El reaseguro en el capital de solvencia obligatorio del riesgo de mortalidad

Pons Cardell, Mª Àngels; mapons@ub.edu
Sarrasí Vizcarra, F. Javier; sarrasi@ub.edu
Departament de Matemàtica Econòmica, Financera i Actuarial
Universitat de Barcelona

RESUMEN

El objetivo de este trabajo es analizar el efecto mitigador que para una compañía de seguros tiene su política de reaseguro, en el capital de solvencia obligatorio del riesgo de mortalidad de su cartera de vida. En nuestro modelo el capital de solvencia obligatorio se calcula a través de un modelo interno basado en el método de simulación de Monte Carlo. Dicho capital se obtiene como el valor en riesgo, al 99,5%, de la diferencia entre el valor actualizado de los activos menos los pasivos de dos años consecutivos, teniendo en cuenta en su cálculo la política de reaseguro de la compañía. Las modalidades de reaseguro objeto de análisis son el cuota parte, el excedente y el stop-loss. Por último, se lleva a cabo para las diferentes modalidades de reaseguro un análisis de sensibilidad del capital de solvencia obligatorio respecto a la cuota de retención de la compañía, en el caso del cuota parte, y respecto al pleno de retención, en el caso del de excedente y del stop-loss.

ABSTRACT

The aim of this paper is to analyze the mitigating effect that, for an insurance company, the solvency capital requirement for the mortality risk of the life underwriting risk module has. In our model, the solvency capital required to the insurance company is computed through an internal model based in the Monte Carlo's simulation method. That capital is obtained as the value in risk at 99,5% of the difference between the present value of assets minus the present value of liabilities corresponding to two consecutive years, where the reinsurance company policy is taken into account for its calculation. The forms of reinsurance considered in the analysis are the quota share, the surplus and the stop-loss. Finally, and for the case of the quota share, a sensitivity analysis of the required solvency capital of the company with respect to the ratio retention is carried out. Furthermore, and for the case of the surplus and stop-loss, a sensitivity analysis with respect to the priority is also made.

***Palabras claves*:** Reaseguro; Solvencia II; capital de solvencia obligatorio; simulación; cedente.

***Área temática*:** A4. Matemáticas Financieras y Actuariales.

1. INTRODUCCIÓN

En este trabajo se propone analizar la influencia que tiene el reaseguro en el capital de solvencia obligatorio, SCR, de una compañía de seguros asociado al riesgo de mortalidad dentro del marco de Solvencia II. Para ello se propone un modelo interno que tendrá en cuenta el riesgo no sistemático de la mortalidad, es decir, el derivado de las fluctuaciones aleatorias de las tasas de mortalidad respecto al valor esperado debido al tamaño de la cartera de la compañía, y que se basará en la simulación, por el método de Monte Carlo, de la evolución de la cartera directamente a partir de las tablas de mortalidad españolas, Pasem 2010. Las modalidades de reaseguro estudiadas son el cuota parte, el de excedente y el exceso de siniestralidad, también denominado stop-loss.

En la literatura actuarial existen trabajos que se centran en el efecto que tiene el reaseguro como instrumento mitigador del riesgo de la compañía de seguros dentro del marco regulatorio de Solvencia II, al permitir repartir su cartera y por tanto disminuir el SCR que tiene que dotar. Destacar entre otros, los trabajos de Heinen, B., 2015; Dittrich, J., 2010 y de Zhou, T. and Kuschel, N., 2012. Sin embargo, en estos trabajos no se considera el tamaño de la cartera como variable a tener en cuenta en el cálculo del SCR de la compañía. La metodología utilizada en este trabajo, basada en el método de simulación de Monte Carlo, permite tener en cuenta en el cómputo del SCR de la compañía de seguros, no sólo la política de reaseguro, sino también el tamaño del colectivo.

El artículo se estructura como sigue. En el apartado 2 se expone brevemente el modelo interno, definiéndose las variables que intervienen en el mismo y el proceso, basado en la simulación de Monte Carlo de la cartera, que permite llevar a cabo el cálculo del SCR. En el apartado 3 se implementan las tres modalidades de reaseguro en el modelo interno, obteniendo de esta manera el SCR a cargo de la compañía de seguros en función de su política de reaseguro. En el apartado 4 se desarrolla un ejemplo numérico para las diferentes modalidades de reaseguro y se realiza un análisis de sensibilidad del capital de solvencia obligatorio respecto a los parámetros que definen la política de reaseguro, como son la cuota de retención de la compañía, en el caso del cuota parte, el pleno de retención, en el caso del de excedente o la prioridad en el caso del stop-loss. En el apartado 5 se plantean las consideraciones finales del trabajo y, en apartado 6, se citan las referencias bibliográficas del mismo.

2. MODELO INTERNO PARA CALCULAR EL CAPITAL DE SOLVENCIA OBLIGATORIO

El modelo interno propuesto para calcular el SCR para el riesgo de mortalidad del módulo de riesgo de suscripción del seguro de vida (Pons, M.A. y Sarrasí, F.J., 2017) se basa en la interpretación formal del artículo 101 de la Directiva de Solvencia II. Desde el punto de vista matemático hay diferentes formalizaciones para el cálculo del SCR, en este trabajo se asume la formalización matemática propuesta por Christiansen y Niemeyer (2014):

$$SCR_0 = VaR_{0{,}995}(NAV_0 - NAV_1) = VaR_{0{,}995}(DNAV_0),$$

y la metodología propuesta para su cálculo consiste en simular por el método de Monte Carlo la evolución de siniestralidad de la cartera.

El NAV_t se calcula como la diferencia, en el momento t, entre el valor de mercado de los activos, A_t, y los pasivos, L_t, $NAV_t = A_t - L_t$, pero a su vez, el valor de mercado de los pasivos, L_t, está formado por la suma dos componentes, $L_t = BEL_t + MR_t$, esto es, por la suma de la mejor estimación de las obligaciones futuras, BEL_t, y el margen de riesgo, MR_t. A pesar de ello se asume que $NAV_t = A_t - BEL_t$, ya que se considera el margen de riesgo estable en el tiempo y que el valor de mercado de los pasivos, L_t, viene dado exclusivamente por la mejor estimación de las obligaciones futuras, $L_t = BEL_t$. (Castañer, A. y Claramunt, M.M., 2014)

Para desarrollar el modelo interno se asume que la cartera de la compañía de seguros en el momento del análisis, $t = 0$, está constituida por un colectivo N_0 formado por n_0 asegurados, y que cada asegurado i, de edad actuarial x_i, con $i = 1,2, \dots, n_0$, tiene contratado un seguro de vida cuyas prestaciones y contraprestaciones son conocidas en el momento del análisis, siendo:

$$NAV_0 = A_0 - BEL_0 = \sum_{t=0}^{Q} (a_t - b_t) \cdot [1 + I_1(0,t)]^{-t},$$

$$NAV_1 = A_1 - BEL_1 = \sum_{t=1}^{Q} (a_t - b_t) \cdot [1 + I_1(1,t)]^{-(t-1)},$$

donde:

- $t = 0,1,2, \dots, Q$, es el horizonte temporal de la operación, expresado en años, y Q es el primer año en que la compañía de seguros queda liberada del pago de prestaciones a los beneficiarios.
- a_t y b_t, con $t = 0,1,2, \dots, Q$, son, respectivamente, las variables aleatorias cuantía de los activos aportados en t por el colectivo a la compañía de seguros y cuantía de los pasivos satisfechos en t por la compañía de seguros.
- $I_1(0,t)$ y $I_1(1,t)$, con $t = 0,1,2, \dots, Q$, son, respectivamente, los tantos efectivos anuales al contado e implícitos, siendo $I_1(0,0) = 0$. (Fontanals, H. y Ruiz, E., 2014).

Para calcular las variables aleatorias NAV_0 y NAV_1, es necesario conocer la evolución del colectivo N_0 en el tiempo. Su evolución se obtiene a partir de la variable aleatoria T_{N_0}, que proporciona el número de años enteros que van a permanecer con vida cada uno de los n_0 asegurados que forman el colectivo N_0 en el momento $t = 0$. Formalmente la variable aleatoria T_{N_0} viene dada por un vector cuyas componentes son variables aleatorias:

$$T_{N_0} = (T_{x_1}, T_{x_2}, \dots, T_{x_i}, \dots, T_{x_{n_0}}),$$

siendo T_{x_i}, con $i = 1, \dots, n_0$, la variable aleatoria número de años enteros que permanece con vida el asegurado i de edad actuarial x_i.

Debido al elevado número de realizaciones que tiene la variable aleatoria T_{N_0} es imposible trabajar directamente con su función de distribución. Este problema se resuelve simulando, por el método de Monte Carlo, las realizaciones de dicha variable. De esta forma, el número de realizaciones dependerá del número de simulaciones que se realicen del colectivo. Si z es el número de trayectorias de evolución simuladas, las realizaciones de la variable aleatoria T_{N_0} vendrán dadas por el siguiente conjunto de vectores:

$$\{\vec{t}_{N_0}^{1}, \vec{t}_{N_0}^{2}, \dots, \vec{t}_{N_0}^{l}, \dots, \vec{t}_{N_0}^{z}\},$$

donde $\vec{t}_{N_0}^{l}$es la realización asociada a la simulación l, con $l = 1, \dots, z$, de la variable aleatoria T_{N_0} siendo:

$$\vec{t}_{N_0}^{l} = \left(t_{x_1}^{l}\ , t_{x_2}^{l}, \dots , t_{x_i}^{l}\ , \dots , t_{x_{n_0}}^{l}\right),$$

donde $t_{x_i}^{l}$, con $i = 1, \dots , n_0$, es la realización asociada a la trayectoria de evolución del colectivo l de la variable aleatoria T_{x_i} y proporciona el número de años enteros que permanece con vida el asegurado i, de edad actuarial x_i , asociado a la trayectoria de evolución del colectivo l.

La probabilidad asociada a cada realización de T_{N_0} es siempre la misma, y su valor depende del número de trayectorias de evolución del colectivo z simuladas:

$$P\left[T_{N_0} = \vec{t}_{N_0}^{l}\right] = \frac{1}{z} \qquad \text{con} \quad l = 1,2, \dots , z.$$

Una vez conocida la función de distribución de la variable aleatoria T_{N_0} se obtienen el resto de variables aleatorias relevantes del modelo, a_t, b_t y $DNAV_0$, cuyas realizaciones son respectivamente:

$$\{a_t^1\ , a_t^2, \dots , a_t^l\ , \dots , a_t^z\},$$

$$\{b_t^1\ , b_t^2, \dots , b_t^l\ , \dots , b_t^z\},$$

$$\{DNAV_0^1, DNAV_0^2, \dots , DNAV_0^l, \dots , DNAV_0^z\},$$

con $t = 0,1,2, \dots , Q^l$ y $l = 1,2, \dots , z$, donde a_t^l, b_t^l y $DNAV_0^l$ son, respectivamente, las realizaciones de las variables aleatorias a_t, b_t y $DNAV_0$ asociadas a la trayectoria de evolución del colectivo l, y Q^l es el primer año, asociado a la trayectoria de evolución del colectivo l, en que la compañía de seguros queda liberada del pago de prestaciones a los beneficiarios.

Conocidas las realizaciones, por simulación, se podrá estimar la función de distribución de probabilidad de la variable aleatoria $DNAV_0$, y el SCR_0 del colectivo se obtiene como el $VaR_{0,995}$ de la variable aleatoria $DNAV_0$:

$$SCR_0 = VaR_{0,995}(DNAV_0).$$

3. EL REASEGURO EN EL MODELO INTERNO

En este apartado se va a considerar la incorporación del reaseguro, desde el punto de vista de la cedente, en el modelo interno anterior, tanto en las modalidades proporcionales como en las no proporcionales. Concretamente, para el caso de las modalidades proporcionales se estudiará el reaseguro cuota parte y el de excedente, y para las no proporcionales, el reaseguro stop-loss. (Minzoni, A., 2009)

Se asumirán tres hipótesis, que el contrato de reaseguro tendrá la misma duración que el contrato de la operación, que cada asegurado i tiene contratada una única póliza y que los activos de la cartera de la cedente están formados exclusivamente por las primas satisfechas por los asegurados y retenidas por ella, y que los pasivos están constituidos por aquella parte de las sumas aseguradas que a la cedente le corresponde satisfacer a los beneficiarios en caso de fallecimiento de los asegurados.

Desde el punto de vista de la cedente, el $SCR_0^c = VaR_{0,995}(DNAV_0^c)$, el cual se obtendrá a partir de las variables aleatorias cuantía de los activos, a_t^c, y de los pasivos, b_t^c, a cargo de la cedente en el momento t, con $t = 0,1,2,\dots,Q^l$, cuyas realizaciones son respectivamente:

$$\{a_t^{c,1}, a_t^{c,2}, \dots, a_t^{c,l}, \dots, a_t^{c,z}\} \text{ y } \{b_t^{c,1}, b_t^{c,2}, \dots, b_t^{c,l}, \dots, b_t^{c,z}\}.$$

3.1. Modalidades proporcionales

Las modalidades de reaseguro proporcionales se caracterizan en que el reparto del riesgo asegurado se basa en una cuota de retención, única en el reaseguro cuota parte y variable en el reaseguro de excedente, aplicada sobre la suma asegurada. Esta cuota permite determinar la responsabilidad de la cedente y del reasegurador, en el importe del siniestro y en la prima asociada a cada una de las pólizas de la cartera.

En estas modalidades de reaseguro, la suma asegurada en el año t del asegurado i, $S_{i,t}$, se desglosa en la parte que asume la cedente, $S_{i,t}^c$, y en la parte que se responsabiliza el reasegurador, $S_{i,t}^r$:

$$S_{i,t} = S_{i,t}^c + S_{i,t}^r \,.$$

De la misma manera, la prima total que cobra la cedente en el año t del asegurado i, $P_{i,t}$, se descompone en la parte que retiene la cedente, $P_{i,t}^c$, y en la parte que cede al reasegurador, $P_{i,t}^r$:

$$P_{i,t} = P_{i,t}^c + P_{i,t}^r \,.$$

Según el modelo interno propuesto, desde el punto de vista de la cedente, las realizaciones $a_t^{c,l}$ y $b_t^{c,l}$ de las variables aleatorias a_t^c y b_t^c asociadas a la trayectoria de evolución del colectivo l, con $l = 1,2,\dots,z$, se obtendrán a partir de $\overrightarrow{P_t^c}$ y de $\overrightarrow{S_t^c}$:

$$a_t^{c,l} = \begin{cases} \vec{n}_t^l \cdot \overrightarrow{P_t^c} & para \quad t = 0,1,\dots,Q^l - 1 \\ 0 & para \quad t = Q^l, \end{cases}$$

$$b_t^{c,l} = \begin{cases} b_0^c & para \quad t = 0 \\ \vec{d}_t^l \cdot \overrightarrow{S_t^c} & para \quad t = 1,2,\dots,Q^l, \end{cases}$$

siendo:

- $\overrightarrow{P_t^c} = \left(P_{1,t}^c, P_{2,t}^c, \dots, P_{i,t}^c, \dots, P_{n_0,t}^c\right)$, con $t = 0,1,2,\dots,Q^l - 1$, el vector de primas que retiene la cedente en t de los asegurados del colectivo inicial N_0, suponiendo que todos están vivos en t.
- $\vec{n}_t^l$, con $t = 0,1,2,\dots,Q^l - 1$, es el vector formado por ceros y unos, que tiene tantas componentes como asegurados n_0 tiene el colectivo N_0, y muestra qué asegurados están vivos en t, dada la trayectoria de evolución del colectivo l. Si la componente i, con $i = 1,\dots,n_0$, vale 1 indica que el asegurado i-ésimo está vivo en t, y si vale 0 es que está muerto.
- $\overrightarrow{S_t^c} = \left(S_{1,t}^c, S_{2,t}^c, \dots, S_{i,t}^c, \dots, S_{n_0,t}^c\right)$, con $t = 1,\dots,Q^l$, es el vector de sumas aseguradas a cargo de la cedente que tiene que pagar en t a los beneficiarios del colectivo inicial N_0, suponiendo que todos los asegurados falleciesen en el año t.
- $\vec{d}_t^l$, con $t = 1,\dots,Q^l$, es un vector formado por ceros y unos, que tiene tantas componentes como asegurados n_0 tienen el colectivo N_0, y muestra qué asegurados del colectivo inicial fallecen durante el año t , dada la trayectoria de evolución del colectivo l . Si la componente i, con $i = 1,\dots,n_0$, vale 1 indica que el asegurado i-ésimo ha fallecido en el año t, y si vale 0 es que permanece vivo en t o ha fallecido en un año diferente de t.
- b_0^c es un valor cierto y vale 0 si el colectivo N_0 es de nueva creación.

A continuación se obtienen los vectores $\overrightarrow{P_t^c}$ y $\overrightarrow{S_t^c}$ para las modalidades de reaseguro cuota parte y de excedente.

3.1.1. Reaseguro cuota parte

El reaseguro cuota parte consiste en que la cedente asume un coeficiente prestablecido, k, en tanto por uno y denominado cuota de retención, de todas y cada una de las pólizas, ya sea de toda la cartera o de un determinado ramo de la misma. La cuota de retención permite determinar la participación de la cedente en la suma asegurada y en la prima, de cada póliza $i = 1, \dots, n_0$:

$$P_{i,t}^{c} = k \cdot P_{i,t} \quad \text{con} \quad t = 0,1,2, \dots, Q^{l} - 1,$$
$$S_{i,t}^{c} = k \cdot S_{i,t} \quad \text{con} \quad t = 1, \dots, Q^{l},$$

de manera que:

$$\overrightarrow{P_t^c} = k \cdot \vec{P}_t = k \cdot \left(P_{1,t}, P_{2,t}, \dots, P_{i,t}, .., P_{n_0,t}\right) \quad \text{con} \quad t = 0,1,2, \dots, Q^{l} - 1,$$
$$\overrightarrow{S_t^c} = k \cdot \vec{S}_t = k \cdot \left(S_{1,t}, S_{2,t}, \dots, S_{i,t}, .., S_{n_0,t}\right) \quad \text{con} \quad t = 1, \dots, Q^{l}.$$

3.1.2. Reaseguro de excedente

El reaseguro de excedente se diferencia del reaseguro cuota parte en que la cuota de retención de la cedente es variable para cada póliza y depende de la relación entre el pleno de retención y su suma asegurada.

Si M es el pleno de retención de la cedente, es decir, la suma asegurada máxima que está dispuesta a asumir la cedente por póliza, la cuota de retención de la cedente, k_i, asociada a la póliza i, con $i = 1, \dots, n_0$, se define:

$$k_i = \begin{cases} 1 & si \;\; S_{i,t} \leq M \\ \dfrac{M}{S_{i,t}} & si \;\; S_{i,t} > M. \end{cases}$$

En esta modalidad de reaseguro resulta que para $i = 1, \dots, n_0$:

$$P_{i,t}^{c} = k_i \cdot P_{i,t} \quad \text{con} \quad t = 0,1,2, \dots, Q^{l} - 1,$$
$$S_{i,t}^{c} = k_i \cdot S_{i,t} \quad \text{con} \quad t = 1, \dots, Q^{l},$$

de manera que:

$$\overrightarrow{P_t^c} = \left(k_1 \cdot P_{1,t}, \dots, k_i \cdot P_{i,t}, .., k_{n_0} \cdot P_{n_0,t}\right) \quad \text{con} \quad t = 0,1,2, \dots, Q^{l} - 1,$$
$$\overrightarrow{S_t^c} = \left(k_1 \cdot S_{1,t}, \dots, k_i \cdot S_{i,t}, .., k_{n_0} \cdot S_{n_0,t}\right) \quad \text{con} \quad t = 1, \dots, Q^{l}.$$

3.2. Modalidades no proporcionales

Las modalidades de reaseguro no proporcionales se caracterizan en que el reparto del riesgo asegurado entre la cedente y el reasegurador se basa en el exceso entre el importe de los sinestros y una prioridad establecida por la compañía de seguros. A continuación se lleva a cabo el estudio de la modalidad stop-loss.

El reaseguro stop-loss se trata de una modalidad de reaseguro no proporcional que se caracteriza porque el reasegurador se obliga a cubrir, total o parcialmente, el exceso de siniestralidad ocurrido en el ejercicio respecto a una prioridad M. A diferencia de los reaseguros proporcionales, en este tipo de contratos no hay proporcionalidad en la distribución de responsabilidades, debido a que el compromiso de las partes depende de la siniestralidad.

En esta modalidad de reaseguro las realizaciones de la variable aleatoria $b_t^{c,l}$, asociadas a la trayectoria de evolución del colectivo l, con $l = 1,2, \dots, z$, y para $t = 1,2, \dots, Q^l$, dependerán de si la responsabilidad que asume el reasegurador es ilimitada o limitada. En el caso que sea ilimitada:

$$b_t^{c,l} = \begin{cases} \vec{d}_t^l \cdot \vec{S}_t & si \quad \vec{d}_t^l \cdot \vec{S}_t \leq M \\ M & si \quad \vec{d}_t^l \cdot \vec{S}_t > M, \end{cases}$$

siendo $b_0^{c,l} = b_0^c$.

En el caso que la responsabilidad sea limitada, si el contrato es un stop-loss $(M_2 - M_1)$ en exceso de M_1, siendo M_1 la prioridad de la cedente y $(M_2 - M_1)$ el tramo de responsabilidad del reasegurador, entonces:

$$b_t^{c,l} = \begin{cases} \vec{d}_t^l \cdot \vec{S}_t & \vec{d}_t^l \cdot \vec{S}_t \leq M_1 \\ M_1 & M_1 < \vec{d}_t^l \cdot \vec{S}_t \leq M_2 \\ \vec{d}_t^l \cdot \vec{S}_t - (M_2 - M_1) & si \quad \vec{d}_t^l \cdot \vec{S}_t \geq M_{2,} \end{cases}$$

siendo $b_0^{c,l} = b_0^c$.

Para poder calcular las realizaciones $a_t^{c,l}$ de la variable aleatoria a_t^c asociadas a la trayectoria de evolución del colectivo l, con $l = 1,2, \dots, z$:

$$a_t^{c,l} = \begin{cases} \vec{n}_t^l \cdot \overrightarrow{P_t^c} & para \quad t = 0,1, \dots, Q^l - 1 \\ 0 & para \quad t = Q^l, \end{cases}$$

es necesario conocer el vector de primas que retiene la cedente $\overrightarrow{P_t^c}$, siendo $\overrightarrow{P_t^c} = \left(P_{1,t}^c, P_{2,t}^c, \dots, P_{i,t}^c, \dots, P_{n_0,t}^c\right)$.

En esta modalidad de reaseguro el cálculo de $P_{i,t}^c$ no es inmediato, como sí lo era en las modalidades proporcionales, ya que en el stop-loss, la prima que retiene la cedente se calcula directamente para toda la cartera y no para cada póliza.

Sea π^c la variable aleatoria prima única total del colectivo asociada a la cedente, sus realizaciones, τ^c, vienen dadas por el siguiente conjunto:

$$\tau^c = \{\pi^{c,1}, \pi^{c,2}, \dots, \pi^{c,l}, \dots, \pi^{c,z}\},$$

donde $\pi^{c,l}$ se obtiene como el valor actual financiero de los pasivos del colectivo dada la simulación *l*-ésima del mismo:

$$\pi^{c,l} = \sum_{t=1}^{Q^l} b_t^{c,l} \cdot (1 + I_1)^{-t},$$

siendo I_1 el tanto efectivo anual de interés técnico.

La función de distribución de la variable aleatoria π^c se muestra en la tabla 1.

Tabla 1. Función de distribución de π^c

τ^c	$P(\pi^c = \tau^c)$
$\pi^{c,1}$	$1/z$
$\pi^{c,2}$	$1/z$
…	…
$\pi^{c,l}$	$1/z$
…	…
$\pi^{c,z}$	$1/z$

Fuente: Elaboración propia

Si se aplica como criterio de cálculo de primas el criterio de la esperanza matemática, entonces el valor de la prima única asociada a la cedente para toda la cartera, $\boldsymbol{\pi^c}$, se obtiene del siguiente modo:

$$\boldsymbol{\pi^c} = E[\pi^c] = \frac{\sum_{l=1}^{z} \pi^{c,l}}{z}.$$

Ahora el problema consiste en obtener $P_{i,t}^c$ a partir de $\boldsymbol{\pi^c}$, y para ello se asume la siguiente hipótesis:

$$P_{i,t}^c = \gamma \cdot P_{i,t} \quad \text{con} \quad i = 1, \dots, n_0 \quad \text{y} \quad t = 0,1, \dots, Q^l - 1,$$

esto es, que la prima que retiene la cedente en *t* asociada a cada póliza *i* es una proporción de la prima periódica total satisfecha en *t* por el individuo *i*, siendo γ un coeficiente expresado en tanto por uno. Se trata de calcular $P_{i,t}^{c}$ a partir del coeficiente γ, el cual se obtendrá, a partir de la relación entre $\boldsymbol{\pi^c}$ y la prima única total del colectivo, $\boldsymbol{\pi}$, sin tener en cuenta el reaseguro.

Si h_i es el número de primas periódicas satisfechas por el asegurado i, y tP_{x_i} es la probabilidad de que un individuo de edad actuarial x_i sobreviva t años, entonces, la prima única asociada a dicho asegurado, $\boldsymbol{\pi_i}$, se obtiene del siguiente modo para $i = 1, \dots, n_0$:

$$\boldsymbol{\pi_i} = \sum_{t=0}^{h_i} P_{i,t} \cdot tP_{x_i} \cdot (1 + I_1)^{-t},$$

Por tanto, la prima única total, $\boldsymbol{\pi}$, se obtiene por suma de las primas únicas individuales de cada uno de los n_0 individuos que forman el colectivo:

$$\boldsymbol{\pi} = \sum_{i=1}^{n_0} \boldsymbol{\pi_i}.$$

Entonces la prima única que retiene la cedente asociada al individuo i, $\boldsymbol{\pi_i^c}$, con $i = 1, \dots, n_0$ es:

$$\boldsymbol{\pi_i^c} = \sum_{t=0}^{h_i} P_{1,t}^{c} \cdot tP_{x_i} \cdot (1 + I_1)^{-t} = \sum_{t=0}^{h_i} \gamma \cdot P_{i,t} \cdot tP_{x_i} \cdot (1 + I_1)^{-t} =$$

$$= \gamma \cdot \sum_{t=0}^{h_i} P_{i,t} \cdot tP_{x_i} \cdot (1 + I_1)^{-t} = \gamma \cdot \boldsymbol{\pi_i}.$$

Teniendo en cuenta que $\boldsymbol{\pi^c} = \sum_{i=1}^{n_0} \boldsymbol{\pi_i^c}$, entonces resulta:

$$\boldsymbol{\pi^c} = \sum_{i=1}^{n_0} \boldsymbol{\pi_i^c} = \sum_{i=1}^{n_0} \gamma \ \cdot \boldsymbol{\pi}_i = \gamma \cdot \sum_{i=1}^{n_0} \boldsymbol{\pi_i} = \gamma \cdot \boldsymbol{\pi},$$

de donde se obtiene que:

$$\gamma = \frac{\boldsymbol{\pi^c}}{\boldsymbol{\pi}}.$$

De manera que $P_{i,t}^{c}$ para $i = 1, \dots, n_0$ y $t = 0,1, \dots, Q^l - 1$ es:

$$P_{i,t}^{c} = \gamma \cdot P_{i,t} = \frac{\boldsymbol{\pi^c}}{\boldsymbol{\pi}} \cdot P_{i,t}\,.$$

Una vez obtenido $P_{i,t}^{c}$ se puede calcular la realización $a_t^{c,l}$ de la variable aleatoria a_t^c asociada a la trayectoria de evolución del colectivo l, con $l = 1,2, \dots, z$.

4. EJEMPLO NUMÉRICO

En este apartado se ilustra un ejemplo numérico del cálculo del SCR desde el punto de vista de la cedente y para las tres modalidades de reaseguro estudiadas, utilizando el modelo interno propuesto para el riesgo de mortalidad de una cartera formada por seguros de vida, en el que el asegurador garantiza un único pago al beneficiario en caso de fallecimiento del asegurado.

Se asume que la cartera está formada por un colectivo homogéneo en cuanto a edades, sexo y características de la operación, y que la cartera es de nueva creación. El colectivo está formado por individuos de sexo masculino, con edad actuarial $x = 35$ años, donde cada uno de ellos tiene contratado un seguro inmediato, temporal de 5 años, a primas periódicas anuales y con una suma asegurada, $S = 1.000$€, que cobrará el beneficiario al final del año del fallecimiento del asegurado.

Los datos técnicos asumidos en la operación son los siguientes:

- Tipo de interés técnico del 2% efectivo anual. Tablas de mortalidad: Pasem 2010.
- Estructura de tipos de interés al contado libres de riesgo (se ha obtenido del QIS5 y bajo la hipótesis de una prima de liquidez del 50%):

$$I_1(0,1) = 0{,}01475, \quad I_1(0,2) = 0{,}02051, \quad I_1(0,3) = 0{,}02458,$$
$$I_1(0,4) = 0{,}02771, \quad I_1(0,5) = 0{,}03022, \quad I_1(0,6) = 0{,}03235.$$

Al tratarse de un seguro inmediato y temporal de 5 años, el primer año en que la compañía de seguros queda liberada del pago de prestaciones a los beneficiarios es a los 5 años, $Q = 5$. Por otra parte, al ser una cartera de nueva creación la cuantía de los pasivos satisfechos en $t = 0$ por la compañía de seguros es cero, $b_0 = 0$.

El importe de la prima periódica anual, P, a pagar por cada asegurado de edad actuarial $x = 35$ años, se obtiene a partir de la siguiente expresión:

$$P = \frac{1.000 \cdot \sum_{t=0}^{4} t/q_{35} \cdot (1 + 0{,}02)^{-(t+1)}}{\sum_{t=0}^{4} tP_{35} \cdot (1 + 0{,}02)^{-t}} = 1{,}044122€,$$

donde t/q_{35} es la probabilidad que una persona de edad actuarial 35 años viva t años y fallezca en el año siguiente y tP_{35} es la probabilidad que una persona de edad actuarial 35 años viva t años más.

Para esta cartera los vectores de primas y cuantías aseguradas, $\vec{P}_t$ y $\vec{S}_t$, son respectivamente:

$$\vec{P}_t = (1{,}044122, 1{,}044122, \dots, 1{,}044122) \text{ con } t = 0{,}1{,}2{,}3{,}4,$$

$$\vec{S}_t = (1.000, 1.000, \dots, 1.000) \text{ con } t = 1{,}2{,}3{,}4{,}5,$$

donde el número de componentes de cada vector coincide con el tamaño del colectivo.

A continuación se obtienen los resultados para el SCR_0^C bajo la hipótesis que la cedente tiene contratado un reaseguro cuota parte, de excedente y stop-loss. Los cálculos se han realizado en lenguaje de programación R y con 200.000 simulaciones.

- *Reaseguro cuota parte*

En este apartado se va a comparar el SCR_0^C con una cuota de retención $k = 1$ y $k = 0{,}7$, bajo diferentes escenarios de tamaño del colectivo n_0. Al tratarse de un colectivo homogéneo el $SCR_{0,i}^C$ para cada póliza o individuo i, con $i = 1, \dots, n_0$, de cada colectivo de tamaño n_0 considerado, se obtiene dividiendo el SCR_0^C del colectivo por su tamaño:

$$SCR_{0,i}^C = \frac{SCR_0^C}{n_0}.$$

En las tablas 2 y 3 se muestran para $k = 1$, es decir, para el caso en el que la cedente retiene el 100% de la cartera, y para $k = 0{,}7$, respectivamente, los valores que adoptan SCR_0^C, P_i^C y $SCR_{0,i}^C$ cuando se varía el tamaño del colectivo, n_0.

Tabla 2. Reaseguro cuota parte con $k = 1$

$\boldsymbol{n_0}$	$\boldsymbol{SCR_0^C}$	$\boldsymbol{P_i^c}$	$\boldsymbol{SCR_{0,i}^C}$
10	24,066	1,044122	2,4066
100	138,817	1,044122	2,3882
3.000	3.211,989	1,044122	1,0706
6.000	5.511,406	1,044122	0,9185
9.000	7.511,108	1,044122	0,8345
12.000	9.533,529	1,044122	0,7944

Fuente: Elaboración propia

Tabla 3. Reaseguro cuota parte con $k = 0{,}7$

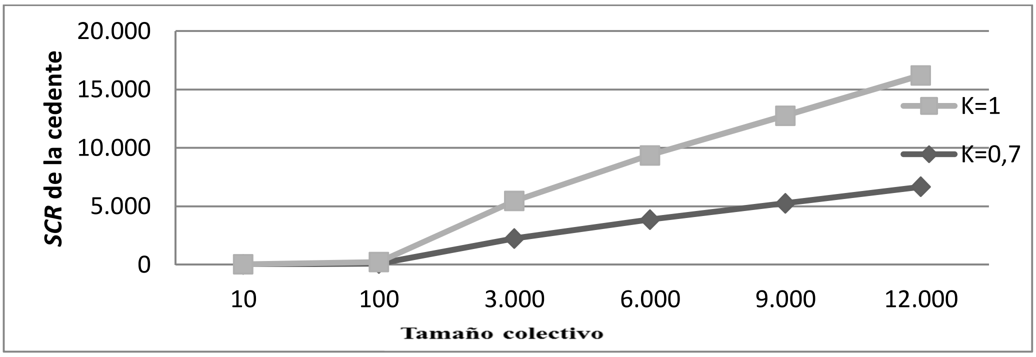
$\boldsymbol{n_0}$	$\boldsymbol{SCR_0^C}$	$\boldsymbol{P_i^c}$	$\boldsymbol{SCR_{0,i}^C}$
10	16,846	0,73089	1,68462
100	97,172	0,73089	1,67174
3.000	2.248,392	0,73089	0,74942
6.000	3.857,984	0,73089	0,64295
9.000	5.257,776	0,73089	0,58415
12.000	6.673,470	0,73089	0,55608

Fuente: Elaboración propia

En base a los datos mostrados en las dos tablas anteriores se observa que los valores de $SCR_{0,i}^C$ tienen una relación inversa respecto al tamaño del colectivo n_0, es decir, cuanto mayor es el tamaño menor es el valor de $SCR_{0,i}^C$ ya que disminuye el riesgo no sistemático de la cartera. También se observa que los valores de SCR_0^C, $SCR_{0,i}^C$ y P_i^C son directamente proporcionales al valor de k.

En el gráfico 1 se muestra la relación directa entre SCR_0^C y n_0 para los valores de $k = 1$ y k =0,7.

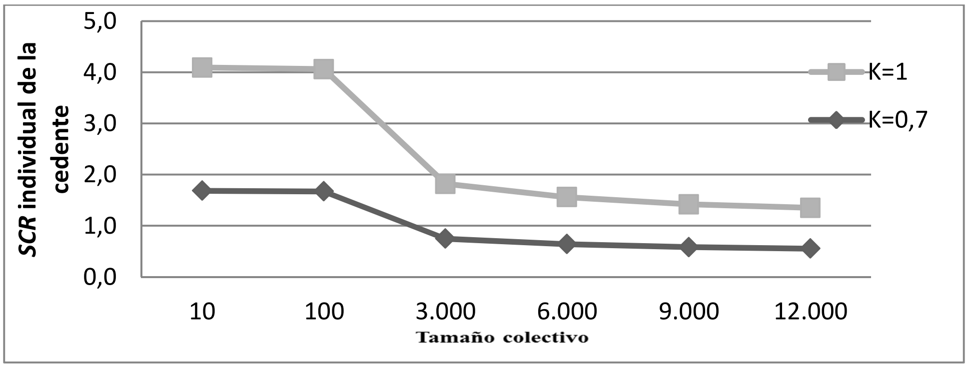
Gráfico 1: Relación entre SCR_0^C y n_0



Fuente: Elaboración propia

Por el contrario, el valor de $SCR_{0,i}^C$ disminuye conforme aumenta el tamaño del colectivo, tal y como se muestra en el gráfico 2.

Gráfico 2: Relación entre $SCR_{0,i}^{C}$ y n_0



Fuente: Elaboración propia

➢ *Reaseguro de excedente*

En las tablas 4 y 5 se muestran los resultados del SCR_0^C, $SCR_{0,i}^C$ y P_i^C para un reaseguro de excedentes con plenos de retención *M=500€* y *M=800€* respectivamente.

Tabla 4. Reaseguro de excedente con *M=500€*

n_0	SCR_0^c	P_i^c	$SCR_{0,i}^C$
10	12,033	0,522061	1,2033
100	67,908	0,522061	6,7908
3.000	1.605,994	0,522061	0,5353
6.000	2.755,703	0,522061	0,4592
9.000	3.755,554	0,522061	0,4172
12.000	4.766,764	0,522061	0,3972

Fuente: Elaboración propia

Tabla 5. Reaseguro de excedente con *M=800€*

n_0	SCR_0^c	P_i^c	$SCR_{0,i}^C$
10	19,253	0,83529	1,92530
100	111,054	0,83529	1,11054
3.000	2.569,591	0,83529	0,85653
6.000	4.409,125	0,83529	0,73485
9.000	6.008,886	0,83529	0,66765
12.000	7.626,823	0,83529	0,63556

Fuente: Elaboración propia

Teniendo en cuenta que todos los asegurados del colectivo tienen la misma suma asegurada, $S = 1.000$€, el reaseguro de excedentes con *M=500€* y con *M=800€* es equivalente a un reaseguro cuota parte con un valor de $k = \frac{500}{1.000} = 0{,}5$ y $k = \frac{800}{1.000} = 0{,}8$ respectivamente.

- *Reaseguro Stop-loss*

En la tabla 6 se muestran los resutados obtenidos para γ, SCR_0^C, $SCR_{0,i}^C$ y P_i^C de un reaseguro stop-loss con prioridad *M=5.000€* y para diferentes escenarios de tamaño del colectivo n_0.

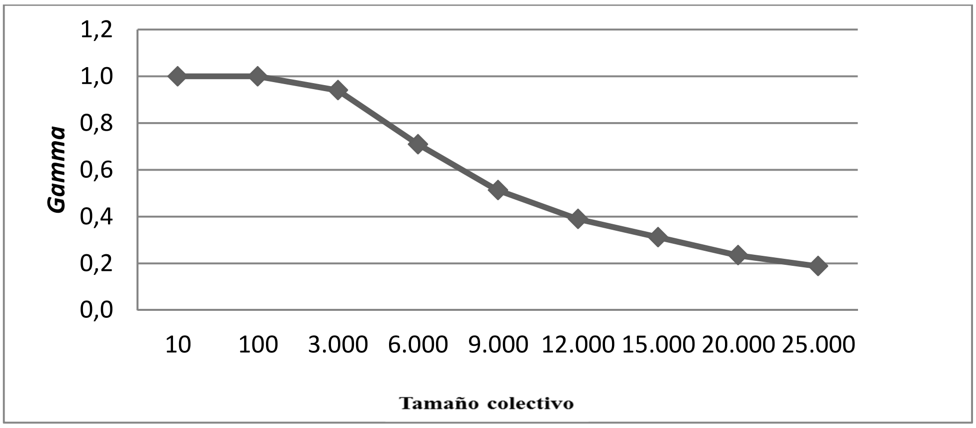
Tabla 6. Reaseguro stop-loss con *M=5.000€*

n_0	γ	SCR_0^c	$SCR_{0,i}^c$	P_i^c
10	1	24,0660	2,40660	1,044122
100	1	138,8174	1,38817	1,044122
3.000	0,940394	3.010,0140	1,00334	0,981886
6.000	0,709666	3.482,7560	0,58045	0,740978
9.000	0,512212	2.844,1700	0,31602	0,534812
12.000	0,389148	1.917,6320	0,15980	0,406318
14.000	0,334108	939,7834	0,06713	0,348849
14.100	0,331761	940,0690	0,06667	0,346398
14.300	0,327150	-44,3912	-0,00310	0,341585
15.000	0,311896	-44,3076	-0,00295	0,325653
20.000	0,233995	-42,8771	-0,00214	0,244319
25.000	0,187227	-42,1350	-0,00168	0,195488

Fuente: Elaboración propia

Como puede apreciarse en el gráfico 4, el valor de γ es inversamente proporcional al tamaño del colectivo, salvo cuando éste es de dimensiones reducidas, en cuyo caso dicho valor es independiente del tamaño. En el caso de colectivos pequeños el reaseguro nunca actúa ya que la siniestralidad de la compañía siempre está por debajo de la prioridad *M*, sin embargo, cuando el colectivo empieza a crecer a partir de un determinado umbral, la sinestralidad de la compañía sobrepasa la prioridad y cada vez hay más siniestralidad a cargo del reasegurador, disminuyendo por tanto la γ y, en consecuencia, la prima que retiene la cedente de cada individuo, P_i^C.

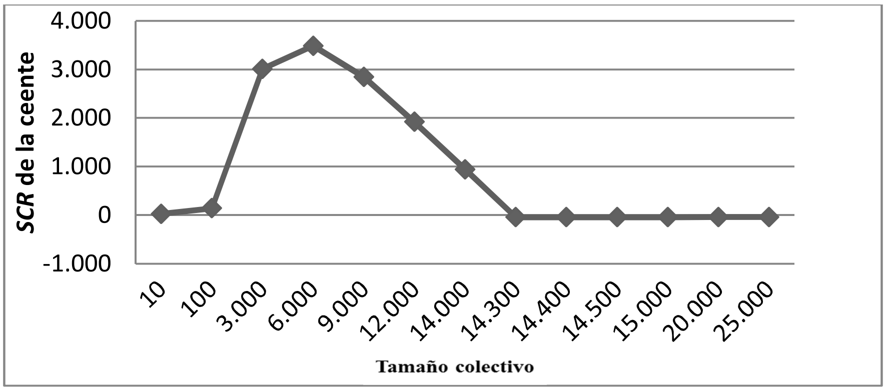
Gráfico 4: Relación entre γ y n_0



Fuente: Elaboración propia

En el gráfico 5 se muestra el comportamiento de SCR_0^C con respecto al tamaño del colectivo, n_0, y en él se aprecian tres tramos diferenciados. En el primero, que se corresponde con tamaños del colectivo reducidos, en este ejemplo hasta 6.000 asegurados, el comportamiento del SCR_0^C es creciente, debido a que para colectivos de tamaño reducido prácticamente toda la siniestralidad de la cartera la asume la cedente, por estar ésta por debajo de la prioridad, y conforme va aumentando el tamaño del colectivo, la siniestralidad a cargo de la cedente aumenta en términos absolutos y, por tanto, mayor debe ser el SCR_0^C que debe de dotar. En el segundo tramo el SCR_0^C disminuye hasta un tamaño de 14.300 asegurados, esto se debe a que la cedente empieza a compartir el peso de la siniestralidad con el reasegurador y cada vez es menor el porcentaje de participación de la cedente en la siniestralidad total de la cartera conforme aumenta el tamaño del colectivo y la compañía de seguros puede disminuir sus dotaciones de SCR_0^C. El último tramo se caracteriza por el comportamiento prácticamente constante del SCR_0^C, tomando valores ligeramente negativos. En este caso la siniestralidad de la cartera siempre es mayor que la prioridad que asume la cedente y cualquier aumento de siniestralidad que se produzca en la cartera, como consecuencia de aumentos en el tamaño en el colectivo, los asume íntegramente el reasegurador, en consecuencia la cedente no tiene que dotar SCR_0^C.

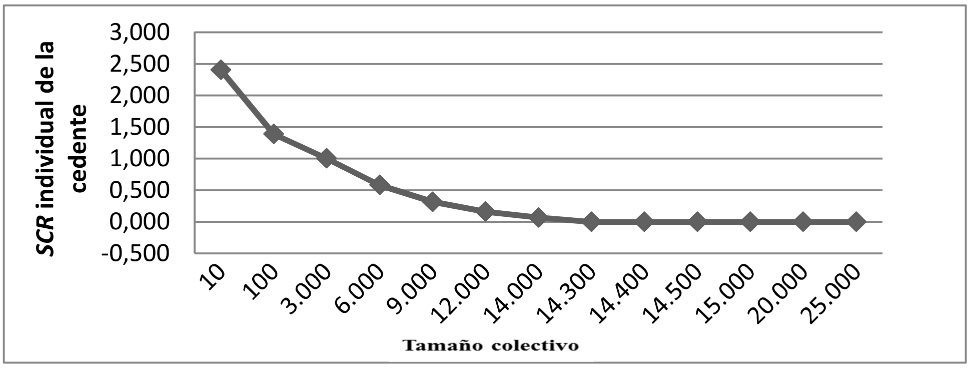
Gráfico 5: Relación entre SCR_0^C y n_0



Fuente: Elaboración propia

En el gráfico 6 se muestra el comportamiento decreciente del $SCR_{0,i}^C$, respecto al tamaño del colectivo, n_0.

Gráfico 6: Relación entre $SCR_{0,i}^{C}$ y n_0



Fuente: Elaboración propia

En la tabla 7 se muestran los resutados obtenidos para γ, SCR_0^C, $SCR_{0,i}^C$, P_i y P_i^C de un reaseguro stop-loss con prioridad *M=5.000€* y con $n_0 = 6.000$ asegurados para diferentes edades x del colectivo.

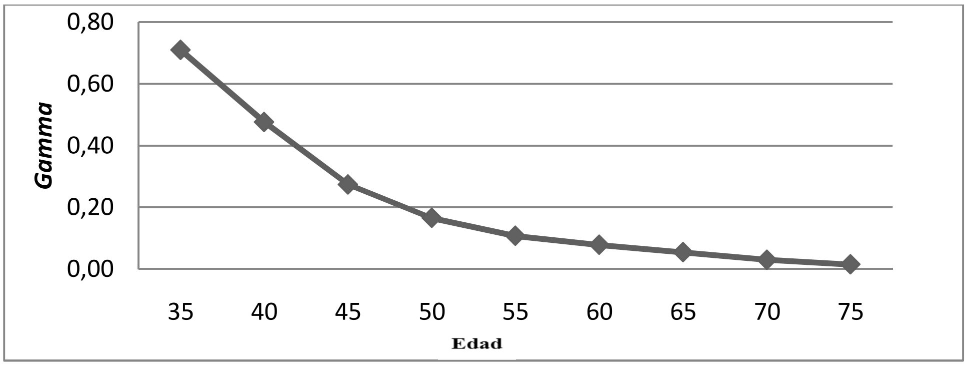
Tabla 7. Reaseguro stop-loss con $n_0 = 6000$

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{\gamma}$	$\boldsymbol{SCR_0^c}$	$\boldsymbol{SCR_{0,i}^c}$	$\boldsymbol{P_i}$	$\boldsymbol{P_i^c}$
35	0,7096660	3.482,756	0,58045933	1,044122	0,740978
40	0,4762533	2.867,919	0,47798650	1,693141	0,806364
41	0,4276595	2.893,919	0,48231983	1,896307	0,810974
42	0,3823669	1.924,922	0,32082033	2,128381	0,813823
43	0,3414892	949,073	0,15817883	2,388011	0,815480
44	0,3054860	-29,856	-0,00497599	2,672562	0,816430
45	0,2738747	-26,310	-0,00438506	2,983227	0,817030
48	0,2002341	-15,334	-0,00255572	4,089354	0,818828
49	0,1815865	-11,428	-0,00190460	4,512788	0,819461
50	0,1652454	6,8133	0,00113556	4,963629	0,820217
55	0,1068579	19,488	0,00324806	7,715879	0,824503
60	0,0782270	49,576	0,00826263	10,602640	0,829413
65	0,0541566	88,410	0,01473493	15,432530	0,835773
70	0,0295548	205,703	0,03428383	28,927960	0,854959
75	0,0147819	497,607	0,08293447	61,073580	0,902781

Fuente: Elaboración propia

En el gráfico 7 se muestra el comportamiento decreciente de γ respecto a la edad x de los asegurados del colectivo. A mayor edad menor es el porcentaje de siniestralidad de la cedente en la siniestralidad total y menor es γ.

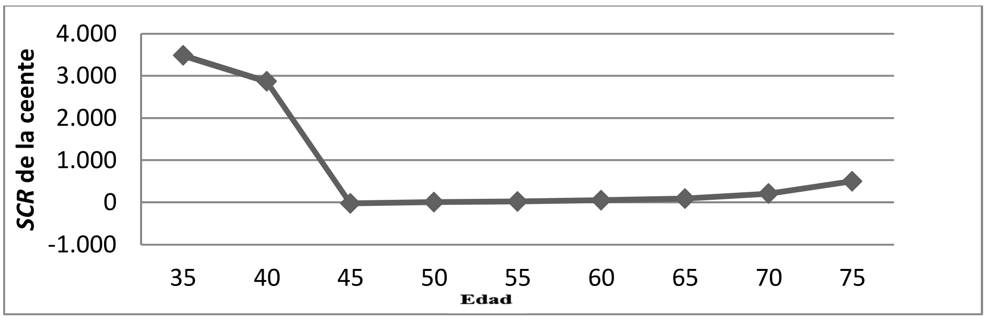
Gráfico 7: Relación entre γ y la edad x de los asegurados



Fuente: Elaboración propia

En el gráfico 8 se muestra el comportamiento del SCR_0^C con respecto a la edad x de los individuo del colectivo. En este caso se aprecian dos tramos diferenciados. En el primer tramo el SCR_0^C disminuye hasta la edad de 44 años, alcanzando un valor negativo, debido al menor peso que asume la cedente en la siniestralidad total conforme aumenta la edad de los asegurados. En el segundo tramo, el SCR_0^C presenta un comportamiento relativamente constante entorno al cero, para luego crecer en las últimas edades consideradas. Para las edades del segundo tramo, cualquier aumento de siniestralidad que se produzca en la cartera, como consecuencia de aumentos en la edad, los asume íntegramente el reasegurador, sin embargo, para las últimas edades cada vez más asegurados del colectivo fallecen antes de los 5 años y, por tanto, no llegan a pagar todas las primas periódicas de la operación, disminuyendo el volumen de activos de la cedente respecto a los pasivos, obligando a ésta a llevar a cabo dotaciones de SCR_0^C cada vez mayores.

Gráfico 8: Relación entre SCR_0^C y la edad x de los asegurados



Fuente: Elaboración propia

En la tabla 8 se muestran los resutados obtenidos para γ, SCR_0^C, $SCR_{0,i}^C$, P_i y P_i^C en un reaseguro stop-loss con un tamaño de $n_0 = 6000$ asegurados de edad, todos ellos, $x = 35$ años y para diferentes valores de la prioridad M.

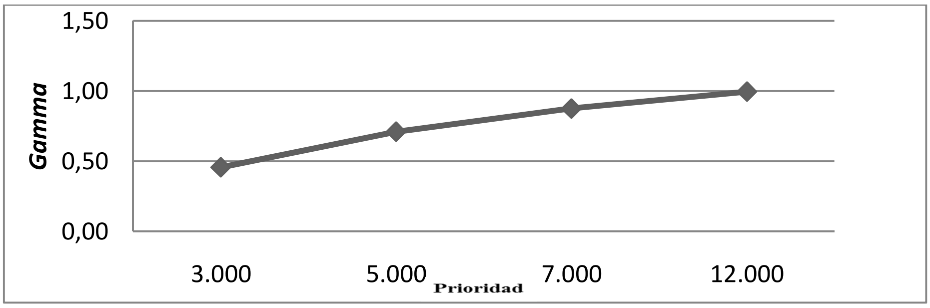
Tabla 8. Reaseguro stop-loss con $n_0 = 6000$ y edad de los asegurados $x = 35$ años

$\boldsymbol{M}$	$\boldsymbol{\gamma}$	$\boldsymbol{SCR_0^c}$	$\boldsymbol{SCR_{0,i}^c}$	$\boldsymbol{P_i}$	$\boldsymbol{P_i^c}$
3.000	0,457067	1.880,52	0,3134195	1,044122	0,477233
5.000	0,709898	3.484,13	0,58068833	1,044122	0,741220
7.000	0,875865	4.573,34	0,76222333	1,044122	0,914509
12.000	0,995502	5.404,58	0,90076383	1,044122	1,039425

Fuente: Elaboración propia

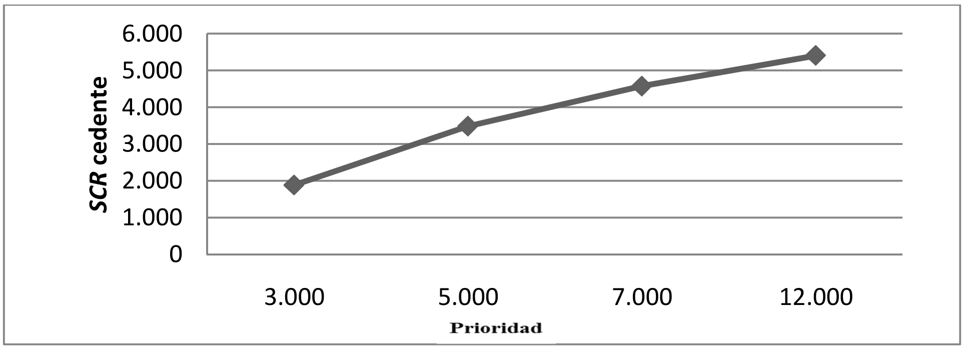
En los gráficos 9 y 10 se muestra el comportamiento creciente de γ y del SCR_0^C, respectivamente, con respecto a la priodidad de la cedente M, ya que aumentos en la prioridad hacen aumentar el peso la siniestralidad de la cedente respecto a la siniestralidad total de la cartera.

Gráfico 9: Relación entre γ y M



Fuente: Elaboración propia

Gráfico 10: Relación entre SCR_0^C y M



Fuente: Elaboración propia

5. CONSIDERACIONES FINALES

En este trabajo se ha presentado el efecto mitigador que tiene la política de reaseguro de la compañía de seguros, en su SCR, asociado al riesgo de fallecimiento, de acuerdo con la nueva normativa de Solvencia II.

Las modalidades de reaseguro estudiadas son el cuota parte, el excedentes y el stop-loss. La implementación de estas modalidades en el modelo interno propuesto ha sido muy diferente, teniendo en cuenta que uno de los inputs del modelo es saber, para cada póliza, las primas que retiene la cedente respecto a la prima total. En el caso de las dos primeras modalidades de reaseguro, al tratarse de reaseguros proporcionales, el cálculo de estas primas ha sido inmediato, sin embargo, en el caso del stop-loss, al ser una modalidad no proporcional que se basa en la siniestralidad de la cartera, la prima retenida por la cedente se refiere a toda la cartera pero no a cada póliza. El problema se ha solucionado incorporando hipótesis relativas al reparto de esta prima entre todos los asegurados del colectivo.

En el ejemplo numérico se ha considerado un colectivo homogéneo en cuanto a edades, sexo y suma asegurada, llevándose a cabo un análisis de sensibilidad de cómo afecta al SCR_0^C la política de reaseguro. En el caso de las modalidades proporcionales, el SCR_0^C es inversamente proporcional a la cuota de retención de la compañía, de tal manera que cuanto mayor sea ésta, es decir, cuanto menos se ceda al reaseguro, mayor será el SCR_0^C. En el reaseguro cuota parte, la cuota de retención es la misma para todos las pólizas de la cartera y viene establecida en el contrato, sin embargo, en el caso del reaseguro de excedentes dicha cuota se deberá de calcular a posteriori, ya que depende de la relación entre el pleno de retención que determine la compañía y la suma asegurada de la póliza.

En el caso del reaseguro stop-loss se ha analizado como afecta al SCR_0^C la prioridad, la edad del colectivo y su tamaño. Cabe destacar en este sentido el comportamiento creciente y luego decreciente que experimenta el SCR_0^C frente a variaciones en el tamaño del colectivo.

En todas las modalidades de reaseguro estudiadas el SCR_0^C es decreciente conforme aumenta el tamaño del colectivo, debido a la disminución que se produce en el riesgo no sistemático de la cartera al aumentar ésta su tamaño.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- CASTAÑER, A. y CLARAMUNT, M.M. (2014). *Solvencia II*. En OMADO (Objectes i materials docents). Dipòsit Digital de la UB. Col·lecció Omado. http://hdl.handle.net/2445/44823.
- CHRISTIANSEN, M.C. y NIEEMEYER, A. (2014). “Fundamental definition of the solvency capital requeriment in Solvency II”. ASTIN Bulletin, 44, pp. 501-533. (http://www.journals.cambridge.org/article_S0515036114000105).
- DITTRICH, J. (2010). “The impact of reinsurance on capital requirements under Solvency II”. International Congress of actuaries 7-10. March 2010. Cape town.
- FONTANALS, H. y RUIZ, E. (2014). *Risc de tipus d’interès*. Editorial UOC. Barcelona.
- HEINEN, B. (2015). “El reaseguro como herramienta de la gestión de capital bajo Solvencia II Europea”. Enero 2015. Swiss Re.
- EL PARLAMENTO EUROPEO Y EL CONSEJO DE LA UNIÓN EUROPEA (2009). DIRECTIVA 2009/138/CE DEL PARLAMENTO EUROPEO Y DEL CONSEJO, de 25 de noviembre de 2009. *Diario oficial* de la Unión Europea, L 335: 1-155. (http://eur-lex.europa.eu/LexUriServ/LexUriServ.do?uri=OJ:L:2009:335:0001:0155:ES:PDF).
- MINZONI, A. (2009). *Reaseguro*. Editor: Universidad Nacional Autónoma de México.
- PONS, M.A y SARRASÍ, F.J. (2017). “Simulación de Monte Carlo aplicada a un modelo interno para calcular el riesgo de mortalidad en Solvencia II”. Revista electrónica de comunicaciones y trabajos de Asepuma. Rect@. Volumen 18, págs. 53-70. DOI 10.24309/recta.2017.18.01.04.
- UNESPA (2010). Especificaciones técnicas – QIS5. Pages 1-368. Traducción no oficial de las especificaciones técnicas de QIS5.
- ZHOU, T. and KUSCHEL, N. (2012). “Cost of capital under Solvency II Reinsurance and capital market instruments”. Solvency Consulting Knowledge Series. Munich Re.