

# Un estudio de la instrumentación de la noción de simetría axial por medio del uso del Geogebra

Um estudo da instrumentação da noção de simetria axial pelo uso do Geogebra

A study of the instrumentation of the axial symmetry using Geogebra software

---

DAYSÍ JULISSA GARCÍA CUÉLLAR<sup>1</sup>

JESÚS VICTORIA FLORES SALAZAR<sup>2</sup>

## Resumen

*La presente investigación tiene como objetivo analizar el proceso de génesis instrumental, específicamente observar la instrumentación de la noción de simetría axial cuando se utiliza el ambiente de geometría dinámica Geogebra en una estudiante de 12 años de edad. Tomamos como marco teórico al Enfoque Instrumental de Rabardel y como metodología de investigación el estudio de casos. Como nos centramos en la instrumentación, usamos la noción de esquemas de utilización para analizar los posibles esquemas que movilizan la estudiante al desarrollar las actividades propuestas. Como resultado de las acciones inferimos que la estudiante logró instrumentar la noción y las propiedades de la simetría axial.*

**Palabras claves:** Simetría axial; Instrumentación; Geogebra.

## Resumo

*A presente pesquisa tem como objetivo analisar o processo de Gênese Instrumental, especificamente observar a instrumentação da noção da simetria axial quando usamos um ambiente de geometria dinâmica Geogebra em uma estudante de 12 anos de idade. Tivemos como referencial teórico a Abordagem Instrumental de Rabardel e como metodologia o estudo de casos. Nós nos centramos na parte da instrumentação para isso usamos a noção de esquemas de utilização para analisar os possíveis esquemas que mobilizem a estudante ao desenvolver as atividades propostas. Como resultado das ações, inferimos que a estudante logrou instrumentar a noção e as propriedades da simetria axial.*

**Palavras-chaves:** Simetria axial; Instrumentação; Geogebra.

## Abstract

*This research has the objective to analyze the Instrumental Genesis process, specifically to observe the instrumentation of the axial symmetry when using the dynamic geometry environment Geogebra in a 12 years old student. For this study, we have taken a theoretical framework from the Instrumental Approach of Rabardel and as a methodological framework the Case Study Research. Since we focused on the instrumentation, we have used the notion of utilization schemes to analyze the possible schemes that student mobilize when doing the activities proposed. The result of the actions, we infer that the student managed to instrumentation the notion and the properties of the axial symmetry.*

**Keywords :** Axial symmetry; Instrumentation; Geogebra.

---

<sup>1</sup>Pontificia Universidad Católica del Perú /Instituto de Investigación sobre Enseñanza de las Matemáticas – IREM-PUCP – [garcia.daysi@pucp.pe](mailto:garcia.daysi@pucp.pe)

<sup>2</sup>Pontificia Universidad Católica del Perú/ Maestría en Enseñanza de las Matemáticas – [jvflores@pucp.pe](mailto:jvflores@pucp.pe)

## 1. El porqué de nuestra investigación

De acuerdo con García-Cuéllar (2014), la enseñanza de la geometría es uno de los retos de los docentes peruanos en la actualidad, dado que es una de las ramas de la matemática que a pesar de estar presente en el Diseño Curricular Nacional (DCN, 2009) pensamos que está siendo desarrollada de manera superficial por el poco tiempo que se le dedica en las aulas y/o tiene carencias en su enseñanza, así como lo menciona el Ministerio de Educación del Perú (MINEDU),

Se ha observado que los docentes desarrollan en menor tiempo y con menor profundidad las capacidades referidas a geometría. Si consideramos que las experiencias de aprendizaje no se circunscriben únicamente al último grado que se está cursando, sino que son la acumulación integradora de las experiencias a lo largo de toda la escolaridad, el que no se trabaje la geometría con el tiempo y la profundidad requeridas desde los grados anteriores puede ser una de las causas que influye negativamente en el aprendizaje de los estudiantes en este eje (MINEDU, 2005, p. 98).

Por otro lado, diversas investigaciones en Educación Matemática tratan sobre los problemas presentes en la enseñanza y aprendizaje de esta rama de la matemática. Sin embargo, Ferreira (2005) realizó un estudio de las isometrías dando énfasis a la simetría donde hace un análisis en los documentos curriculares como la Propuesta Curricular Nacional del Brasil, también analiza las actividades que algunos textos escolares presentan nociones de isometrías y con ello el estudio de la simetría, la investigadora manifiesta que no hay un estudio profundo de la noción de simetría en los textos escolares y que es abordada como una función biyectiva. Por ello, menciona que la simetría es uno de los contenidos que no se profundiza en los libros de textos escolares del nivel medio en Brasil y que es necesario realizar más estudio. Este problema no es indiferente al Perú, además este estudio corrobora que existe una problemática en la enseñanza y aprendizaje en este objeto matemático.

Asimismo, investigaciones como las de Jaime (1993), Ferreira (2005) y Ulian (2008) muestran que existe una problemática en la enseñanza y en el aprendizaje de la noción de simetría y otras investigaciones como las de Salazar (2009) y Trouche (2003) nos brindan información sobre el papel que tiene el uso de la tecnología informática en el aprendizaje de la geometría, pues, por medio de los softwares, específicamente de los software de geometría dinámica, los estudiantes pueden hacer conjeturas, verificar hipótesis, etc.

En la misma línea de pensamiento, la investigación de Gallegos y Peña (2012) muestra

que en las últimas décadas, muchas pesquisas en el área de Educación Matemáticas se centran en el uso de estas herramientas para la enseñanza y el aprendizaje de contenidos matemáticos. Precisamente ellos afirman que,

La integración y utilización de las tecnologías en el proceso educativo de matemáticas es un asunto que viene ocupando el trabajo de los investigadores en educación matemática. Las investigaciones tratan de determinar los posibles beneficios que la utilización de las tecnologías conlleva, así como diversas metodologías y entornos interactivos multimedia de aprendizaje que produzcan mejoras en los procesos de enseñanza y aprendizaje (Gallegos y Peña, 2012, p.11).

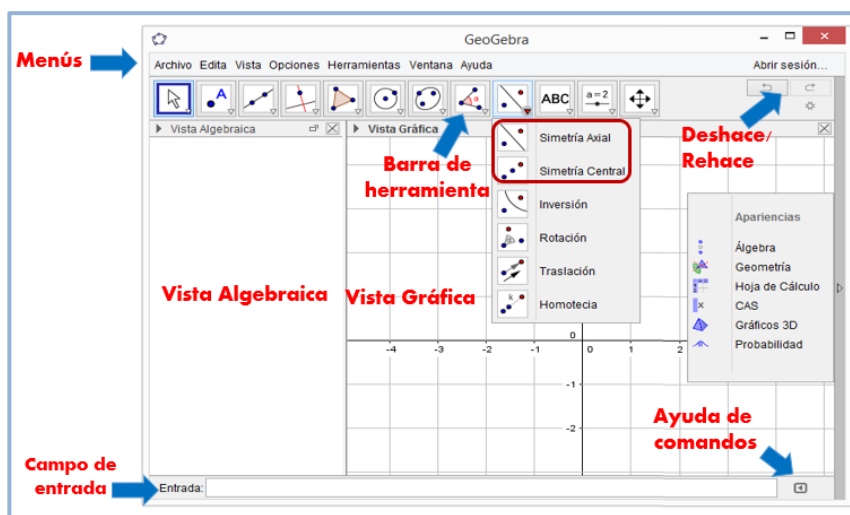
Además de esta investigación, el Ministerio de Educación del Perú en sus Orientaciones para el trabajo pedagógico (2007) también menciona la pertinencia del uso de la tecnología especialmente para la geometría,

[...]La tecnología desempeña también un papel importante en la enseñanza y el aprendizaje de la geometría. Herramientas como un programa informático de “Geometría dinámica”, capacitan para modelizar una gran variedad de figuras de dos dimensiones y para tener una experiencia interactiva con ellas. La visualización y el razonamiento espacial se enriquecen mediante la interacción con animaciones de ordenador y en otros contextos tecnológicos (p. 30).

Como estamos interesados en el uso del software de geometría dinámica Geogebra para la enseñanza de la noción de simetría axial, dado que este software proporciona subsidios para el estudio de este objeto matemático, a continuación lo presentamos:

Este ambiente ofrece una amplia variedad de opciones para desarrollar contenidos no sólo de geometría sino también de álgebra, análisis y estadística. Es sencillo y fácil de utilizar, lo que facilita desarrollar actividades a través de las herramientas y/o recursos que ofrece. Permite abordar diferentes contenidos de geometría y otros aspectos de las matemáticas, a través de la experimentación y la manipulación de distintos elementos, permite la realización de construcciones para deducir resultados y propiedades a partir de la observación directa.

La ventana inicial de Geogebra, en su versión 5.0, presenta diferentes vistas como muestra la figura 1.



**Figura 1. Ventana inicial del Geogebra 5.0**

También, el Geogebra muestra en su barra de herramientas, una opción denominada “transformaciones” en la cual se encuentran las herramientas específicas de simetría denominadas: refleja objeto en recta (simetría axial) y refleja objeto por punto (simetría central), además de otras transformaciones geométricas.

Asimismo, consideramos pertinente presentar otras opciones de la barra de herramientas como el punto, recta perpendicular, distancia o longitud, segmento entre dos puntos, ángulos, circunferencia, intersección de dos objetos y recta que pasa por dos puntos, ya que no sólo se puede utilizar las dos herramientas (pre-definidas) sino que también se puede utilizar otras que permitan a los estudiantes apropiarse de las propiedades de la simetría axial.

En la actualidad hay un constante avance tecnológico en diversos campos científicos como el educativo. Según Prensky (2001), los estudiantes de hoy representan la primera generación que creció con esta nueva tecnología. Han pasado su vida entera rodeados por y usando computadoras, video juegos, reproductores de música digital, cámaras digitales, teléfonos celulares y todos los juguetes y herramientas de la era digital. Por ello, necesitamos de un marco teórico que nos dé soporte en el estudio de las relaciones entre los sujetos, instrumentos y conocimientos.

Por lo anterior, consideramos que el Enfoque Instrumental de Rabardel (1995) nos puede dar subsidios para identificar y analizar los posibles esquemas de utilización de los estudiantes en el proceso de Instrumentación de la simetría axial por medio de un software de Geometría Dinámica como lo es el Geogebra.

## 2. Aspectos del Enfoque Instrumental

Para nuestra investigación utilizaremos el Enfoque Instrumental como el referencial teórico dada por Rabardel (1995), ya que nos proporciona las directrices necesarias para el estudio en escenarios de enseñanza y aprendizaje con tecnologías.

Para Salazar (2009), las nociones claves de este Enfoque son las siguientes:

**Esquema:** Organización invariante de la conducta del sujeto para una clase determinada de situaciones.

**Artefacto:** Es un objeto material o abstracto, destinado a dar sustento a la actividad del sujeto en la ejecución de un cierto tipo de tarea.

**Instrumento:** Es lo que un sujeto construye a partir del artefacto (figura 2). Es entonces una entidad mixta que contiene a la vez un artefacto, material o no, y esquemas de utilización construidos por el sujeto durante su interacción.



Figura 2. Componentes del instrumento

De acuerdo a Rabardel (2011), el Enfoque Instrumental estudia la diferencia que existe entre el artefacto, instrumento y los procesos que desenvuelven la transformación progresiva del artefacto en instrumento, transformación que denominó como proceso Génesis Instrumental. El autor considera tres polos importantes en la Génesis instrumental, estos son: el sujeto, que puede ser un usuario, operario, trabajador o agente; el instrumento, que se refiere de la herramienta, máquinas, sistemas, utensilio, etc.; y el objeto, al cual va dirigida la acción con ayuda del instrumento. Este puede ser la materia prima, objeto de la actividad o trabajo.

En cuanto a la génesis instrumental, Rabardel (2011) sostiene que ésta consta de dos dimensiones: La instrumentalización y la instrumentación.

**La instrumentalización:** Está dirigida hacia la parte artefactual del instrumento, consta de enriquecimiento de las propiedades del artefacto por parte del sujeto. Es decir, es el

resultado de la atribución de una función al artefacto por parte del sujeto.

*La instrumentación:* Está dirigida hacia el sujeto. Se refiere a la construcción de esquemas de uso por parte del sujeto, relativos a la ejecución de ciertas tareas. En este proceso se lleva a cabo la asimilación de nuevos artefactos a los esquemas y la acomodación de los esquemas para dar nuevos significados a los artefactos.

Rabardel (1995) utiliza la noción de esquema redefinida por Vergnaud que menciona que un esquema es una organización invariante de la conducta del sujeto para una clase determinada de situación.

Vergnaud (1996 citado en Sureda y Otero2011) sostiene que los esquemas tienen los siguientes componentes:

1. *Metas y anticipaciones*, un esquema se dirige siempre a una clase de situaciones en las cuales el sujeto puede descubrir una posible finalidad de su actividad y, eventualmente, submetas.
2. *Reglas de acción* del tipo “si... entonces” que constituyen la parte verdaderamente generadora del esquema, aquella que permite la generación y la continuidad de secuencias de acciones del sujeto; son reglas de búsqueda de información y de control de los resultados de acción.
3. *Invariantes operatorios* (teoremas en acto y conceptos en acto). Que de acuerdo con Vergnaud (1996),

Se designan por las expresiones conceptos en acto y teoremas en acto, a los conocimientos contenidos en los esquemas; podemos igualmente designarlos por la expresión más global de invariantes operatorios (p.160)

A continuación hablaremos sobre nuestro marco metodológico y la experimentación que realizamos.

### **3. Metodología y experimentación**

El estudio tuvo como marco metodológico al estudio de Casos. Según Stake (1995), el estudio de caso es el estudio de la particularidad e de la complejidad de un caso singular, llevado a entender su actividad dentro de importantes circunstancias.

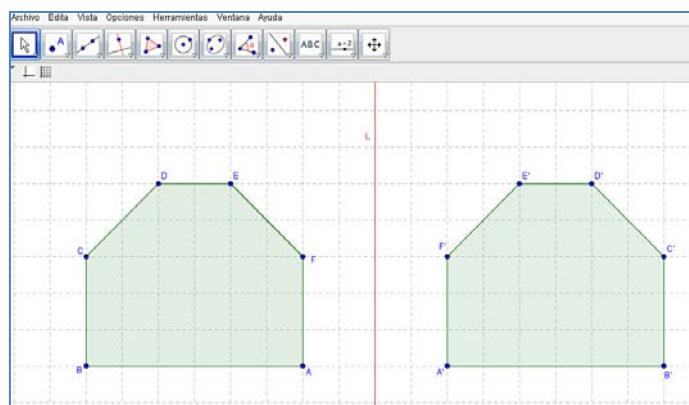
La experiencia se realizó con una estudiante de 12 años de edad que denominaremos Mayra, del primer grado de educación secundaria y no tenía conocimiento del concepto de simetría axila. La recolecta de los datos se dio en dos encuentros donde se

desarrollaron actividades de tres tipos. Las actividades de tipo 0, tenían el objetivo familiarizar a la estudiante con las herramientas del Geogebra que eran necesarias para el desarrollo de las actividades posteriores; las actividades de tipo 1, tenían el objetivo de ayudar a la estudiante a inferir las propiedades de la simetría; las actividades de tipo 2, son actividades donde se podrá observar la aplicación de la noción de simetría y sus propiedades.

Las actividades que presentamos a continuación son del tipo 1 y aplicadas en la sala de informática. En la fase exploratoria presentamos los posibles esquemas de utilización que podrían desarrollar la estudiante en cada una de las actividades propuestas, analizando así los conceptos en acto y las reglas de acción. Para el análisis de los resultados, presentamos las acciones de la estudiante.

### **ACTIVIDAD 1.1:**

En esta actividad la estudiante debía abrir un archivo donde se muestra la siguiente figura:



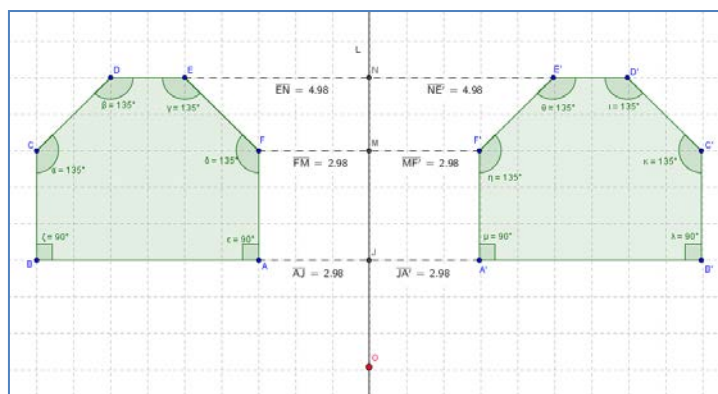
**Figura 3. Primer archivo utilizado para la actividad 1.1**

La estudiante tenía que movilizar la recta L, y responder a las preguntas ¿Explique qué sucede con las figuras cuando mueves la recta L a la izquierda o a la derecha?, ¿Qué sucede con las figuras cuando la recta L pasa por el lado FA de la primera figura?, ¿Qué ocurre cuando la recta L se ubica en la mitad del lado DE de la primera figura?

Luego, tenía que colocar la recta a tres cuadrículas a la derecha de la primera figura y trazar el segmento FF'. Luego, trazar el punto de intersección del segmento y la recta, nómbralo como punto M. Medir los segmentos FM y MF'; y responder: ¿Cómo son las medidas?

Posteriormente, tenía que medir los ángulos internos de las figuras y determinar ¿qué sucede con las medidas de los ángulos cuando movilizas la recta L?

Finalmente la estudiante debe abrir un segundo archivo de Geogebra (**figura 4**), donde puede movilizar la recta L dándole inclinación. Se pide que mueva el punto O, haciendo clic sobre él sin soltar el mouse. Debe de anotar sus observaciones sobre las conclusiones que ha llegado con respecto a la recta y las figuras



**Figura 4. Segundo archivo utilizado para la actividad 1.1**

En la actividad N° 1.1 deseamos que la estudiante identifique las propiedades que debe cumplir la recta L (eje de simetría): la equidistancia de cada uno de los puntos del polígono ABCDEF y el polígono A'B'C'D'E'F', respectivamente; Esto independientemente de la posición de la recta L. También que los ángulos internos del polígono ABCDEF y A'B'C'D'E'F' no varían. Las variables didácticas en esta actividad son: Eje de simetría vertical y figuras con cuadrículas.

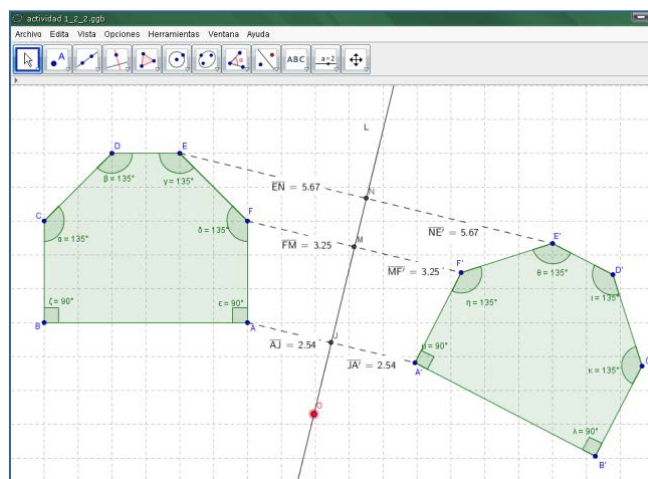
Pensamos que la estudiante podría movilizar sus esquemas según:

**Concepto en acto:** Posiblemente la estudiante movilice nociones como segmentos, ángulos, polígono, punto medio, medida de un segmento.

**Reglas de acción:** Pensamos que la estudiante puede arrastrar la recta L (el eje de simetría) de izquierda a derecha y observar la equidistancia del polígono ABCDEF y el polígono A'B'C'D'E'F' con respecto a la recta L. Trazar los puntos medios de FF', EE' y AA', luego trazar los segmentos FM, MF', EN y NE', medir dichos segmentos y luego arrastrar la recta L para observar que por más que ésta se movile, los segmentos tienen la misma medida y siempre son perpendiculares a la recta L. Finalmente, medir los ángulos internos del polígono ABCDEF y el polígono A'B'C'D'E'F', arrastrar la recta L y observar que los ángulos interiores no varían.



En la siguiente **figura 5** se puede observar lo explicado anteriormente.



**Figura 5. Arrastrando el eje de simetría**

### Resultados de la activad 1.1:

Presentamos los resultados de Mayra, estudiante que participó de la experiencia.

La estudiante arrastró la recta L de izquierda a derecha y notó que el polígono A'B'C'D'E'F' se aleja de la recta si va hacia la derecha o se acerca al polígono ABCDEF si mueve la recta hacia la izquierda.

Luego, al movilizar la recta hacia el lado FA del polígono ABCDEF observó que ambas figuras se juntan y parecieran que formaren una sola. Al arrastrar la recta L hacia la mitad del polígono ABCDEF, ella manifestó que se sobreponen y forman una sola figura.

Trazó los segmentos FM y MF', los midió y se pudo percatar que ambas segmentos tienen igual longitud y manifestó que esto se debe porque la recta se mantiene fija y que estas medidas varían si se arrastra la recta L.

Con respecto a las medidas de los ángulos internos de ambos polígonos ABCDEF y A'B'C'D'E'F' sostuvo que se mantienen igual a pesar de que se arrastre la recta L ya que sólo cambia la distancia y no la figura.

Cuando movilizó el punto O, la estudiante sostuvo que la figura rotó, las medidas de los segmentos variaron mientras que las medidas de los ángulos internos del polígono se mantuvieron.

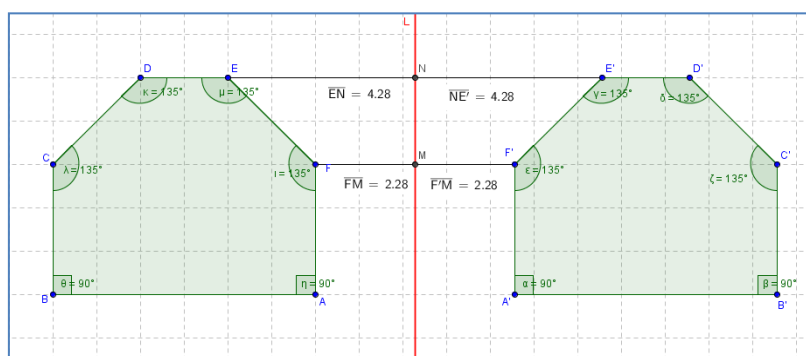
A la conclusión que llegó con respecto a la recta L y los polígonos es que los polígonos mantienen su medida a pesar que se arrastre dicha recta.

Con relación a lo esperado en nuestra fase exploratoria para esta actividad:

Mayra reconoció la equidistancia de los puntos del polígono ABCDEF respectivamente con los puntos del polígono A'B'C'D'E'F' con respecto a la recta L.

Ya que consigue completar correctamente los espacios en blanco, podemos deducir que la estudiante está reconociendo la equidistancia de los puntos a la recta L. Además, reconoció que los ángulos internos de las figuras no varían. Por la justificación que escribe, podemos reconocer que probablemente reconoció que las medidas de los ángulos son invariantes en una simetría.

Las acciones utilizadas por Mayra nos dan indicios que la génesis instrumental se dio en Mayra porque en términos de Rabardel muestra una instrumentalización local de las herramientas del Geogebra utilizadas en esta parte para el estudio de la simetría axial tales como: segmento entre dos puntos, distancia o longitud, ángulo e intersección de dos objetos. En la **figura 6**, podemos observar el procedimiento realizado por Mayra en el Geogebra.



**Figura 6. Procedimiento realizado por Mayra**

Por medio de las acciones de Mayra, antes mencionadas, y los conceptos movilizados como ángulos, polígonos, segmentos y longitud de segmentos; podemos afirmar que los posibles esquemas de utilización desarrollados por Mayra para esta actividad son: equidistancia de un punto de la figura con su simétrico respecto a la recta, ángulos interiores de las figuras son invariantes y que el simétrico es invariante en forma y tamaño de la figura, los que nos da indicios de que la estudiante está instrumentándose con la noción de simetría axial. Mayra al escribir que las figuras se sobreponen pensamos que está reconociendo que tienen igual tamaño, forma y medidas.

### **ACTIVIDAD 1.2:**

En esta actividad, la estudiante tuvo que abrir un archivo de Geogebra con la siguiente imagen:

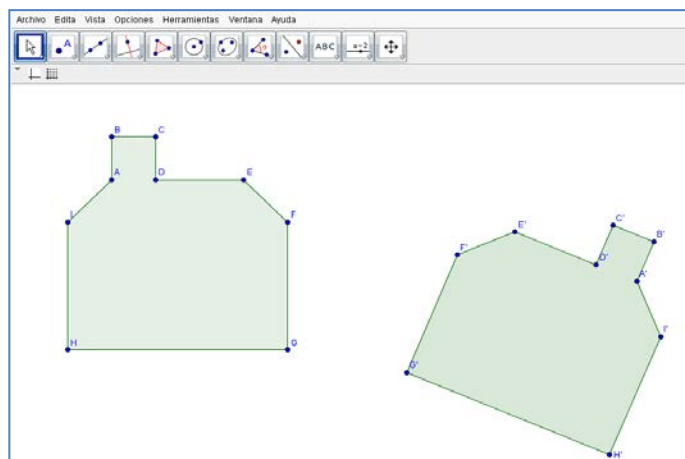


Figura 7. Archivo utilizado para la actividad 1.2

Luego, utilizando la herramienta punto medio, deben trazar los puntos medios de los segmentos  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$ ,  $DD'$ ,  $EE'$ ,  $FF'$ ,  $GG'$ ,  $HH'$  e  $II'$ . Con la herramienta recta, trazar la recta que pasa por los puntos medios marcados anteriormente. Luego, trazar el segmento  $AA'$  y medir el ángulo que se forma entre la intersección del segmento y la recta. Se les pregunta ¿Cuánto mide el ángulo? Posteriormente, Trazar  $BB'$  y medir el ángulo que se forma entre la intersección del segmento y la recta. Y se les vuelve a preguntar ¿Cuánto mide el ángulo? ¿Qué puedes concluir con respecto a los ángulos que se forman entre la intersección de la recta y los segmentos trazados?

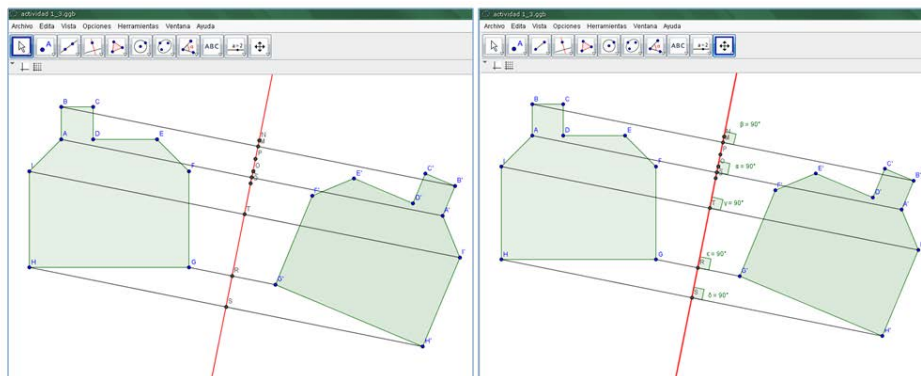
La actividad tiene como objetivo trazar el eje de simetría pero no vertical sino con inclinación y sin cuadrículas. Las variables didácticas en esta actividad son: Eje de simetría vertical y figuras sin cuadrículas.

Pensamos que la estudiante podría movilizar sus esquemas según:

**Concepto en acto:** La estudiante puede movilizar la noción de recta, segmentos, punto medio, ángulos, perpendicularidad.

**Reglas de acción:** Pensamos que la estudiante pueden elegir la herramienta punto medio y traza los puntos medios de los segmentos  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$ ,  $DD'$ ,  $EE'$ ,  $FF'$ ,  $GG'$ ,  $HH'$  e  $II'$ . Luego, traza la recta que pasa por los puntos medios marcados anteriormente. Finalmente, medir los ángulos que se forman entre la intersección de la recta y los segmentos trazados, observar que siempre son ángulos rectos.

En la **figura 8**, se muestra la solución ideal para esta actividad.

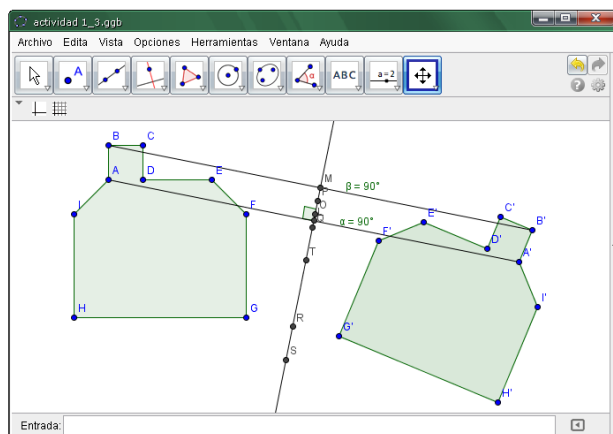


**Figura 8. Trazo del eje de simetría**

### Resultados:

A continuación presentamos el desarrollo de Mayra.

La estudiante, ubicó los puntos medios de  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$ ,  $DD'$ ,  $EE'$ ,  $FF'$ ,  $GG'$ ,  $HH'$  e  $II'$ , luego trazó una recta que pasa por los puntos medio. Finalmente, midió los ángulos formados entre las intersecciones de los segmentos  $AA'$  y  $BB'$  con la recta tal como lo muestra la **figura 9**.



**Figura 9. Solución de Mayra en la actividad 1.2**

Mayra logró darse cuenta que la recta contiene a todos los puntos medios que trazó, tal como lo expresa en su ficha de trabajo

A su vez Mayra logró reconocer que en la intersección entre los segmentos  $AA'$  y  $BB'$  con la recta que ella trazó anteriormente siempre forman ángulos rectos.

Por lo mencionado anteriormente, podemos decir que Mayra desarrolló la actividad como la fase exploratoria porque logró reconocer que la recta contiene a todos los puntos medios y también, la perpendicularidad de los segmentos trazados con respecto a la recta. Sus acciones nos dan indicios de que Mayra logró una Génesis instrumental,

debido a que está siendo instrumentada con algunas propiedades de la noción de simetría axial.

Por las acciones seguidas por Mayra, ya mencionadas anteriormente, y los conceptos movilizados, que fueron apareciendo en el desarrollo de la actividad, tales como recta, punto medio y ángulo recto; creemos que los posibles esquemas de utilización desarrollados por Mayra son: equidistancia y perpendicularidad.

### **Consideraciones finales**

Para el análisis del proceso de instrumentación dentro de la Génesis Instrumental consideramos los conceptos en acto y las reglas de acción que nos permite identificar los posibles esquemas de utilización que va movilizandando la estudiante.

Luego de nuestra experimentación, podemos decir, que la estudiante instrumenta la noción de simetría mediada por el Geogebra, ya que por medio de sus acciones pudimos observar cómo fue aprendiendo esta noción mediante actividades planteadas por el Geogebra, mediante sus conclusiones de las actividades 1.1 y 1.2 que escribió en su ficha de actividades, en donde puso de manifiesto, las conjeturas a las cuales llegó, reconociendo propiedades de este objeto matemático.

Como resultado de las acciones de la estudiante, inferimos que ella logró una instrumentalización local de algunas de las herramientas del Geogebra que ayudaron en el aprendizaje de la noción de simetría axial.

El trabajar con tecnologías y saber de la existencia de un enfoque de estudio de la matemática con las tecnologías, brinda un rumbo a nuestra investigación este fue el Enfoque Instrumental de Rabardel (2011), que nos da una perspectiva para que por medio de las acciones de la estudiante podamos tener indicios de la movilización o creación de esquemas mediados por el uso de las tecnologías.

### **Agradecimientos**

Agradecemos a la Pontificia Universidad Católica del Perú, por favorecer el desarrollo de investigación en el área de Educación Matemática, al Instituto de Investigación sobre Enseñanza de las Matemáticas (IREM-PUCP) y a la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas (MEM) por el apoyo en el fortalecimiento del grupo y línea Tecnologías y Visualización en Educación Matemática: TecVEM-IREM y TecVEM-MEM.

## Referencias

ARTIGUE, M., DOUADY, R., MORENO, L.& GOMEZ, P. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática: un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*. Bogotá: Grupo editorial Iberoamérica.

FERREIRA, PAULA (2005). *Isometrias: Análise de documentos curriculares e uma proposta de situações de aprendizagem para o ensino médio*. (Tesis de maestría). Pontificia Universidade Católica de São Paulo, Brasil.

GALLEGOS, D y PEÑA, A. (2012). *Las TIC en geometría, una nueva forma de enseñar*. Bogotá: Ediciones de la U.

GARCÍA-CUÉLLAR, D. *Simetría axial mediada por el geogebra: un estudio con estudiantes de primer grado de educación secundaria*. (Tesis de maestría). Pontificia Universidad Católica del Perú, Perú.

JAIME, A. (1993). *Aportes a la interpretación y aplicación del modelo Van Hiele: la enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento*. (Tesis doctoral). Universidad de Valencia, Valencia, España.

PRENSKY, M. (2001). *Nativos Digitales, Inmigrantes Digital*. Recuperado de: <https://psiytecnologia.files.wordpress.com/2010/02/prensky-nativos-digitales-inmigrantes-digital-traduccion.pdf>

PERÚ, MINISTERIO DE EDUCACIÓN (2009). *Diseño Curricular Nacional de EBR*. Lima. Recuperado de: <http://www.minedu.gob.pe/normatividad/reglamentos/DisenoCurricularNacional.pdf>

PERÚ, MINISTERIO DE EDUCACIÓN (2007). *Orientaciones para el trabajo Pedagógico (OTP)*. Lima.

PERÚ, MINISTERIO DE EDUCACIÓN (2005). Unidad de Medición de la Calidad. *Evaluación Nacional del Rendimiento Estudiantil 2004. Informe pedagógico de resultados. Formación matemática: Tercer grado y Quinto de secundaria*. Recuperado de: <http://www2.minedu.gob.pe/>.

RABARDEL, P. (1995). *Les Hommes et les Technologies: une approche cognitive des instruments contemporains*. Université Paris. Armand Colin. Recuperado de <http://ergoserv.psy.univ-paris8.fr/Site/>

RABARDEL, P. (2011). *Los hombres y las tecnologías: Visión cognitiva de los instrumentos contemporáneos*. (Trad. por M. Acosta). Colombia: Universidad Industrial de Santander.

SALAZAR, J. V. F. (2009). *Gênese instrumental na interação com Cabri 3D: um estudo de transformações geométricas no espaço*. (Tesis doctoral). Pontificia Universidade Católica de São Paulo, Brasil.

ULIAN, Cristina. (2008). *Possibilidades da aprendizagem de transformações geométricas com o uso do Cabri-Geomètre*. (Tesis maestría, Pontificia Universidade Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo, ISSN 2237- 9657, v.6 n.1, pp 68-82, 2017

Católica de São Paul). Recuperado de <http://www.pucsp.br/pos/edmat>

STAKE, R. (1995). *The art of case study research*. Thousand Oaks, CA: Sage.

SUREDA, P. y OTERO, M. (2011). Nociones fundamentales de la Teoría de los Campos Conceptuales. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias*, Julio- 1-14. Recuperado de <http://estudiosterritoriales.org>

TROUCHE, L (2003). *From artefact to instrument: Mathematics teaching mediated by symbolic calculator*. Recuperado de <http://ens-lyon.academia.edu/LucTrouche/>