuenta del anudamiento interno de los teoremas, porque pasa por alto que los signos matemáticos (el 1, el 2 o las *x*) se han segregado de los guijarros, las peras y las manzanas por un mecanismo de absorción múltiple: el 1, el 2 o las *x* sirven tanto para los guijarros como para las peras o las manzanas (de igual manera, escribir los números con tinta verde no hace que sean verdes, pues también podrían haberse trazado en otro color). Cf. Bloor, D. (1998). *Conocimiento e imaginario social*. Barcelona: Gedisa.

12. Bueno, G. (1992). *Teoría del cierre…*, p. 1427.

núm. 175 (2018), pp. 163-184
ISSN 0210-8550 | **Berceo**

ciones del libro de Euclides, a la derecha) aparecen perfectamente conectados formando una especie de triángulo superpuesto al cuadro (nótese, por tanto, el circularismo entre materia y forma en matemáticas).

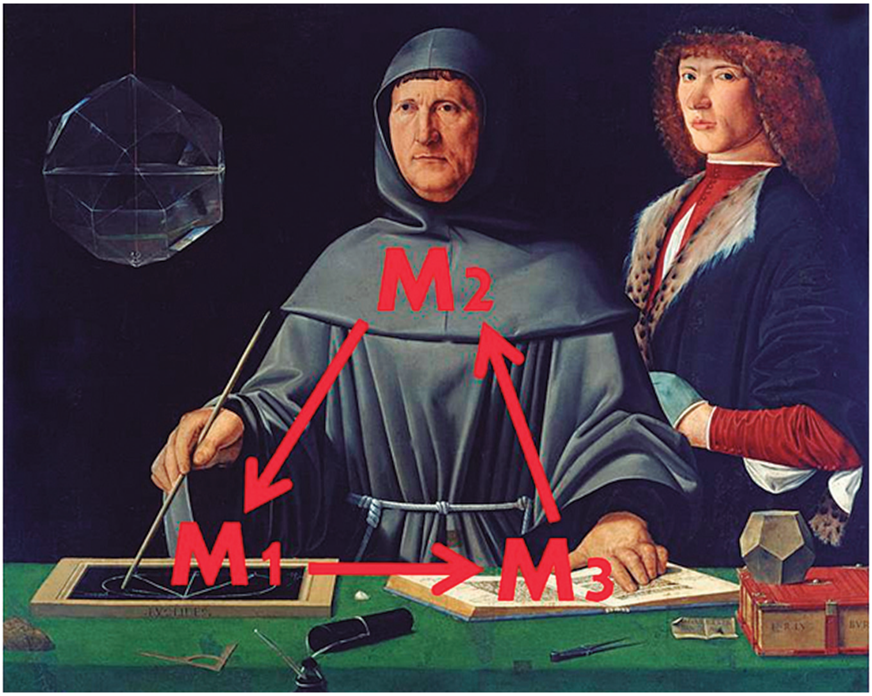


Figura 1: Luca Pacioli, por Jacopo di Barbari [Wikicommons: de dominio público]

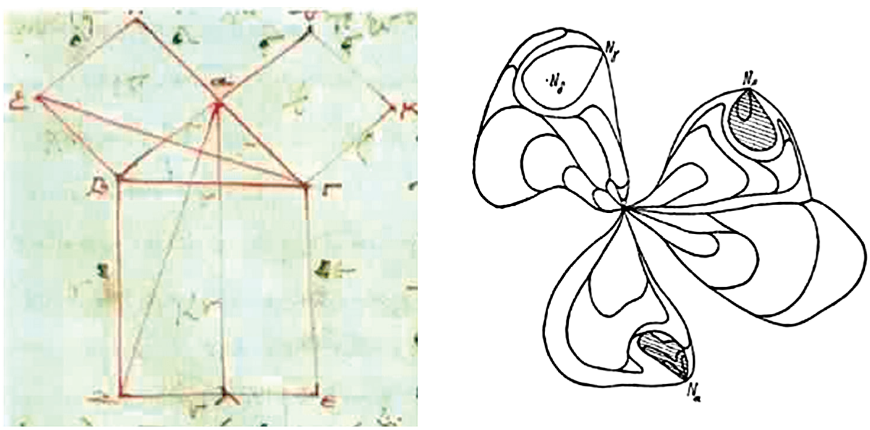
En *Arquímedes* (1630) o *Euclides* (1635) de Ribera, así como en *Un matemático* de Ferdinand Bol (1658) o en *La lección de geometría* de Nicolas Neufchâtel (1561), también observamos a matemáticos operando quirúrgicamente (manualmente) con términos fisicalistas. Pero centremos la atención en la pizarra que emplea Pacioli y en los papeles que portan los matemáticos de Ribera. Para Bueno, sólo desde esos dibujos en el plano del papel, la pizarra o la arena pueden los matemáticos establecer la verdad de sus teoremas[13]. Esos grafos que pueblan las matemáticas, ya sean figuras o numerales, constituyen lo que Javier de Lorenzo y, poco después, Brian Rotman han denominado *ideogramas*[14].

13. Cf. Bueno, G. (1982). "El cierre categorial aplicado a las ciencias físico-químicas". En *Actas del I Congreso de Teoría y Metodología de las Ciencias*, pp. 101-175. Oviedo: Pentalfa, p. 168s.

14. Véanse: De Lorenzo, J. (1994). "El discurso matemático: ideograma y lenguaje natural". *Mathesis* 10, pp. 235-254. Rotman, B. (2000). *Mathematics as Sign. Writing, Imagining, Counting*. Stanford: Stanford UP.

Berceo | núm. 175 (2018), pp. 163-184
ISSN 0210-8550

Encontramos ideogramas en la geometría euclídea (por ejemplo, el *molino* de Pitágoras), en el álgebra (la regla de Ruffini o los diagramas homológicos), en el análisis (las cadenas de límites) o en la topología (los dibujos de Brouwer, que por su abstracción muchas veces recuerdan a pinturas de Kandinsky). La extraña combinación de ideogramas y lenguaje natural es lo que caracteriza la matemática, por encima de la concepción que la reduce a un lenguaje formal y aspira a una geometría sin figuras o a un álgebra sin fórmulas materializadas en la hoja bidimensional o el encerado. Para De Lorenzo, como para Bueno, el hacer matemático no parte del discurso hablado para una posterior transcripción gráfica, sino que su punto originario y constitutivo es el ideograma, y de aquí el concurso imprescindible –para nada auxiliar– del papel o la pizarra (sin perjuicio de que ideograma y texto terminen conformando una unidad).



Figuras 2 y 3: A la izquierda, un ideograma de la geometría sintética: el *molino* de Pitágoras en *Los Elementos* de Euclides. A la derecha, un ideograma topológico [Wikicommons: de dominio público]

Ian Hacking ha desgranado ideas similares[15]. Hacking exalta la importancia de las manos y no sólo de la mente para aquello que hace que las matemáticas sean matemáticas. Son las manos las que, armadas con diversos instrumentos como estiletes o cuñas, dibujan las grafías matemáticas sobre el papiro, las tablillas de barro o la arena. Siguiendo a George Lakoff y Rafael E. Núñez[16], que están en la estela de Piaget, Hacking insiste en cómo el cuerpo interactúa con el mundo durante la formación de los conceptos

15. Cf. Hacking, I. (2009). *Scientific Reason*. Taipei: NTU Press, cap. 2. Hacking, I. (2014). *Why Is There…?*, p. 93.

16. Lakoff, G. y Núñez, R. E. (2000). *Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*. Nueva York: Basic Books.

núm. 175 (2018), pp. 163-184
ISSN 0210-8550 | Berceo

matemáticos originarios. El concepto de número surgiría contando, ordenando o coleccionando; las formas geométricas, con el movimiento o la construcción; las nociones probabilísticas, manipulando ciertos dispositivos aleatorios (dados, astrágalos, etc.). Desde luego, el concurso de las habilidades cerebrales es imprescindible, pero la neurociencia y las ciencias cognitivas no son capaces de explicarnos el origen de las matemáticas por sí solas. Para Hacking, hay que apelar a la historia y a la antropología filosófica, porque la ciencia no es algo individual sino grupal. En el caso de las matemáticas, ligado a la aparición de la técnica de la escritura para hacer listas o diagramas. Es más, en el caso de la geometría griega, la noción de demostración sería inseparable de la *polis*, de la sociedad discursiva en que creció: el desarrollo de la oratoria y la retórica habría incitado a buscar pruebas apodícticas, y la repetibilidad de las demostraciones geométricas constituiría una forma de persuasión de lo más efectiva. Hacking sigue en esto al historiador Reviel Netz y subraya, apoyándose en sus estudios sobre la matemática griega, el papel de la combinación de texto y diagramas en las demostraciones geométricas[17].

Pero el significado gnoseológico de los ideogramas permanece abierto. En su fascinante comparación entre la estructura de un teorema de Euclides y un soneto de Lope, Gustavo Bueno volvió a llamar la atención sobre la involucración entre discurso y figuras en los teoremas geométricos[18]. Para Bueno, las figuras que acompañan la exposición no son muletas, concesiones didácticas al lector que podrían suprimirse; porque la prosa gráfica no puede deducirse de la proposición enunciada, y en ella descansa precisamente la racionalidad geométrica (que no puede comprenderse al margen de toda materia). El *logos* de un teorema geométrico reside precisamente en el ensamblaje de líneas, triángulos o circunferencias realizado por el geómetra. Sin este último, la construcción carece de sentido; pero, de modo conjugado, el razonamiento flotaría en el vacío sin las figuras trazadas para aprehenderlo, pues no hay contenidos mentales originarios.

Pero Bueno critica a Netz que parezca fundar la generalidad de los teoremas geométricos en la identificación de unos diagramas con otros, en la fotocopia o reproducción mecánica del diagrama originario, una especie de inducción empirista a lo Stuart Mill. La universalidad de los resultados geométricos no descansa sobre una identidad externa, entre figuras clónicas, sino sobre una identidad esencialmente interna, entre los cursos operatorios que se realizan sobre cada figura. El teorema de Pitágoras es repetible no porque lo sean las figuras, porque el *molino* pueda copiarse, sino porque los procesos de repetición están ya dados en la construcción operatoria del diagrama

17. Netz, R. (1999). *The Shaping of Deduction in Greek Mathematics. A Study in Cognitive History*. Cambridge: Cambridge UP.

18. Bueno, G. (2009). "Poemas y teoremas". *El Catoblepas* 88, p. 2.

Berceo | núm. 175 (2018), pp. 163-184
ISSN 0210-8550

original: "sea una recta cualquiera", "tómense dos puntos cualesquiera", etc.[19] En resumen: "La identidad en la que hacemos consistir su verdad tiene lugar en el ámbito de cada diagrama, y no en el ámbito de la semejanza entre los diagramas ulteriormente repetidos"[20]. El proceso de demostración contiene, al cerrarse, los principios de su recurrencia universal (es lo que más adelante explicaremos como teoría de la verdad como identidad sintética). Se trata, en suma, de solventar la famosa paradoja debida a Poincaré: "la geometría es el arte de razonar bien con figuras mal hechas".

Antes de proseguir el análisis de las matemáticas, extraigamos algunas conclusiones:

— Si aceptamos que los objetos matemáticos son, en esencia, esos términos fisicalistas encerrados en el plano del papel o la pizarra (las manchas de tinta o tiza, las grafías que llamamos números, incógnitas, curvas, conjuntos…), resulta que *saber* matemáticas es *hacer* matemáticas. Las matemáticas son un *saber hacer*, porque no es posible enseñar geometría sin geometrizar[21]. La matemática es, pues, como la música: sin organistas ni órganos el *Clave bien temperado* de Bach no suena, igual que sin matemáticos y sin grafos de triángulos rectángulos –imaginemos que fueran tan imposibles de construir como algunos dibujos de M. C. Escher– el teorema de Pitágoras se desintegra sin dejar rastro, justo como si no fuera verdad. La música, para ser música, ha de sonar, y los que la reducen a partituras (formalistas), a imaginaciones intracraneales (intuicionistas) o a melodía de esferas celestes (logicistas y platonistas) confunden la parte con el todo.

— Los matemáticos no llevan bata blanca como los físicos, pero también son sujetos operatorios: sus átomos son los signos; su laboratorio, el papel, la pizarra o la computadora; y su aparato instrumental, las manos. El matemático piensa porque tiene manos, podríamos decir parafraseando a Anaxágoras. No en vano, todos aprendemos a contar con las manos, y casi todos los sistemas primitivos de numeración están referidos a los dedos (la base más utilizada es 10 por ser el número de dedos de las manos). De hecho, *algebrista* significa etimológicamente "el que *manipula* huesos" (así aparece en *El Quijote*), y este signifi-

19. Mucho antes, Charles *Santiago* Peirce había dejado escrito: "Todo el razonamiento matemático es diagramático [...] Por razonamiento diagramático entiendo razonamiento que construye un diagrama de acuerdo con un precepto expresado en términos generales, realiza experimentos sobre ese diagrama, observa sus resultados, se asegura de que experimentos similares realizados sobre cualquier diagrama construido de acuerdo con el mismo precepto tendrían los mismos resultados, y expresa esto en términos generales". Peirce, Ch. S. (2007). *La lógica considerada como semiótica*. Madrid: Biblioteca Nueva, p. 45.

20. Bueno, G. (2009). "Poemas y teoremas", p. 2.

21. Bueno, G. (2000). "Las matemáticas como disciplina científica", p. 57. Bueno, G. (1992). *Teoría del cierre…*, p. 399.

núm. 175 (2018), pp. 163-184
ISSN 0210-8550 | **Berceo**

cado irá transformándose hasta llegar a "el que *manipula* las *x* de la ecuación". Como ha remarcado el etnometodólogo Eric Livingston, el trabajo artesanal de cuaderno y de pizarra compone el curso del razonamiento matemático, aunque este curso zigzagueante con tachaduras y correcciones se relegue al presentar la solución, y donde "es la presencia corpórea de dos matemáticos trabajando en la pizarra lo que les permite hallar, en los escritos y el habla del otro, la cosa real"[22], como puede apreciarse precisamente en la esquina inferior derecha de *La Escuela de Atenas* de Rafael[23].

— Por último, la matemática y la lógica (que en principio no tendría ninguna clase de ascendiente sobre las matemáticas) son, desde luego, cánones de la racionalidad, pero no porque sean la trama *a priori* del Cosmos, sino porque son artefactos fabricados por los hombres sobre el papel o la pizarra que siempre portamos *a mano*. El privilegio de las formas lógicas o matemáticas no descansa en ningún postulado platónico o pitagórico, sino en su extrema sencillez. Son marcas practicadas con las manos, trascendentales en sentido positivo, porque allá donde haya un hombre podrá trazarlas[24].

4. EL CIERRE DE LAS MATEMÁTICAS

En el punto anterior hemos comenzado a explorar el espacio gnoseológico de las matemáticas[25]. Entre los accidentes del campo de las matemáticas destaca lo que la teoría del cierre categorial denomina *contextos determinantes*, es decir, aquellas configuraciones que posibilitan las construccio-

22. Lynch, M., Livingston, E. y Garfinkel, H. (1983). "Temporal Order in Laboratory Work". En K. Knorr-Cetina y M. Mulkay (eds.), *Science Observed*. Londres: Sage, pp. 163-185, p. 176. Y véase también: Livingston, E. (1986). *The Ethnomethodological Foundations of Mathematics*. Londres: Routledge.

23. Ahora bien, ¿sería posible una matemática más mental que corporal, una matemática hablada (sin manos, sin pizarras)? Nuestra respuesta es contundente: no. Pero, se dirá, ha habido grandes matemáticos ciegos. Por ejemplo: Euler, que pasó los últimos diecisiete años de vida privado de visión. Cierto, pero Euler gozaba de una memoria prodigiosa y podría aducirse –como sugiere Bueno, G. (1992). *Teoría del cierre…*, p. 486; Bueno, G. (2000). "Las matemáticas como…", p. 67– que seguía el razonamiento empleando su memoria como pizarra, esto es, que *simulaba* las operaciones quirúrgicas, al igual que el ajedrecista experto reproduce en su cabeza el tablero y la posición de una partida. Y así lo atestiguaba Einstein, cf. Penrose, R. (2006). *La nueva mente del Emperador*. Barcelona: De Bolsillo, pp. 603-604. Por su parte, Ian Hacking mantiene que lo mismo vale para Stephen Hawking, al que su enfermedad no le dejaba dibujar diagramas, pero que también los habría interiorizado. Cf. Hacking, I. (2013). "Review of *Hawking Incorporated: Stephen Hawking and the Anthropology of the Knowing Subject*". *Common Knowledge* 19/3, pp. 553-554.

24. Bueno, G. (1982). "El cierre categorial aplicado…", p. 169.

25. Puede consultarse la disección pormenorizada del espacio gnoseológico de las matemáticas en sus figuras sintácticas, semánticas y pragmáticas en Madrid Casado, C. M. (2009). "Filosofía de las Matemáticas…", pp. 33-35.

nes matemáticas. En la geometría euclidiana, por ejemplo, la circunferencia (asociada al compás) o el triángulo (asociado a la escuadra y el cartabón) funcionan como contextos determinantes, porque es usándolos como Euclides prueba la mayoría de teoremas. La circunferencia se emplea, ya en el teorema I del Libro I, para construir un triángulo equilátero sobre un segmento dado. Y los triángulos constituyen las mallas o triangulaciones con que se calculan las áreas de numerosas figuras[26].

Gracias a los contextos determinantes, los matemáticos producen teoremas, es decir, verdades[27]. Pero, ¿qué es la verdad en matemáticas? Frente a las teorías clásicas de la verdad como adecuación y como coherencia, la teoría del cierre categorial propone la teoría de la verdad como *identidad sintética*, pensada para cubrir tanto a las ciencias *formales* como a las ciencias naturales, etológicas y sociales. La idea de identidad se opone tanto a la idea de adecuación como a la idea de coherencia, porque un hipercubo o un cubo de Hilbert no se adecúan a nada (salvo que nos hagamos neoplatónicos) y porque la coherencia de los teoremas con los principios (definiciones, axiomas, postulados) es siempre posterior, ya que los principios aparecen –por paradójico que parezca– al final, cuando el campo se reorganiza axiomáticamente: el orden histórico no coincide con el orden axiomático (el método genético precede al método axiomático).

Pues bien, si presuponemos la concepción del conocimiento matemático del materialismo formalista, según la cual la actividad cognoscitiva del matemático es constitutiva de los objetos matemáticos (*matemática* = *saber hacer*), las verdades matemáticas aparecen cuando dos o más cursos operatorios independientes intersecan según una relación de identidad entre ciertos eslabones de cadenas de términos. Simplificando: si asumimos que el teorema matemático toma la forma $A = B$, su verdad consiste en la confluencia del curso operatorio que conduce a A con el curso operatorio que conduce a B[28].

La verdad en matemáticas es más un ejercicio que una representación y, desde luego, "como prototipo de esta intrincación y concatenación entre las construcciones objetuales y las construcciones proposicionales –apunta Gustavo Bueno–, tomaremos el proceso que se describe en el Libro I de Euclides y que culmina en el teorema 47 (el teorema de Pitágoras)"[29]. En efec-

26. Bueno, G. (1992). *Teoría del cierre…*, p. 135.

27. En matemáticas se dan los cuatro modos de convergencia en teoremas, i.e., en verdades, que distingue la teoría del cierre: tenemos *definiciones* (como las de los números reales de Cantor o Dedekind, que son antes un punto de llegada que un punto de partida), *demostraciones* (el teorema de Pitágoras), *clasificaciones* (la de los movimientos del plano en traslaciones, giros y simetrías) y *modelos* (los sólidos platónicos y arquimedianos).

28. No es inusual que en matemáticas para demostrar $A = B$ (una identidad trigonométrica, por ejemplo), un curso consista en transformar A en C y otro curso en transformar B en C, porque dos términos iguales a un tercero son iguales entre sí.

29. Bueno, G. (1992). *Teoría del cierre…*, p. 132.

to, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos, porque el curso operatorio consistente en construir los cuadrados sobre los catetos termina identificándose con el curso operatorio consistente en construir el cuadrado sobre la hipotenusa del triángulo rectángulo gracias a una dinámica de modificaciones sucesivas de triángulos equivalentes. Mediante una secuencia de congruencias de triángulos se transforman los cuadrados sobre los catetos en dos rectángulos que al encajarse componen el cuadrado sobre la hipotenusa.

Otro ejemplo: la verdad de la fórmula del área del círculo $S = \pi r^2$ descansa, según la demostró Arquímedes empleando el método de exhausción, en la coincidencia entre el curso operatorio que aproxima el área del círculo mediante polígonos inscritos y el curso operatorio independiente que la aproxima mediante polígonos circunscritos. Podría aducirse que para calcular el área del círculo basta con uno de los dos procedimientos, pues ambos dan idéntico resultado; pero, entonces, ¿cómo se sabe que se ha calculado el área del círculo y no de una figura algo menor o, recíprocamente, si se ha empleado el otro procedimiento, de una figura ligeramente mayor? La igualdad era para Arquímedes la prueba de que había calculado exactamente el área del círculo y no de otra figura[30].

Podría objetarse que en matemáticas no hace falta demostrar lo mismo dos veces. Basta con una. Y, por tanto, sobra con la demostración que del teorema de Pitágoras dio Euclides (la cual ya contiene en sí misma la identidad entre dos cursos operatorios independientes en que hacemos consistir la verdad científica). Pero cuando los teoremas se demuestran mediante cursos de operaciones heterogéneos se convierten en auténticos nudos de la red matemática, en el sentido de que su franja de verdad aumenta (no porque su valor de verdad formal cambie, sino porque su verdad en sentido material engrosa, al concatenar o engranar cada vez más fenómenos). Sólo así puede explicarse que el teorema de Pitágoras conozca más de 300 demostraciones distintas (lo que está lejos de ser un pasatiempo), o que el teorema del punto fijo de Brouwer fuese originariamente demostrado usando técnicas topológicas, pero que su conversión en piedra angular de la matemática moderna se fraguase gracias a las demostraciones usando técnicas analíticas, que permitieron su extensión a otros dominios.

Cuando el polvo de la batalla se asienta, el cúmulo de identidades sintetizadas cristaliza en un cierre categorial, es decir, en una organización inmanente del campo de esa disciplina. La noción de *cierre categorial* proviene, como ya se ha señalado, de la matemática, en donde se dice que una operación $\otimes$ es cerrada en una estructura $\mathfrak{I}$ si para cualesquiera x, y

30. Como ejemplo canónico de verdad como identidad sintética Gustavo Bueno recurría a la determinación del área del círculo mediante su descomposición, por un lado, en partes triangulares y, por otro lado, en partes rectangulares, que confluyen en un mismo valor: πr^2. Bueno, G. (1995). ¿Qué es la ciencia?, p. 68ss.

Berceo | núm. 175 (2018), pp. 163-184
ISSN 0210-8550

$\in \mathfrak{I}$ se tiene que $x \otimes y \in \mathfrak{I}$. Cada ciencia es una multiplicidad de términos que, mediante operaciones por parte de los científicos, se componen unos con otros hasta configurar relaciones de identidad (verdades), que al irse anudando unas con otras *cierran* el campo ("operar en la ciencia *X* queda en la ciencia *X*, como sumar números naturales queda en el conjunto de números naturales") y certifican que esa disciplina es *de facto* una ciencia y una nueva categoría (porque para el materialismo filosófico no hay tantas ciencias como categorías, sino tantas categorías como ciencias).

En puridad, para Gustavo Bueno, no hay matemática sino matemáti-ca*s* (geometría, aritmética, álgebra, análisis, cálculo de probabilidades…), donde cada ciencia matemática porta su cierre categorial como marca de nacimiento[31]. La distinción entre ciencias matemáticas es categórica, mientras que su unidad viene dada por la historia (y no sólo por la naturaleza artificiosa de sus objetos). Esta visión pluralista de las matemáticas de Bueno es compartida por De Lorenzo (que habla de una multiplicidad de haceres y estilos matemáticos), así como por Kitcher (aunque este último, dada su orientación proposicionalista, se inclina por un pluralismo más continuista que discontinuista, al buscar probar la transición suave entre haceres y no sólo su coexistencia)[32]. Esta visión *anomalista* de las matemáticas se opone a la visión *analogista*, empeñada en reducir todas las ciencias matemáticas a teoría de conjuntos o a estructuras axiomáticas bien hechas (Bourbaki).

Es pertinente señalar que para Bueno esta situación también se da entre las ciencias físicas (por ejemplo, entre la teoría de la relatividad y la mecánica cuántica) o entre las ciencias biológicas (entre genética y ecología), pero que entre las ciencias matemáticas es, si cabe, menos acusada; porque de la aceptación de la existencia de revoluciones en las ciencias matemáticas (cuando se hacen consustanciales al cierre categorial) no se sigue necesariamente la tesis kuhniana de inconmensurabilidad entre ciencias matemáticas: cada ciencia matemática surge de la transformación de otras ciencias o técnicas matemáticas previas (aunque aquí, al igual que en el análisis, continuidad no quiere decir suavidad, *derivabilidad*) y, por ejemplo, la geometría riemanniana permitió reconstruir en un mismo marco la vieja geometría euclídea y las nuevas geometrías no euclídeas[33].

31. Bueno, G. (2000). "Las matemáticas como…", pp. 70-71.

32. De Lorenzo, J. (1971). *Introducción al estilo matemático*. Madrid: Tecnos. Kitcher, Ph. (1983). *The Nature of Mathematical Knowledge*. Oxford: Oxford UP.

33. Bueno, G. (1992). *Teoría del cierre…*, p. 675. Añadamos que en matemáticas se dan las cinco situaciones de cristalización de una ciencia que distingue la teoría del cierre: por *construcción* de un campo nuevo a coordinar con los precedentes (la geometría griega), por *segregación interna* de una ciencia respecto de otras ciencias (la aritmética, respecto de la geometría), por *inflexión* dentro de una misma categoría (el álgebra, en virtud de la introducción de letras en la aritmética), por *composición* o *intersección* de categorías (el análisis, en cuanto suma del cálculo diferencial –o de tangentes– y el cálculo integral –o de cuadraturas–, pero también la geometría analítica o la geometría algebraica) y por *segregación oblicua*, esto es,

5. LA IRRAZONABLE EFECTIVIDAD DE LAS MATEMÁTICAS

Para el físico y matemático Eugene P. Wigner no había una explicación racional de la efectividad de las matemáticas en las ciencias naturales[34]. Se trataba, a su juicio, de un regalo que los seres humanos no merecemos ni entendemos. Ya en su día, remedando a los pitagóricos, Galileo explicó el pronto éxito de la *nueva ciencia* concibiendo la naturaleza como Universo matemático. No está de más traer a la memoria el célebre pasaje que escribió en *El Ensayador*, de 1623:

> La filosofía está escrita en ese grandísimo libro que continuamente está abierto ante nuestros ojos, quiero decir el Universo, pero no se puede entender si antes no se aprende a comprender su lengua y a conocer los caracteres en que está escrito. Está escrito en lengua matemática y los caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin cuya ayuda es humanamente imposible entender nada, sin éstas es como girar vanamente por un oscuro laberinto.

Físicos de todos los tiempos no han dejado de expresar su asombro ante la adecuación entre la materia física y las formas matemáticas, llegando a imaginar que Dios es matemático (James Jeans) o que el Cosmos es una estructura matemática en sí misma (Einstein, Dirac, Penrose, Max Tegmark).

¿Cómo resuelve cada filosofía de las matemáticas este presunto milagro? ¿Cuál es el estatuto de la matemática? ¿Es la colección de objetos matemáticos universal o particular? ¿Es el conocimiento matemático formal o material? Podemos esbozar el siguiente cuadro que recoge las cuatro posibles posiciones ante el dilema[35]:

---

por aplicación de una ciencia sobre otro campo (el cálculo de probabilidades y la estadística). Las ciencias matemáticas no son, ni mucho menos, un sistema, sino una totalidad distributiva (no atributiva) arracimada en una suerte de árbol filogenético desde sus antecedentes técnicos.

34. Wigner, E. P. (1960). "The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences". *Communications on pure and applied mathematics* XIII, pp. 1-14.

35. Hablamos de dilema por su similitud con el famoso "dilema de Benacerraf": si las matemáticas son universales, nosotros (seres contingentes) no podemos conocerlas; y si las conocemos, es que no son sino particulares. El cuerno ontológico del dilema pide que los objetos matemáticos no sean físicos ni mentales, y el cuerno epistemológico pide que lo sean para que los hombres podamos interactuar con ellos. Bueno, al igual que De Lorenzo, critica a Benacerraf que el dilema está planteado desde una perspectiva gnoseológica adecuacionista de la verdad matemática (como conexión entre los matemáticos y los objetos matemáticos) y que, por tanto, desde una perspectiva materialista, no hay tal dilema; porque lo fundamental en matemáticas no es la interacción causal sujeto-objeto. Cuando respondemos a la pregunta "¿por qué en un triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos?", no pretendemos haber encontrado la causa sino la razón (que se define por afectar a una clase, no sólo a un individuo, y estar dada al margen de una localización espacio-temporal). Benacerraf, P. (1973). "Mathematical truth". *Journal of Philosophy* 70, pp. 661-679. Bueno, G. (2000), "Las matemáticas como…", p. 61. De Lorenzo, J. (1992). "Matemática y filosofía: sus 'nefastas' influencias mutuas ('nuevas' filosofías de la matemática)". *El Basilisco* 13, pp. 8-9.

Berceo | *núm. 175 (2018), pp. 163-184*
ISSN 0210-8550

	UNIVERSAL	**PARTICULAR**
FORMAL	Platonismo-Logicismo	Intuicionismo
MATERIAL	Materialismo Formalista	Formalismo

Tabla 2

En efecto, para el platónico y el logicista la matemática es universal-formal. Universal porque sus objetos –sean de carácter matemático o lógico– son, en cualquier caso, *universales*. Formal porque el conocimiento matemático nos acerca, pase lo que pase, a las formas –matemáticas o lógicas– que ordenan el mundo. Por ejemplo, la geometría euclídea es, para Platón como para Frege, verdadera y dictamina a qué leyes debe plegarse el espacio ordinario, qué forma debe adoptar.

El intuicionista critica al platónico y al logicista que conciba las verdades matemáticas como independientes, como resultados que están ahí, esperando a ser descubiertos. Consecuentemente, declara que la matemática es particular-formal, primando la capacidad mental del matemático para inventar nuevas formas matemáticas. Así, hablando de geometrías (en plural), Poincaré defiende el convencionalismo y afirma que carece de sentido preguntarse cuál geometría es la verdadera. Por su parte, el formalista concibe la matemática como particular-material, en su expresión más débil. La geometría, como la aritmética o el álgebra, se convierte en un sistema axiomático, en una cadena de signos entre otras.

Hasta donde se nos alcanza, el acierto del materialismo formalista de Gustavo Bueno consiste en haber alumbrado esa cuarta opción *universal-material* que hasta entonces había estado difuminada. Bueno defiende la universalidad de los teoremas matemáticos sin recaer en la metafísica. Que la *universalidad* que atribuye a las matemáticas no sea *formal* sino *material* no implica menoscabo alguno en su grado de objetividad. Se trata de una universalidad operacional, basada en las operaciones de un *sujeto corpóreo* (con manos, laringe y músculos estriados) y no en las operaciones de un *sujeto metafísico* (dotado de alma o mente). Los teoremas matemáticos no están depositados en el cielo o en el pensamiento, sino soportados sobre sus privilegiadas manifestaciones tipográficas. Por consiguiente, la geometría –incluso cuando trabaja con espacios multidimensionales– no es sino la construcción de un campo científico confinado en un espacio de dos dimensiones (el plano del papel o la pizarra) por parte de un grupo de hombres dedicados a ensamblar ideogramas. E insistimos en una idea que ya apuntamos anteriormente: la universalidad del teorema de Pitágoras no se sustenta en la repetibilidad del diagrama original, sino en la recurrencia de los procesos internos de construcción de cada diagrama, que conducen a la síntesis de esta identidad. La relación intemporal de identidad que nos arroja el teorema se funda en el levantamiento operatorio de esa figura artificiosa que es el *molino*: "si las relaciones obtenidas sobre términos gráficos singulares M_1 pueden asumir un carácter universal es debido a la capacidad

núm. 175 (2018), pp. 163-184
ISSN 0210-8550
Berceo

para reproducirse indefinidamente *por obra del sujeto operatorio* M_2 en cualquier dominio del espacio-2 infinito (es decir, en M_3)”[36]. La conexión entre los géneros de materialidad está, pues, a la raíz del misterio de la irrazonable efectividad de las matemáticas.

Es sugestivo caer en la cuenta de que cosmólogos actuales interesados en el principio antrópico –como Tegmark[37]– explican de manera similar el milagro de la efectividad de las matemáticas en nuestro mundo (sin perjuicio de que deliren cuando posteriormente extrapolan sus ideas al Multiverso). Un Universo donde las matemáticas no funcionasen sería un Universo donde las reglas y los relojes se dilatarían caóticamente, como en un cuadro de Salvador Dalí, de modo que sería imposible realizar cualquier medición o cálculo. Ahora bien, en esa clase de mundo no podría haber observadores que constatasen la inefectividad de las matemáticas. En consecuencia, mirando ahora a nuestro Universo, las condiciones para la existencia de seres corpóreos como nosotros están detrás de la efectividad de las matemáticas. Como puede comprobarse, el carácter antrópico de este argumento, ligado a la escala del sujeto operatorio, no es extraño al materialismo filosófico y posee su fulcro de verdad.

Nuestra tesis es, atención, que no es que el Libro de la Naturaleza esté escrito en caracteres matemáticos, como quería Galileo, sino que los científicos escriben el Libro de la Naturaleza usando caracteres matemáticos. Como la matemática se usa en ciencia desde su origen en Grecia, su uso parece *natural*. Tanto los científicos como los aparatos y las máquinas del laboratorio inscriben compulsivamente, y la matemática es la ciencia de las inscripciones por excelencia. Es más, las propias matemáticas se han extendido por el mundo gracias a las técnicas y las tecnologías: basta mirar en derredor nuestro para ver rectas, rectángulos, poliedros… Pero con el transcurso del tiempo esas técnicas y tecnologías se han vuelto transparentes, dando lugar a las especulaciones del racionalismo cientificista sobre si el mundo es matemático[38].

Para Bueno, en vez de decir que las cónicas de Apolonio se aplican a las trayectorias planetarias, hay que decir que las trayectorias planetarias se proyectan sobre una superficie (la arena de una playa, la pizarra, el papel o la pantalla de un ordenador) para, de este modo, integrarse en un sistema de curvas determinadas (de hecho, es sobre el plano del papel o la pizarra donde se visualizan las órbitas planetarias)[39]. Esto es, para la teoría del cierre

36. Bueno, G. (2009). “Poemas y teoremas”, p. 2 [énfasis nuestro].

37. Tegmark, M. (2008). “The Mathematical Universe”. *Foundations of Physics* 38, pp. 101-150.

38. Cf. Latour, B. (1992). *Ciencia en acción. Cómo seguir a los científicos e ingenieros a través de la sociedad*. Barcelona: Labor, pp. 216 y 230-231.

39. Bueno, G. (2000). “Las matemáticas como…”, pp. 68-69.

categorial, no es que las matemáticas se apliquen al mundo real, más bien es que ciertas partes del mundo real se integran en el campo de las matemáticas por medio de ciertas operaciones (como, en el caso de las cónicas planetarias, la proyección). Durante la Revolución Científica acaecida entre los siglos XVI y XVIII, el globo terrestre, buena parte del mundo supralunar y un buen pedazo del mundo sublunar encontraron acomodo en el seno de las matemáticas gracias a las operaciones desplegadas por cosmógrafos, astrónomos, mecánicos, químicos, etc. No obstante, hay partes del mundo que no se integran en el campo de las matemáticas (muchos sucesos no tienen expresión matemática), así como recíprocamente (hay muchos conceptos matemáticos sin correlato factual)[40]. Miramos a la realidad a la luz del farol de las matemáticas, no porque con esta luz penetremos en el fondo de la realidad (como si estuviera escrita en caracteres aritméticos o geométricos), sino porque con esta luz percibimos contornos de conglomerados cerrados, coordinables con el recorte que nuestras manipulaciones operan en el mundo[41].

A nuestro juicio, esta manera de argumentar es el modo de salvar la paradoja que Wigner[42] apuntaba: cuando dos antiguos compañeros de pupitre volvieron a verse pasados los años, uno de ellos, que era matemático, quiso contarle al otro en qué trabajaba y le explicó que estudiaba tendencias en grandes poblaciones y que estas se ajustaban a la campana de Gauss. El otro compañero, cuando vio que la fórmula de la campana de Gauss implicaba al número π, no pudo reprimir una sonrisa y espetarle incrédulo: ¿no me estarás gastando una broma? ¿qué tiene que ver la población con la longitud de la circunferencia? Esta conexión inesperada sólo es sorprendente *a priori*; porque *a posteriori* puede trazarse la genealogía de la conexión, siendo esta reconstrucción histórica el antídoto para no dejarse seducir por la retórica del milagro de la efectividad de las matemáticas (π entra en la teoría estadística para normalizar o estandarizar –una operación humana– la distribución gaussiana). Por decirlo con Bueno: "El que no es matemático –decía Aristóteles– se asombra de la inconmensurabilidad de la diagonal y del lado del cuadrado; el matemático, se asombra del asombro de quien no es matemático"[43].

6. CONCLUSIÓN: LA AMPLIACIÓN HIPERREALISTA DEL MUNDO

"Los términos del campo de las matemáticas no *preexisten* al proceso de su construcción", afirma Gustavo Bueno[44]. Los números complejos, reales, racionales y enteros son obra del hombre. Ni siquiera los números naturales

40. Ibídem.

41. Bueno, G. (1992). *Teoría del cierre…*, p. 900.

42. Wigner, E. P. (1960). "The unreasonable…", p. 1.

43. Bueno, G. (1992). *Teoría del cierre…*, p. 882.

44. Bueno, G. (2000). "Las matemáticas como…", p. 66.

núm. 175 (2018), pp. 163-184
ISSN 0210-8550 | ***Berceo***

preexisten a las operaciones de contar u ordenar. Quizá esta afirmación se torne menos sospechosa si pensamos que el cero fue desconocido por griegos y romanos. Pero estos conjuntos numéricos determinados, desde luego, por el hombre, se terminan enajenando de él y ganando autonomía hasta el punto de que, por ejemplo, existe una infinidad de números naturales, más de los que ningún hombre o ninguna máquina contará jamás. Las relaciones matemáticas no son genéticamente independientes del sujeto que las establece, del ideograma que levanta, aunque la estructura de relaciones, una vez dada, permite segregar al sujeto, pues esas relaciones entre términos resultan ser invariantes de las operaciones[45]. Cabe decir que constituyen una nueva realidad, que son *hiperrealidades*. Mismamente, en estadística, la noción de una población como una cifra exacta conforma otra *hiperrealidad*, ya que apenas tuvo sentido hasta que no hubo instituciones estadísticas encargadas de definir lo que significa y de establecer con precisión cómo estimar el número de habitantes, votantes, parados o consumidores satisfechos de un país.

En física también nos encontramos con hiperrealidades, como los electrones o las galaxias; en química, el oxígeno o el tecnecio; en biología, las células o las especies darwinianas; etc. A la manera que el músico produce con el órgano nuevos sonidos que no existen previamente en la naturaleza, el científico construye nuevas entidades que hay que considerar *hiperreales*. Desde las coordenadas del materialismo filosófico, estas hiperrealidades no son descubrimientos manifestativos (nadie las había escondido), pero tampoco inventos: son *descubrimientos constitutivos*, que provienen de la transformación de múltiples materiales y, por tanto, bajo ciertas condiciones que tienen que ver la neutralización de operaciones y el establecimiento de verdades como identidad sintética, son reales, a pesar de que su existencia no pueda imaginarse al margen de ciertos aparatos y operaciones, ya que sin ellos son indetectables e incognoscibles. Curiosamente, lo que cuesta poco afirmarlo para los números reales o los vectores, cuesta mucho más para los elementos químicos o las partículas subatómicas[46].

Regresando al campo de las matemáticas y a la dicotomía invento/descubrimiento, Bueno plantea que:

45. Bueno, G. (2000). "Las matemáticas como…", p. 64.

46. El mundo cuántico –las nuevas partículas– se nos aparece, desde la teoría del cierre, como una hiperrealidad, es decir, como una ampliación de la realidad determinada por los físicos operando con máquinas a altas energías, que a su vez se nos aparecen como las cajas de las esencias cuánticas (la función de contextos determinantes la cumplen aquí los aceleradores de partículas, las cámaras de burbujas, etc.). Persiguiendo una interpretación materialista de la física cuántica, Gustavo Bueno reconstruye parte de la filosofía de Niels Bohr, que ya el Diccionario Soviético de Filosofía (1965) calificaba de materialista (http://www.filosofia.org/enc/ros/bohr.htm [Consulta: 1 de marzo de 2018]). Cf. Madrid Casado, C. M. (2008). "Filosofía de la Física. El cierre de la Mecánica Cuántica". *El Basilisco* 39, pp. 67–112.

Berceo | *núm. 175 (2018), pp. 163-184*
ISSN 0210-8550

> La disciplina matemática, y esta sería su paradoja, es un proceso estrictamente *cultural*, que se resuelve en la concepción de *estructuras* que ya no pueden ser consideradas ni siquiera como contenidos de la "Cultura" (aunque tampoco sean contenidos de la "Naturaleza")[47].

En efecto, si las estructuras matemáticas fuesen culturales, ¿a qué cultura pertenecen? ¿Acaso el teorema de Pitágoras no se desprendió de la cultura griega y es válido para todas las culturas? Pero, recíprocamente, si las estructuras matemáticas fuesen naturales, ¿dónde están? ¿Acaso los números *naturales*, los triángulos rectángulos o el espacio proyectivo se encuentran en la naturaleza? Es la disyuntiva Naturaleza/Cultura, como la dicotomía descubrimiento/invento, la que tiene que ser desbordada por superficial. Los contenidos matemáticos forman parte de una tercera clase más allá de la Naturaleza y de la Cultura: "Son estructuras transculturales, noemáticas, terciogenéricas"[48].

Gustavo Bueno[49] desarrolla la noción de *hiperrealismo* para poner de relieve que la realidad no es algo perfecto, acabado, sino algo infecto, *in fieri*, que se va haciendo. Porque el mundo no está dado de una vez por todas, ya que las ciencias y las técnicas, partiendo de los lineamientos arcaicos, contribuyen a cambiarlo y ampliarlo, conformando una suerte de realidad extendida o hiperrealidad. No hay por qué pensar que las ternas pitagóricas, los números complejos o las ondas electromagnéticas estaban ya presentes al conocimiento de los hombres del Paleolítico, con anterioridad a la cristalización de las ciencias. A resultas de esto, asoma una *ontología histórica*, donde tiene sentido hablar de la historia de los objetos científicos y, en concreto, de los objetos matemáticos; porque las unidades morfológicas de la realidad no son sustancias o cosas fijas sino *estromas*, tejidos o tapices cambiantes que recubren el mundo tangible que nos circunda.

47. Bueno, G. (2000). "Las matemáticas como…", p. 51.

48. Bueno, G. (2004). *El Mito de la Cultura*. Barcelona: Prensa Ibérica, pp. 219-220.

49. Bueno, G. (1992). *Teoría del cierre…*, pp. 854-912.

00175

9 770210 855004

BERCEO 175

Calidad de Revistas Científicas Españolas
FECYT | FUNDACIÓN ESPAÑOLA PARA LA CIENCIA Y LA TECNOLOGÍA | 2016

Gobierno de La Rioja
www.larioja.org

Instituto de Estudios Riojanos