Revista INTEGRACION
Universidad Industrial de Santander
Escuela de Matemáticas
Vol. 13, No 1, p. 27–39, enero–junio de 1995

# Representación Integral de Cierta Norma, y sus Esferas

LUIS ENRIQUE RUIZ HERNANDEZ*

**Resumen**

Se introduce una norma $\varphi$ sobre $\mathbb{R}^2$ representada como la integral sobre $[0,1]$ del valor absoluto de un producto interior de vectores. Se indaga la geometría y topología de su esfera cerrada unitaria $\mathcal{C}$ de centro en el origen 0. Resulta ser $\mathcal{C}$ la envolvente convexa de dos elipses $\mathcal{E}$ y $\mathcal{E}$ tangentes en 0 y simétricas respecto a 0. Además se construye una sucesión de normas $\{\varphi_n\}$ que convergen (puntualmente sobre $\mathbb{R}^2$) a $\varphi$, de manera tal que las fronteras de sus esferas unitarias son paralelógonos que "convergen radialmente" a la frontera de $\mathcal{C}$. Se describen explícitamante los elementos geométricos de $\mathcal{C}$ y se calcula su área.

## 1. Introducción

No son muy frecuentes las normas sobre $\mathbb{R}^2$ que se representan por medio de integrales. Una de ellas es la norma euclídea

$$\|X\| = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} |X \cdot (\cos t, \sin t)|\, dt,$$

integral obtenida como el límite puntual sobre $\mathbb{R}^2$ de una sucesión de normas $\{\varphi_n\}$ cuyas esferas unitarias son $2n-$gonos regulares de circunradio unidad ([10], pp. 151–153; [11], pp. 144–145).

¿Existen otras normas con esta propiedad? Un intento de respuesta positiva se desarrolla a lo largo del presente trabajo. En efecto, la norma $\varphi$ definida en

*Departamento de Matemáticas, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, Duitama, Boyacá, COLOMBIA.

(1) tiene esas características, siendo tal que su esfera cerrada unitaria $\mathcal{C}$ (de centro el origen $\mathbf{0}$) es justamente la envolvente convexa de dos elipses $-\mathcal{E}$ y $\mathcal{E}$ tangentes en $\mathbf{0}$ y simétricas respecto a $\mathbf{0}$ (Teorema 1, ver Figura 1).

Al indagar aquí la geometría y topología de $\mathcal{C}$ =conv$(-\mathcal{E}\cup\mathcal{E})$ fue preciso introducir una metodología que incorpora nociones de cálculo integral, análisis convexo y algebra lineal, además de algunos resultados recientes obtenidos por el autor sobre polígonos convexos.

Denotaremos con letra imprenta mayúscula los puntos o vectores (fila) de $\mathbf{R}^2$, por $A\cdot B$ el producto interior usual de dos vectores $A$ y $B$ en $\mathbf{R}^2$, y por $\mathcal{L}^T$ la transpuesta de una matriz $\mathcal{L}$.

**Lema 1.** *Sean $a, b, c$ números reales positivos dados. Entonces la función $\varphi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definida por*

$$\varphi(X) = \int_0^1 |X\cdot(a, b+ct)|\, dt \tag{1}$$

*para todo $X \in \mathbf{R}^2$, es una norma sobre $\mathbf{R}^2$.*

**Demostración.** Fijando cada $X = (x_1, x_2)$ en $\mathbf{R}^2$ el integrando en (1) es una función no negativa y continua para todo $t\in[0,1]$. Por tanto $\varphi(X) = 0$ es equivalente a

$$ax_1 + bx_2 + cx_2 t = 0, \quad \text{para todo } t \in [0,1]$$

([8], p. 138, ejercicio 2). Derivando ambos miembros con respecto a $t$ obtenemos $x_2 = 0$, reduciendo la relación a $ax_1 = 0$, esto es , $x_1 = 0$.

La propiedad homogénea de la integral nos hereda $\varphi(\lambda X) = |\lambda|\,\varphi(X)$ para $\lambda\in R$. Otras de sus propiedades aportan

$$\varphi(X+Y) \le \varphi(X) + \varphi(Y), \quad \text{para todo } X, Y \in \mathbf{R}^2. \ \blacksquare$$

**Lema 2.** *Si $s \neq 0$ y $t$ son números reales, entonces*

$$s^{-1}\{(s+t)\,|s+t| - t\,|t|\} \ge 0.$$

**Demostración.** Si hacemos $u = (s+t)\,|s+t| - t\,|t|$, la desigualdad anterior es equivalente a $su \ge 0$. Ocurren dos casos.

**(i)** $s + t \ge 0$

En este evento, $u = s^2 + 2st + t^2 - t\,|t|$. Si $s > 0$ entonces

$$u = \begin{cases} s\{t + (s+t)\} \geq 0, & t \geq 0, \\ (s+t)^2 + t^2 \geq 0, & t \leq 0, \end{cases}$$

y por tanto $su \geq 0$.

Si $s < 0$ entonces $t \geq 0$ (de lo contrario $s + t < 0$), y así

$$u = s\{t + (s+t)\} \leq 0, \quad \text{y } su \geq 0.$$

**(ii)** $s + t \leq 0$

Aquí $u = -s^2 - 2st - t^2 - t\,|t|$. Si $s > 0$ entonces $t \leq 0$ (de lo contrario $s + t > 0$), y

$$u = s\{t + (s+t)\} \geq 0, \quad \text{con } su \geq 0.$$

Si $s < 0$ entonces

$$u = \begin{cases} -\left\{(s+t)^2 + t^2\right\} \leq 0, & \text{si } t \geq 0, \\ -s\{t + (s+t)\} \leq 0, & \text{si } t \leq 0, \end{cases}$$

de donde $su \geq 0$. ∎

**Teorema 1.** *Sea $\varphi$ la norma sobre $\mathbb{R}^2$ definida en (1), y sea $\mathcal{E}$ la elipse de centro*

$$G = \left(-\frac{2b+c}{ac}, 2c^{-1}\right)$$

*y ecuación matricial*

$$(X - G)\begin{pmatrix} 2a^2 & 2ab + ac \\ 2ab + ac & 2b^2 + 2bc + c^2 \end{pmatrix}(X - G)^T = 2. \tag{2}$$

*Entonces*

**(i)** *Las elipses $\mathcal{E}$ y $-\mathcal{E} = \{-X \mid X \in \mathcal{E}\}$ tienen al eje de las abscisas como tangente común en el origen 0.*

**(ii)** *Si $\mathcal{L}_i$ es la recta*

$$x_2 = -\frac{2a}{ab+c}x_1 + (-1)^i \frac{2}{2b+c}, \tag{3}$$

*y $\mathcal{L}'_j$ la recta*

$$x_2 = (-1)^{j+1} 4c^{-1}, \tag{4}$$

*entonces $\mathcal{L}_i$ y $\mathcal{L}'_j$ son tangentes a $(-1)^{j+1}\mathcal{E}$ en los puntos*

$$V_{ij} = \left((-1)^j \frac{2b + \left\{1 + (-1)^{i+j}\right\} c}{ac}, (-1)^{j+i} 2c^{-1}\right) \tag{5}$$

*y*

$$T_i = \left((-1)^i \frac{4b + 2c}{ac}, (-1)^{j+1} 4c^{-1}\right), \tag{6}$$

*respectivamente, para todo $i, j = 1, 2$.*

**(iii)** *$S_1[0]$ (la esfera cerrada unitaria de centro 0, respecto a la norma $\varphi$) es la envolvente convexa de $-\mathcal{E} \cup \mathcal{E}$.*

*Es decir,*

$$S_1[0] = conv(-\mathcal{E} \cup \mathcal{E}),$$

**(iv)**

$$Fr(S_1[0]) = \left(\bigcup_{i=1}^{2} \overline{V_{i1}V_{i2}}\right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{2} \widehat{V_{1j}T_jV_{2j}}\right),$$

*donde la semielipse $\widehat{V_{1j}T_jV_{2j}}$ está contenida en $(-1)^{j+1}\mathcal{E}$, para todo $j = 1, 2$ (ver figura 1).*

**Demostración**: Observando que la ecuación matricial de la elipse $-\mathcal{E}$ (de centro $-G$) se obtiene de (2) cambiando el signo menos por más, entonces la ecuación escalar de $(-1)^{j+1}\mathcal{E}$ es

$$2a^2x_1^2 + (4ab + 2ac)\, x_1x_2 + \left(2b^2 + 2bc + c^2\right) x_2^2 + (-1)^j\, 2cx_2 = 0, \tag{7}$$

en la cual, derivando implícitamente con respecto a $x_1$, aparece

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{2a^2x_1 + (2ab + ac)\, x_2}{(2ab + ac) + x_1 + (2b^2 + 2bc + c^2)\, x_2 + (-1)^j c},$$

la pendiente de la tangente a $(-1)^{j+1}\mathcal{E}$ en el punto $(x_1, x_2)$ para todo $j = 1, 2$. A la luz de esta expresión se siguen las siguientes afirmaciones.

La tangente a $(-1)^{j+1}\mathcal{E}$ en $\mathbf{0}$ tiene pendiente cero, $j = 1, 2$. Además, las rectas $\mathcal{L}_i, \mathcal{L}'_j$ y los puntos $V_{ij}, T_j$, definidos en (3), (4), (5) y (6), son tales que $V_{ij}, T_j$ están en $\mathcal{L}_i \cap (-1)^{j+1}\mathcal{E}, \mathcal{L}'_j \cap (-1)^{j+1}\mathcal{E}$, y las tangentes a $(-1)^{j+1}\mathcal{E}$ en esos puntos son, justamente, las rectas $\mathcal{L}_i$ y $\mathcal{L}'_j$, respectivamente, para todo $i, j = 1, 2$ (ver Figura 1).

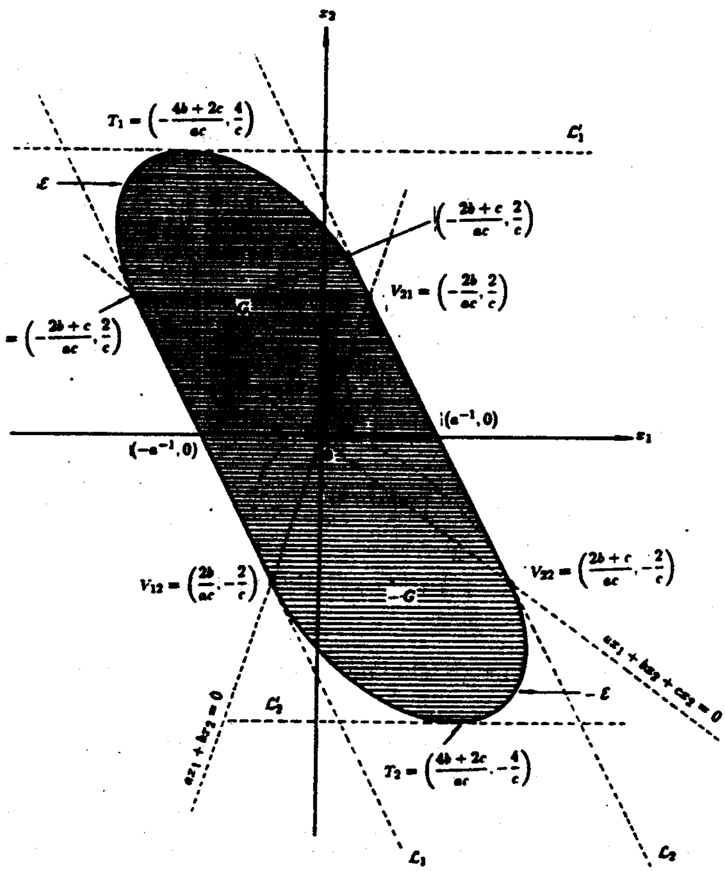


**Figura 1:** *conv* $(-\mathcal{E} \cup \mathcal{E})$ **es la esfera cerrada unitaria respecto a la norma** $\varphi$.

Se sigue de estos resultados (observando la Figura 1), que si hacemos $\mathcal{C} =$ conv $(-\mathcal{E} \cup \mathcal{E})$, entonces

$$Fr\,(\mathcal{C}) = \left(\bigcup_{i=1}^{2} \overline{V_{i1}V_{i2}}\right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{2} \widehat{V_{1j}T_jV_{2j}}\right),$$

donde $\widehat{V_{1j}T_jV_{2j}} \subseteq (-1)^{j+1}\,\mathcal{E}$. Además $\mathcal{C}$ es centralmente simétrico en $\mathbf{0} \in \mathrm{int}(\mathcal{C})$, y dado que $-\mathcal{E} \cup \mathcal{E}$ es cerrado y acotado, entonces $\mathcal{C}$ es también compacto ([7], p.158, Theorem 17.2). A continuación probaremos que $Fr\,(\mathcal{C}) \subseteq Fr\,(S_1\,[\mathbf{0}])$ (la esfera cerrada unitaria de centro $\mathbf{0}$, respecto a la norma $\varphi$). Para ello necesitaremos la relación

$$Fr\,(S_1\,[\mathbf{0}]) = \left\{X \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi\,(x) = 1\right\}$$

([7], p.59, Corollary 7.6.1). Así, y teniendo en mente a (5),

$$\begin{aligned} \varphi\,((1-\alpha)\,V_{21} + \alpha V_{22}) &= \varphi\,(-\,(1-\alpha)\,V_{12} - \alpha V_{11}) \\ &= \varphi\,(\alpha V_{11} + (1-\alpha)\,V_{12}) \\ &= 2c^{-1}\varphi\,\left(a^{-1}\,(-2\alpha b - \alpha c + b)\,, 2\alpha - 1\right) \\ &= 2\int_0^1 |\alpha - (2\alpha-1)\,t|\,dt \\ &= 2\int_0^1 \{\alpha - (2\alpha-1)\,t\}\,dt \\ &= 1, \end{aligned}$$

para todo $\alpha \in [0,1]$. En otras palabras:

$$\bigcup_{i=1}^{2} V_{i1}V_{i2} \subseteq Fr\,(S_1\,[0])\,.$$

A partir de aquí se hace necesario calcular explícitamente la integral indefinida

$$I = \int |ax_1 + bx_2 + cx_2t|\,dt$$

para cada $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ fijo. Si $x_2 \neq 0$ (el caso $x_2 = 0$ es trivial), el artilugio consiste en representar el integrando como una raíz cuadrada,

$$|ax_1 + bx_2 + cx_2t| = \left\{(ax_1 + bx_2)^2 + 2cx_2\,(ax_1 + bx_2)\,t + c^2x_2^2t^2\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

A su vez, y usando la Primera Sustitución de Euler ([6], p.405), la raíz la expresamos como

$$c\,|x_2|\,t + x,$$

en donde $t$ se define como una función racional de $x$:

$$t = \frac{x^2 - (ax_1 + bx_2)^2}{2cx_2\,(ax_1 + bx_2) - 2c\,|x_2|\,x}$$

(lo que quiere decir que $dt$ es también una función racional de $x$). Por consiguiente nuestra raíz puede escribirse como una función racional de $x$,

$$\frac{x^2 - (ax_1 + bx_2)^2}{2x_2\,(ax_1 + bx_2) - 2\,|x_2|\,x} \cdot |x_2| + x,$$

y así la integral $I$ se transforma en la integral de una función racional de $x$ cuyo valor es

$$I = \frac{1}{2cx_2}\left(ax_1 + bx_2 + cx_2t\right)\left|ax_1 + bx_2 + cx_2t\right| + k,$$

donde $x_2 \neq 0$ y $K$ es la constante de integración([3], p.670, fórmula 109). Se sigue que $\varphi\left(X\right)$ tiene la siguiente representación explícita:

$$\varphi\left(x_1, x_2\right) = \begin{cases} \frac{1}{2cx_2}\{\left(ax_1 + bx_2 + cx_2\right)\left|ax_1 + bx_2 + cx_2\right| \\ \qquad - \left(ax_1 + bx_2\right)\left|ax_1 + bx_2\right|\}, & \text{si } x_2 \neq 0, \\ a\left|x_1\right|, & \text{si } x_2 = 0, \end{cases}$$

donde la primera expresión, siendo no negativa (Lema 2), es sonsistente con $\varphi \geq 0$. Así, es inmediata la equivalencia

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, x_2) \quad \Leftrightarrow \quad (ax_1 + bx_2 + cx_2)\left|ax_1 + bx_2 + cx_2\right| = 2cx_2 + \\ (ax_1 + bx_2)\left|ax_1 + bx_2\right|. \end{aligned} \tag{8}$$

Consideremos la semielipse $\widehat{V_{11}T_1V_{21}}$ de $\mathcal{E}$ en el semiplano cerrado $x_2 \geq 2c^{-1}$ (su frontera pasa por $G$, el centro de $\mathcal{E}$). Puesto que $\mathcal{E}$ está entre las dos rectas paralelas soportes $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ ( tangentes a $\mathcal{E}$ en $V_{11}$ y $V_{21}$, [4], pp.7–8), si $(x_1, x_2) \in \widehat{V_{11}T_1V_{21}}$, entonces

$$-2 \leq 2ax_1 + 2bx_2 + cx_2 \leq 2.$$

La primera inecuación implica

$$ax_1 + bx_2 + cx_2 \geq 0,$$

y la segunda

$$ax_1 + bx_2 \leq 0.$$

En la Figura 1 se muestran las dos rectas frontera de estos dos semiespacios cerrados. Así, en este punto $(x_1, x_2)$ las relaciones (7) (con $j = 1$) y(8) son equivalentes. De donde $\varphi(x_1, x_2) = 1$ y

$$\widehat{V_{11}T_1V_{21}} \subseteq Fr\left(S_1\left[\mathbf{0}\right]\right).$$

También las simetrías $-\widehat{V_{11}T_1V_{21}} = \widehat{V_{22}T_2V_{12}} \subseteq -\mathcal{E}$ y $\varphi(-x) = \varphi(x)$ nos dan

$$\widehat{V_{22}T_2V_{12}} \subseteq Fr\left(S_1\left[\mathbf{0}\right]\right).$$

Hemos llegado así a la contenencia

$$Fr\,(\mathcal{C}) \subseteq Fr\,(S_1\,[\mathbf{0}])\,.$$

Ahora bien, la función $\varphi' : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi'(X) = \begin{cases} \|X\| \ \|Y\|^{-1}, & \text{si } X \neq \mathbf{0}, \\ 0, & \text{si } X = \mathbf{0}, \end{cases}$$

donde $Y$ es el punto de intersección del rayo $\overrightarrow{0X}$ con $Fr\,(\mathcal{C})$, es una norma sobre $\mathbb{R}^2$. Además $\mathcal{C}$ es la esfera cerrada unitaria de centro $\mathbf{0}$ respecto a $\varphi'$ ([4], pp. 169–170).

De acuerdo a la última contenencia,

$$\varphi'\left(\frac{X}{\varphi'(X)}\right) = 1$$

implica

$$\varphi'\left(\frac{X}{\varphi'(X)}\right) = \frac{\varphi(X)}{\varphi'(X)} = 1,$$

para todo $X \neq \mathbf{0}$ en $\mathbb{R}^2$. Concluimos $\varphi = \varphi'$, y que

$$S_1\,[\mathbf{0}] = \mathcal{C}\,. \quad \blacksquare$$

**Lema 3.** *Si* $A_1, \ldots, A_n$ *son* $n (\geq 2)$ *vectores dados en* $\mathbb{R}^2$ *tales que* $\det(A_1, A_2) \neq 0$, *entonces la función* $f : \mathbb{R}^2 \to R$ *definida por*

$$f(X) = \sum_{k=1}^{n} |A_k \cdot X|, \tag{9}$$

*para todo* $X \in \mathbb{R}^2$, *es una norma sobre* $\mathbb{R}^2$.

**Demostración.** $f(X) = 0$ es equivalente a $|A_k \cdot X| = 0$, $k = 1, \ldots, n$, es decir, al sistema de ecuaciones lineales

$$A_k \cdot X = 0, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Siendo $\det(A_1, A_2) \neq 0$, el rango de la matriz de los coeficientes es dos, y el sistema tiene como solución única $X = \mathbf{0}$. La misma representación de $f$ nos da $f(\lambda X) = |\lambda|\, f(X)$ con $\lambda \in R$. Además,

$$|A_k \cdot (X + Y)| \leq |A_k \cdot X| + |A_k \cdot Y|, \quad k = 1, \ldots, n,$$

lo cual implica

$$f(X + Y) \leq f(X) + f(Y)\,. \quad \blacksquare$$

**Observación 1.** *Abordaremos el Teorema 2 usando algunos resultados recientemente obtenidos por el autor sobre la geometría y topología del paralelógono ([10], pp. 140–153). Un paralelógono ([5], p.52) es un $2n$–gono convexo centralmente simétrico. Por tanto en él a cada lado le corresponde otro lado paralelo y de igual longitud.*

En el Teorema 1 se estableció que $\mathcal{C} = \mathrm{conv}(-\mathcal{E} \cup \mathcal{E})$ es la esfera cerrada unitaria (de centro $\mathbf{0}$) respecto a la norma $\varphi$ definida en (1). A partir de $\varphi$ construiremos una sucesión de normas $\{\varphi\}$ que converge puntualmente a $\varphi$ sobre $\mathbb{R}^2$, tales que las fronteras de sus esferas unitarias son paralelógonos que "tienden radialmente" a la frontera de $\mathcal{C}$. Además, hallaremos el área de $\mathcal{C}$.

Para cada $A = (a_1, a_2)$ en $\mathbb{R}^2$ definimos $A^* = (a_2, -a_1)$. También, en el siguiente teorema adoptaremos la convención

$$\sum_{i=s}^{t} ()_i = 0 \quad \text{si } s > t.$$

**Teorema 2.** *Sea $f$ la norma sobre $\mathbb{R}^2$ definida en (9) tal que para todo $i < j$ los $\det(A_i, A_j)$ son o todos positivos o todos negativos, y sea*

$$\Delta_k = \sum_{i=1}^{n-k} A_i \cdot A^*_{n+1-k} + \sum_{i=n+2-k}^{n} A_{n+1-k} \cdot A^*_i, \quad k = 1, \ldots, n\,. \tag{10}$$

*Entonces $S_r[G]$ (la esfera cerrada de centro $G$ y radio $r > 0$, respecto a $f$ ) es una región paralelogonal cerrada $V_1, \ldots, V_{2n}$ de centro $G$ y vértices*

$$\begin{aligned} V_k &= G + \frac{r}{\Delta_k} A^*_{n+1-k}, \\ V_{n+k} &= 2G - V_k, \qquad\qquad k = 1, \ldots, n \end{aligned} \tag{11}$$

*(ver Figura 2).*

**Demostración.** Ver [10], pp. 142–145. ∎

**Teorema 3.** *Sea $\varphi$ la norma sobre $\mathbb{R}^2$ definida en (1) y sea $\mathcal{E}$ la elipse de centro*

$$G = \left( -\frac{2b + c}{ac}, 2c^{-1} \right)$$

*definida en (2). Sea además $\varphi_n$ la norma sobre $\mathbb{R}^2$ definida por*

$$\varphi_n(X) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left| X \cdot \left( a, b + \frac{kc}{n} \right) \right|, \quad n = 2, 3, \ldots, \tag{12}$$

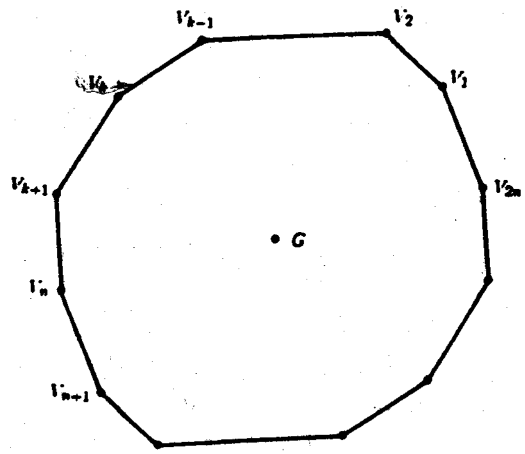


**Figura 2**: $S_r[G]$ es una región paralelogonal cerrada $V_1, \ldots, V_{2n}$ de centro $G$.

*para todo* $X \in \mathbb{R}^2$, *respecto a la cual denotamos por* $\mathcal{C}_n$ *la esfera cerrada unitaria de centro* $\mathbf{0}$. *Entonces:*

(i) *Si* $\mathcal{C} = \mathrm{conv}(-\mathcal{E} \cup \mathcal{E})$, *el área de* $\mathcal{C}$ *es* $\dfrac{2\pi + 8}{ac}$.

(ii) $\lim\limits_{n \to \infty} \varphi_n(X) = \varphi(X)$, *para todo* $X \in \mathbb{R}^2$.

(iii) $\mathcal{C}_n$ *es una región* $2n$*-gonal* $V_{n,1} V_{n,2} \cdots V_{n,2n}$ *convexa, cerrada y centralmente simétrica en* $\mathbf{0}$ *(es decir, un paralelógono), de vértices*

$$\begin{cases} V_{n,k} &= \frac{2n^2}{(n^2 - 2kn + n - 2k + 2k^2)ac} \cdot \left(b + \frac{(n-k+1)c}{n}, -a\right), \\ V_{n,n+k} &= -V_{n,k}, \quad k = 1, \ldots, n. \end{cases} \tag{13}$$

*Si para cada* $X \in Fr(\mathcal{C})$ *el punto* $X_n$ *es la intersección del rayo* $\overrightarrow{\mathbf{0}X}$ *con* $Fr(\mathcal{C}_n)$ *para cada* $n = 2, 3, \ldots$, *entonces*

$$\lim_{n \to \infty} X_n = X.$$

**Demostración.** Si hacemos

$$A_k = \left(\frac{a}{n}, \frac{b}{n} + \frac{kc}{n^2}\right), \quad k = 1, \ldots, n,$$

entonces

$$\det(A_i, A_j) = \frac{ac}{n^3}(j - i) > 0$$

para todo $i < j$. Así la expresión en (12) define una norma $\varphi_n$ sobre $\mathbb{R}^2$ (Lema 3), para cada $n = 2, 3, \ldots$ Por tanto los vectores $A_i, \ldots, A_n$ satisfacen todas las hipótesis del Teorema 2, donde $\Delta_k$ en (10) toma el valor

$$\Delta_k = \frac{ac}{2n^3}\left(n^2 - 2kn + n - 2k + 2k^2\right), \quad k = 1, \ldots, n.$$

Se sigue que $\mathcal{C}_n$ es una región $2n$−gonal $V_{n,1}V_{n,2}\cdots V_{n,2n}$ convexa, cerrada y centralmente simétrica en $\mathbf{0}$, de vértices definidos en (13), para cada $n \geq 2$.

Un resultado sobre integrales de funciones continuas nos garantiza la parte (ii) del Teorema 3:

$$\begin{aligned} \varphi(X) &= \int_0^1 |X \cdot (a, b + ct)|\, dt \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left| X \cdot \left(a, b + \frac{kc}{n}\right) \right| \\ &= \lim_{n\to\infty} \varphi_n(X), \quad \text{para todo } X \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

([1], p.246, exercise 9–15).

Dado $X \in Fr(\mathcal{C})$, si $X_n \in Fr(\mathcal{C}) \cap \overrightarrow{\mathbf{0}X}$ entonces $\varphi(X) = 1$, $\varphi_n(X_n) = 1$, y $X = t_n X_n$ para algún escalar $t_n > 0$. Por la parte (ii), dado $\varepsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que si $n \geq N$ entonces

$$\begin{aligned} \varepsilon > |\varphi_n(X_n) - \varphi(X)| &= |\varphi_n(t_n X_n) - 1| \\ &= |t_n \varphi_n(X_n) - 1| \\ &= |t_n - 1|, \end{aligned}$$

es decir,

$$\lim_{n\to\infty} t_n = 1$$

de donde

$$\lim_{n\to\infty} t_n X_n = \lim_{n\to\infty} x_n = X.$$

Combinando (2) y (7) la ecuación matricial de la elipse $(-1)^{j+1}\mathcal{E}$ es

$$\left\{X - (-1)^{j+1} G\right\} \mathcal{Q} \left\{X - (-1)^{j+1} G\right\}^T = 2,$$

para todo $j = 1, 2$, donde

$$\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} 2a^2 & 2ab + ac \\ 2ab + ac & 2b^2 + 2bc + c^2 \end{pmatrix}.$$

es una matriz simétrica positivamente definida . Consecuentemente existe una matriz 2–cuadrada no singular $\mathcal{L}$ tal que $Q = \mathcal{L}\mathcal{L}^T$ ([2], p. 224, Theorem 20). Entonces la anterior ecuación matricial adopta la forma

$$\left\|\left\{X - (-1)^{j+1} G\right\} \mathcal{L}\right\|^2 = 2, \qquad j = 1, 2.$$

Además,

$$a^2c^2 = \det Q = (\det \mathcal{L}) \left(\det \mathcal{L}^T\right) = (\det \mathcal{L})^2,$$

de donde

$$|\det \mathcal{L}| = ac.$$

Por tanto, si $f$ es el automorfismo (afín) de $\mathbb{R}^2$ definido por $f(X) = XL$ para todo $X \in \mathbb{R}^2$, entonces

$$\left\|f(X) - (-1)^{j+1} G\mathcal{L}\right\|^2 = \left\|\left\{X - (-1)^{j+1} G\right\} \mathcal{L}\right\|^2 = 2,$$

para todo $X \in (-1)^{j+1} \mathcal{E}$ , $j = 1, 2$. En otras palabras $f(\mathcal{E})$ y $f(-\mathcal{E})$ son circunferencias de radio $\|G\mathcal{L}\| = \sqrt{2}$ (pues $\mathbf{0} \in \pm\mathcal{E}$) y centros $G\mathcal{L}$ y $-G\mathcal{L}$, respectivamente, que tienen una tangente común en el origen $\mathbf{0}$ (Teorema 1, parte (i)).

Siendo la envolvente convexa de un conjunto en $\mathbb{R}^2$ el conjunto de todas las combinaciones convexas de elementos del conjunto ([9], p.38, exercise 2), entonces $f$ preserva las envolventes convexas. Por tanto

$$f(\mathcal{C}) = \operatorname{conv}\{f(-\mathcal{E}) \cup f(\mathcal{E})\},$$

de donde el área de $f(\mathcal{C})$ es la suma del área de un círculo de radio $\sqrt{2}$ y el área de un cuadrado de lado $2\sqrt{2}$, esto es,

$$\left(\sqrt{2}\right)^2 \pi + \left(2\sqrt{2}\right)^2 = 2\pi + 8.$$

De este modo, si $\alpha$ es el área de $\mathcal{C}$, entonces

$$2\pi + 8 = \alpha\, |\det \mathcal{L}| = \alpha ac$$

( [2], p.243, Corollary). ∎

# Referencias

[1] T. M. Apostol, *Mathematical Analysis*. Addison–Wesley Publishing Company, Inc., Second Printing, 1965.

[2] G. BIRKHOFF Y S. MAC LANE, *A Brief Survey of Modern Algebra*, The Macmillan Company, second edition, 1965.

[3] W. A. GRANVILLE, *Cálculo Diferencial e Integral*, Unión Tipográfica Editorial Hispano–Americana, México, reimpresión de 1963.

[4] L. A. LYUSTERNIK, *Convex Figures and Polyhedra*, Dover Publications, Inc., New York, First edition, 1963.

[5] KOJI MIYAZAKI, *An Adventure in Multidimensional Space*, John Wiley & Sons, Inc., 1986.

[6] N. PISKUNOV, *Cálculo Diferencial e Integral*, Tomo I, Editorial Mir, Moscú, cuarta edición, 1978.

[7] R. T. ROCKAFELLAR, *Convex Analysis*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1972.

[8] W. RUDIN *Principios de Análisis Matemático*, Mc Graw–Hill Book Company, 1966.

[9] —— *Funtional Analysis*, Mc Graw–Hill, Inc., Second Edition, 1991.

[10] L. E. RUIZ HERNANDEZ, *Los paralelógonos como esferas respecto a normas sobre* $\mathbb{R}^2$, Memorias del III Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones (Bogotá, Junio 15–17 de 1992), Universidad Pedagógica Nacional, 1992.

[11] —— *Cuerpos normados diconoideos elípticos*, Memorias del IV Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones (Bogotá, Junio 16–18 de 1993), Universidad Pedagógica Nacional, 1993.