Revista INTEGRACIÓN
Universidad Industrial de Santander
Escuela de Matemáticas
Vol. 16, No 1, p. 17–24, enero–junio de 1998

Error en la Interpolación

Lelis R. Vaillant Pascual*
Mirta Fabá Girón*

Resumen

En este trabajo se estudia el problema de la búsqueda de expresiones de los errores en la interpolación. Se determina una forma general de expresar el error y se ilustra su aplicación en distintos tipos de funciones de interpolación en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{R}^n$.

1. Introducción

Consideremos los nodos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ del eje real y los valores $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$ de la función $f(x)$. Sea dada una familia de funciones $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ linealmente independientes. El problema de la interpolación consiste en construir una función $\varphi(x)$ de la forma

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \varphi_i(x) \tag{1}$$

que aproxime a $f(x)$ bajo el criterio de que

$$f(x_i) = \varphi(x_i),\ i = 0, 1, \ldots, n. \tag{2}$$

Este sistema de ecuaciones lineales lo podemos escribir en la forma

$$\begin{aligned} a_0\varphi_0(x_0) + a_1\varphi_1(x_0) + \cdots + a_n\varphi_n(x_0) &= f(x_0), \\ a_0\varphi_0(x_1) + a_1\varphi_1(x_1) + \cdots + a_n\varphi_n(x_1) &= f(x_1), \\ &\vdots \\ a_0\varphi_0(x_n) + a_1\varphi_1(x_n) + \cdots + a_n\varphi_n(x_n) &= f(x_n). \end{aligned} \tag{3}$$

*Departamento de Matemáticas, Universidad de Oriente, Santiago de Cuba, Cuba.

Este sistema de ecuaciones tiene solución única si el determinante de su matriz es diferente de cero. La matriz del sistema (3) tiene la forma

$$\begin{bmatrix} \varphi_0(x_0) & \varphi_1(x_0) & \cdots & \varphi_n(x_0) \\ \varphi_0(x_1) & \varphi_1(x_1) & \cdots & \varphi_n(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_0(x_n) & \varphi_1(x_n) & \cdots & \varphi_n(x_n) \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Sea D el el determinante de esta matriz; entonces, resolviendo por Cramer, tendremos que la solución del sistema (3) se determina por las ecuaciones

$$a_i = \frac{D_i}{D},\ i = 0, 1, 2, ..., n, \tag{5}$$

donde D_i es el determinante de la matriz (4) con la columna i-ésima sustituida por la columna de términos independientes del sistema (3).

2. Término general del error

Sea $E(x) = f(x) - \varphi(x)$ el error de la interpolación. En [1] se da una expresión del error para la interpolación general de la forma

$$E(x) = L_{n+1}(f(\xi))h(x) \tag{6}$$

donde

$$L_{n+1}(f) = \frac{W[\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n, f]}{W[\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n]};$$

$W[\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n,]$ es el Wronskiano de las funciones $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$; $h(x) = \int_a^x K(x,s)ds$;

$$K(x,s) = W^{-1}[\varphi_0(s), \varphi_1(s), \dots, \varphi_n(s)] \begin{vmatrix} \varphi_0(s) & \varphi_1(s) & \cdots & \varphi_n(s) \\ \varphi_0^{(1)}(s) & \varphi_1^{(1)}(s) & \cdots & \varphi_n^{(1)}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_0^{(n-1)}(s) & \varphi_1^{(n-1)}(s) & \cdots & \varphi_n^{(n-1)}(s) \\ \varphi_0(x) & \varphi_1(x) & \cdots & \varphi_n(x) \end{vmatrix}$$

y ξ es un punto del intervalo $[a, b]$ que contiene los nodos de interpolación.

Lema 1 *El error de la interpolación se puede expresar mediante la expresión*

$$E(x) = \frac{A(x)}{D}, \tag{7}$$

donde $A(x)$ *es el determinante funcional*

$$A(x) = \begin{vmatrix} f(x) & \varphi_0(x) & \varphi_1(x) & \cdots & \varphi_n(x) \\ f(x_0) & \varphi_0(x_0) & \varphi_1(x_0) & \cdots & \varphi_n(x_0) \\ f(x_1) & \varphi_0(x_1) & \varphi_1(x_1) & \cdots & \varphi_n(x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(x_n) & \varphi_0(x_n) & \varphi_1(x_n) & \cdots & \varphi_n(x_n) \end{vmatrix} \tag{8}$$

y D *es el determinante de la matriz* (4).

Demostración. Desarrollando $A(x)$ por menores de la primera fila tenemos que $A(x) = f(x)D - D_0\varphi_0(x) - D_1\varphi_1(x) \ldots - D_n\varphi_n(x)$, de donde resulta (7). ∎

Teorema 1 *Si las funciones* $f(x)$, $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ *tienen derivadas hasta el orden* $n-1$, *entonces el error se puede expresar en la forma*

$$E(x) = \frac{W(x)A^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!D}, \tag{9}$$

donde $W(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)$.

Demostración. Consideremos la función auxiliar

$$\psi(z) = f(z) - \varphi(z) - \frac{W(z)}{W(x)}\left[f(x) - \varphi(x)\right];$$

como $\psi(x) = 0$ y $\psi(x_i) = 0$ para $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, entonces $\psi(z)$ tiene $n+2$ raíces; por el teorema generalizado de Rolle existe un punto ξ en el cual

$$\psi^{(n+1)}(\xi) = 0,$$

o sea

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(\xi) - \varphi^{(n+1)}(\xi) - \frac{W^{(n+1)}(\xi)}{W(x)}\left[f(x) - \varphi(x)\right] &= 0, \\ f^{(n+1)}(\xi) - \varphi^{(n+1)}(\xi) - \frac{(n+1)!}{W(x)}\left[f(x) - \varphi(x)\right] &= 0, \\ E^{(n+1)}(\xi) - \frac{(n+1)!}{W(x)}E(x) &= 0; \end{aligned}$$

de aquí tenemos

$$E(x) = \frac{W(x)E^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!},$$

de donde se obtiene (9) teniendo en cuenta (7). ∎

3. Interpolación polinomial en una variable

Tomando como funciones base la familia $\varphi_i(x) = x^i, i = 0, 1, ..., n$, podemos hallar el polinomio de interpolación que aproxima a $f(x)$, el cual se puede expresar en la forma de Lagrange,

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{w(x)}{(x - x_k)W'(x_k)} f(x_k), \tag{10}$$

o en la forma de Newton,

$$N_n(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \prod_{i=0}^{k-1} (x - x_i) f[x_0, x_1, \ldots, x_k], \tag{11}$$

donde

$$w(x) = \prod_{k=0}^{n} (x - x_k) \tag{12}$$

y $f[x_0, x_1, ..., x_k]$ es la diferencia dividida de $f(x)$ en los nodos $x_0, x_1, \ldots, x_k$. Para la interpolación polinomial son conocidas diversas expresiones del término residual; las más conocidas son [1, 2, 3]:

$$E(x) = \frac{w(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \tag{13}$$

y

$$E(x) = w(x) f[x_0, x_1, \ldots, x_n]. \tag{14}$$

Otras expresiones también son [2]:

$$E(x) = w(x) \int_0^1 dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_n} x + \left(\sum_{k=0}^{n} t_{k+1}(x_k - x_{k-1}) \right) dt_{n+1} \tag{15}$$

y

$$E(x) = \frac{w(x)}{2\pi i} \int_l \frac{f(z)}{(z - x)w(z)} dz, \tag{16}$$

donde $x_{-1} = x$, z es una variable compleja y l es una curva cerrada que contiene en su interior a los nodos $x_0, x_1, ..., x_n$.
De acuerdo al lema, para la interpolación polinomial tenemos que

$$A(x) = \begin{vmatrix} f(x) & 1 & x & x^2 & \cdots & x^n \\ f(x_0) & 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ f(x_1) & 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(x_n) & 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}, \tag{17}$$

y D en este caso es el determinante de Vandermonde

$$D = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^n \\ 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix},$$

por lo que $E(X) = \frac{A(X)}{D}$. De aquí se deduce fácilmente la expresión (13) desarrollando $A(X)$ por menores de la primera columna. Para el análisis del error también se puede usar (9), de la cual se deduce (13).

4. Interpolación polinomial en varias variables

Consideremos la interpolación polinomial n-dimensional tomemos como base a $\{\varphi_k(x)\}$, que son monomios de la forma $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$, siendo su grado igual a $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ $(\alpha_k \geq 0)$. Tomemos N diferentes puntos de $\mathbb{R}^n$ $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(N)}$ y analicemos el problema de construir el polinomio de grado m de la forma

$$P_m(x) = \sum_{i=1}^{M} b_i \varphi_i(x), \tag{18}$$

donde $\varphi_k(x)$ es un monomio de grado menor o igual que m. La cantidad de monomios de grado menor o igual a m es $M = M(m,n) = \frac{(m+n)!}{m!n!}$. De acuerdo con [4], para construir el polinomio de interpolación es necesario que se cumpla que $N = M = M(m,n)$ y que el determinante del sistema

$$b_1\varphi_1(x^{(k)}) + b_2\varphi_2(x^{(k)}) + \cdots + b_N\varphi_N(x(k)) = f(x^{(k)}),\ k = \overline{1,N}, \tag{19}$$

sea diferente de cero. No es difícil verificar que $P_m(x)$ se define por

$$P_m(x) = \sum_{i=1}^{N} L_i(x) f(x^{(i)}), \tag{20}$$

donde $L_i(x) = \frac{w_i(x)}{w_i(x^{(i)})}$ y

$$w_i(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \cdots & \varphi_N(x) \\ \varphi_1(x^{(1)}) & \varphi_2(x^{(1)}) & \cdots & \varphi_N(x^{(1)}) \\ \varphi_1(x^{(2)}) & \varphi_2(x^{(2)}) & \cdots & \varphi_N(x^{(2)}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1(x^{(i-1)}) & \varphi_2(x^{(i-1)}) & \cdots & \varphi_N(x^{(i-1)}) \\ \varphi_1(x^{(i+1)}) & \varphi_2(x^{(i+1)}) & \cdots & \varphi_N(x^{(i+1)}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1(x^{(N)}) & \varphi_2(x^{(N)}) & \cdots & \varphi_N(x^{(N)}) \end{vmatrix}. \tag{21}$$

Aplicando el lema, no es difícil darse cuenta de que el error $E(x)$ se define por (7) con $A(x)$ como está dado en (8), es decir,

$$A(x) = \begin{vmatrix} f(x) & \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \cdots & \varphi_N(x) \\ f(x^{(1)}) & \varphi_1(x^{(1)}) & \varphi_2(x^{(1)}) & \cdots & \varphi_N(x^{(1)}) \\ f(x^{(2)}) & \varphi_1(x^{(2)}) & \varphi_2(x^{(2)}) & \cdots & \varphi_N(x^{(2)}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(x^{(N)}) & \varphi_1(x^{(N)}) & \varphi_2(x^{(N)}) & \cdots & \varphi_N(x^{(N)}) \end{vmatrix}, \tag{22}$$

siendo D el determinante formado sin la primera fila y sin la primera columna de la matriz $A(x)$.

5. Interpolación de Hermite

Consideremos ahora el problema de construir una función de interpolación $\varphi(x)$ de la función $f(x)$ en los nodos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ con la exigencia de que

$$\varphi^{(k)}(x_i) = f^{(k)}(x_i),\ i = 0, 1, \ldots, n;\ k = 0, 1, \ldots, l_i,$$

que como se aprecia, definen $l_0 + l_1 + \ldots + l_n = N + 1$ condiciones. Por supuesto que $\varphi(x)$ tiene la forma

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{N} c_i \varphi_i(x), \tag{23}$$

la cual está definida por $N+1$ parámetros c_i. Aplicando el lema tenemos entonces que el error se define por (7) con $A(x)$ tomando la forma

$$\begin{vmatrix} f(x) & \varphi_0(x) & \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \cdots & \varphi_N(x) \\ f(x_0) & \varphi_0(x_0) & \varphi_1(x_0) & \varphi_2(x_0) & \cdots & \varphi_N(x_0) \\ f^{(1)}(x_0) & \varphi_0^{(1)}(x_0) & \varphi_1^{(1)}(x_0) & \varphi_2^{(1)}(x) & \cdots & \varphi_N^{(1)}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f^{(l_0)}(x_0) & \varphi_0^{(l_0)}(x_0) & \varphi_1^{(l_0)}(x_0) & \varphi_2^{(l_0)}(x_0) & \cdots & \varphi_N^{(l_0)}(x_0) \\ f(x_1) & \varphi_0(x_1) & \varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1) & \cdots & \varphi_N(x_1) \\ f^{(1)}(x_1) & \varphi_0^{(1)}(x_1) & \varphi_1^{(1)}(x_1) & \varphi_2^{(1)}(x_1) & \cdots & \varphi_N^{(1)}(x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f^{(l_1)}(x_1) & \varphi_0^{(l_1)}(x_0) & \varphi_1^{(l_1)}(x_0) & \varphi_2^{(l_1)}(x_0) & \cdots & \varphi_N^{(l_1)}(x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(x_n) & \varphi_0(x_0) & \varphi_1(x_0) & \varphi_2(x_0) & \cdots & \varphi_N(x_1) \\ f^{(1)}(x_n) & \varphi_0^{(1)}(x_0) & \varphi_1^{(1)}(x_0) & \varphi_2^{(1)}(x_0) & \cdots & \varphi_N^{(1)}(x_1) \\ f^{(l_n)}(x_1) & \varphi_0^{(l_n)}(x_0) & \varphi_1^{(l_n)}(x_1) & \varphi_2^{(ln)}(x_1) & \cdots & \varphi_N^{(l_1)}(x_1) \end{vmatrix},$$

siendo D el determinante que resulta de eliminar la primera fila y la primera columna. Si las funciones $f(x), \varphi_0(x), \varphi_1(x), ...,, \varphi_N(x)$ cumplen las condiciones del teorema, entonces el error también toma la forma (9) ,

$$E(x) = \frac{W(x)A^{N+1}(\xi)}{(N+1)!D},$$

con

$$W(x) = \prod_{k=0}^{n} (x - x_k)^{P_k+1}.$$

6. Generalización

Ahora analicemos los procesos de aproximación en general, en los cuales se tiene una función $f(x)$ que se quiere aproximar por $\varphi(x)$. Tenemos entonces que

$$f(x) \approx \varphi(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \varphi_k(x);$$

los coeficientes α_k se hallan como la solución de un sistema de ecuaciones que podemos representar el la forma

$$V = d,$$

donde V es una matriz cuadrada de orden $(n+1)$, α es el vector incógnita o de los coeficientes α_k, $k = 0, 1, ..., n$ y d es el vector de términos independientes d_k, $k = 0, 1, \ldots, n$. Por un razonamiento análogo al realizado en el lema, podemos expresar el error en la forma

$$E(x) = f(x) - (x) = \frac{A(x)}{D},$$

donde D es el determinante de V y $A(x)$ tiene la forma

$$A(x) = \begin{vmatrix} f(x) & \varphi_0(x) & \varphi_1(x) & \cdots & \varphi_n(x) \\ d_0 & v_{00} & v_{01} & \cdots & v_{0n} \\ d_1 & v_{10} & v_{11} & \cdots & v_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_n & v_{n0} & v_{n1} & \cdots & v_{nn} \end{vmatrix}. \tag{24}$$

7. Conclusiones

La forma del error dada en el lema es más general que las restantes que hemos mencionado, pues estas son casos particulares de la misma. Además, se puede aplicar a la interpolación en espacios n-dimensionales. El uso de determinantes funcionales en la interpolación hace el tratamiento más simple. Por otro lado se presenta una herramienta para el análisis del error en procesos de aproximación en general.

Referencias

[1] BEREZIN I. S. AND ZHIDKOV N. P. *Computing Methods*. Vol II. Habana 1965.
[2] KRYLOV V. I. *Cáculo Aproximado de Integrales*. Edit. Naúka, Moscú, 1966 (en Ruso).
[3] HILDEBRAND F. B. *Introduction to Numerical Analysis*. McGraw-Hill, New York, 1956.
[4] NIKOLSKI S. *Fórmulas de Cuadratura*. Edit. MIR, Moscú, 1987.
[5] MISOVSKI I. P. *Fórmulas de Cuadratura de Interpolación*. Edit. Naúka, Moscú, 1981 (en Ruso).