Revista INTEGRACIÓN
Universidad Industrial de Santander
Escuela de Matemáticas
Vol. 14, No 1, p. 31–47, enero–junio de 1996

# Testores generalizados

MANUEL S. LAZO–CORTÉS*

**Resumen**

A partir de la formulación general de un problema de reconocimiento de patrones con aprendizaje se definen los conceptos de testor generalizado y testor generalizado típico ($g$–testor (típico)), y se demuestra que todas las definiciones de testor hasta hoy existentes son casos particulares de $g$–testores. Las definiciones dadas aquí, y algunos de los resultados enunciados aparecen en Lazo–Cortés (1994), no así las demostraciones y otras relaciones entre algunas definiciones de testor y $g$–testores.

**Abstract**

Starting from the general formulation of a supervised pattern recognition problem, the concepts of generalized testor ($g$–testor) and generalized typical testor are defined, and it is proved that all definitions of testor given up to the present, are particular cases of $g$–testors. The main definitions given here, and several properties enunciated, were published in Lazo–Cortés (1994), but all proofs and some other relations between the definitions of testor and $g$–testor were not included in that paper.

**Keywords:** pattern recognition, testor, feature selection, feature relevance.

## 1. Introducción

El concepto de testor es la base de la llamada Teoría de Testores que surge en la década de los cincuenta (Cheguis y Yablonskii (1955)) y se desarrolla como una rama de la Lógica Matemática.

*Instituto de Cibernética, Matemática y Física. ICIMAF–CITMA. Calle E #309 esq. a 15, Vedado. C.P. 10400. La Habana, CUBA. (mlazo@cidet.icmf.inf.cu).

Aunque en un inicio se formula el concepto de testor a partir de la aplicación de métodos lógicos para la localización de desperfectos en ciertos circuitos eléctricos que realizan funciones booleanas, poco tiempo después se vincula a los problemas de reconocimiento de patrones (Dmítriev et al. (1966)), y desde entonces paralelamente a la Teoría de Testores para esquemas lógicos se desarrolla también la Teoría de Testores para problemas de clasificación.

Entre otros aspectos de interés, algunos investigadores se han visto motivados a formular extensiones del concepto de testor traspasando los umbrales de la lógica bivalente clásica. Así han aparecido formulaciones en una lógica difusa (Goldman (1980)), en una lógica $k$–valente (Ruiz–Shulcloper y Lazo–Cortés (1991)) y otras extensiones que de alguna manera flexibilizan los planteamientos primarios.

En este trabajo se expone un nuevo enfoque del concepto de testor y particularmente del de testor típico, de modo que las generalizaciones expuestas hasta hoy resultan casos particulares del nuevo concepto.

## 2. Planteamiento del problema

Consideremos un problema de reconocimiento de patrones con aprendizaje en los siguientes términos:

Sea $M$ un universo de objetos admisibles y $\{K_1, ..., K_c\}$ una familia de subconjuntos difusos de $M$ a los que llamaremos clases; en particular pudiera ser una $c$–partición difusa de $M$ (Zimmermann (1991)). A cada objeto $\mathcal{O}$ de $M$ puede asociarse un $c$–uplo de pertenencia $\alpha(\mathcal{O}) = (\mu_1(\mathcal{O}), ..., \mu_c(\mathcal{O}))$, de modo que $\mu_j(\mathcal{O}) = \mu_{K_j}(\mathcal{O})$ denota el grado de pertenencia del objeto $\mathcal{O}$ a la clase $K_j$, $j = 1, ..., c$.

Sean $x_1$,...,$x_n$ variables (o rasgos) en términos de las cuales se describen los objetos de M. Si cada variable $x_i$ toma valores en un conjunto $M_i$ $(i = 1, ..., n)$, entonces mediante un operador de descripción $\mathcal{D}$ a cada elemento $\mathcal{O}$ de $M$ se hace corresponder un punto en $M_1 \times \cdots \times M_n$, el cual denotaremos por $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ y lo llamaremos descripción del objeto $\mathcal{O}$,

$$\mathcal{D} : M \longrightarrow \prod_{i=1}^{n} M_i.$$

Utilizaremos la notación $\mathcal{D}(\mathcal{O}) = (x_1(\mathcal{O}), ..., x_n(\mathcal{O}))$ donde $x_i(\mathcal{O})$ representa la evaluación de la variable $x_i$ $(i = 1, ..., n)$ para el objeto $\mathcal{O}$.

A cada par de objetos de $M$ le vamos a asociar una magnitud, que es el resultado de aplicar un operador que genéricamente llamaremos de comparación y que pudiera ser de semejanza, de diferencia, de cercanía, etc.

Formalmente, se define tal operador sobre los pares de descripciones

$$\beta : \prod_{i=1}^{n} M_i \times \prod_{i=1}^{n} M_i \longrightarrow V, \tag{1}$$

donde $V$ pudiera ser $\{0,1\}$ en caso de que el resultado de la comparación se exprese en dos posibles respuestas (iguales o distintos, semejantes o no semejantes, etc.). $V$ puede tomarse como $[0,1]$ si la respuesta es por ejemplo de naturaleza difusa (grados de diferenciación, etc). Si en calidad de $\beta$ se toma una métrica, entonces $V$ puede ser $\mathbb{R}$. $V$ podría igualmente ser el conjunto de términos de una variable lingüística.

Una manera general de definir $\beta$ es a partir de asociar a cada $x_i$ $(i = 1, ..., n)$ un criterio de comparación

$$\varphi_i : M_i \times M_i \longrightarrow V_i, \quad (i = 1, ..., n),$$

con las mismas consideraciones para $V_i$ que para $V$, y luego definir $\beta$ en función de los $\varphi_i$ $(i = 1, ..., n)$; en ese caso quedaría formalmente

$$\beta : \prod_{i=1}^{n} V_i \longrightarrow V. \tag{2}$$

En cualquier caso nos referiremos al operador de comparación como $\beta$.

Sea $MA = \{\mathcal{O}_1, ..., \mathcal{O}_m\} \subseteq M$ un conjunto de objetos admisibles, de cada uno de los cuales se conoce su descripción $\mathcal{D}(O_j)$ y su $c$–uplo de pertenencia $\bar{\alpha}(O_j)$ $(j = 1, ..., m)$. A $MA$ la llamaremos muestra de aprendizaje. $MA = \bigcup_{i=1}^{c} K_i'$, siendo $K_i' \subseteq K_i$; $K_i'$ denota la parte de la muestra de aprendizaje correspondiente a la clase $K_i$.

El problema clásico de reconocimiento de patrones en estos términos quedaría formulado así:

> *Dada la descripción $\mathcal{D}(O)$ de un objeto $O$ de $M$ y la información relativa a $MA$, encontrar el $c$–uplo de pertenencia de $O$.*

Sea $\mathcal{A}$ el algoritmo para la solución de este problema; entonces simbólicamente podemos escribir

$$\mathcal{A}(\mathcal{D}(\mathcal{O}_1), \alpha(\mathcal{O}_1) ..., \mathcal{D}(\mathcal{O}_m), \alpha(\mathcal{O}_m), \mathcal{D}(\mathcal{O})) = \alpha^{\mathcal{A}}(\mathcal{O}),$$

donde $\alpha^{\mathcal{A}}(O)$ representa el $c$–uplo de pertenencia que le asigna el algoritmo $\mathcal{A}$ al objeto $\mathcal{O}$ y que asumimos como $c$–uplo de pertenencia para $\mathcal{O}$.

Muy vinculado al problema de clasificación aparece el problema de selección de variables, uno de cuyos enfoques está en la Teoría de Testores.

## 3. El concepto de $g$–testor

Supongamos que es posible definir para cada subconjunto $R'$ de $R = \{x_1, ..., x_n\}$ un criterio de diferenciación entre pares de objetos admisibles, $\beta_{R'}$, que tiene como caso particular aquel en que $R' = R$ y se obtiene $\beta_R = \beta$.

$\beta_{R'}$ en general tendrá la forma

$$\beta_{R'} : \prod_{j=1}^{s} M_{i_j} \times \prod_{j=1}^{s} M_{i_j} \longrightarrow V,$$

siendo $i_1, ..., i_s$ los índices correspondientes a las variables que pertenecen a $R'$ y $M_{i_j}$ sus respectivos dominios.

La definición de $\beta_{R'}$ puede –como la de $\beta$– depender de cierta familia $\{\varphi_i\}$ de criterios de comparación por rasgos. Abusando de las notaciones expresaremos los argumentos de $\beta$ (y de $\beta_{R'}$) como elementos de $M$, para evitar la referencia a si se define según (1) ó (2).

Consideremos que existe cierto subconjunto $D$ de $V$ tal que "$\beta_{R'}(\mathcal{O}_t, \mathcal{O}_v) \in D$" se interpreta como que $\mathcal{O}_t$ y $\mathcal{O}_v$ son objetos "semejantes" para el problema que se está modelando, atendiendo a $R'$.

Además es preciso establecer una manera de comparar los $c$–uplos de pertenencia de los objetos, mediante algún criterio del tipo $\nu : [0,1]^c \times [0,1]^c \longrightarrow V'$ y considerar cierto $D'$, subconjunto de $V'$, para el cual "$\nu(\alpha(\mathcal{O}_t), \alpha(\mathcal{O}_v)) \in D'$" se entenderá como que $\mathcal{O}_t$ y $\mathcal{O}_v$ poseen $c$–uplos de pertenencia "semejantes".

**Definición 1.** *$R' \subseteq R$ es un testor generalizado ($g$–testor) de $MA$ (con respecto a $\beta$, $\nu$, $D$, $D'$) si, y sólo si, $\forall \mathcal{O}_t$, $\mathcal{O}_v \in MA[\nu(\alpha(\mathcal{O}_t), \alpha(\mathcal{O}_v)) \notin D' \Longrightarrow \beta(\mathcal{O}_t, \mathcal{O}_v) \notin D]$.*

En otras palabras, $R'$ es un $g$–testor si a cada par de objetos con $c$–uplos de pertenencia "no semejantes" le corresponden descripciones "no semejantes".

Sea $\Psi(MA; \beta, \nu, D, D')$ la familia de $g$–testores de $MA$ (con respecto a $\beta$,$\nu$,$D$,$D'$); y definamos en $\Psi(MA; \beta, \nu, D, D')$ una relación de orden parcial $\xi$.

**Definición 2.** *$R' \subseteq R$ es un $g$–testor típico de $MA$ (con respecto a $\beta$,$\nu$,$D$,$D'$ y con respecto a $\xi$) si, y sólo si, $R'$ es un $g$–testor de $MA$ (con respecto a $\beta$,$\nu$,$D$,$D'$) y es minimal en $\Psi(MA; \beta, \nu, D, D')$ según la relación $\xi$.*

La familia de $g$–testores típicos de $MA$ (con respecto a $\beta$,$\nu$,$D$,$D'$) la denotaremos por $\Psi^*(MA; \beta, \nu, D, D')$.

Usualmente se considera sobre $\Psi(MA;\beta,\nu,D,D')$ la relación de inclusión para definir la propiedad de tipicidad. Aunque la definición se ha dado para cualquier relación de orden parcial, es deseable que la relación de orden que se defina tenga la propiedad de que se pueda extender a todo el conjunto de subconjuntos de $R$, y que una vez extendida, satisfaga que cualquier conjunto posterior a un $g$–testor típico es un $g$–testor. Esta propiedad permite construir toda la familia $\Psi(MA;\beta,\nu,D,D')$ a partir del conocimiento de $\Psi^*(MA;\beta,\nu,D,D')$.

# 4. Casos particulares

En ocasiones, siempre que no sea necesario mayor precisión, omitiremos la referencia a $\beta$, $\nu$, $D$, $D'$ y a $\xi$, y hablaremos de $g$–testores y $g$–testores típicos.

## 4.1. Testores clásicos de Zhuravlev

La primera formulación del concepto de testor en el marco de la Teoría de Reconocimiento de Patrones es dada por Yu. I. Zhuravlev en 1966, a partir de una idea introducida por I. A. Cheguis y S. V. Yablonskii en la década anterior al abordar el problema de la búsqueda de desperfectos en circuitos que realizan esquemas lógicos.

En Dmítriev et al. (1966) se considera un problema de reconocimiento de patrones con aprendizaje pero de forma muy simplificada. Las variables en términos de las cuales se describen los objetos sólo toman valores en $\{0,1\}$ y la matriz de aprendizaje (a la que llaman tabla) la consideran dividida en dos subtablas $T_0$ y $T_1$ disjuntas que se corresponden con dos clases. A partir de estas consideraciones dan la siguiente

**Definición 3 (Dmítriev et al. (1966)).** *El conjunto $R'=\{x_{r_1},...,x_{r_s}\}$ de columnas de una tabla $T=(T_0,T_1)$ se denomina testor si después de eliminar de $T$ todas las columnas excepto las de $R'$, no existe fila alguna de $T_0$ igual a una de $T_1$.*

*$R'$ es un testor típico si no existe $R''\subset R'$ tal que $R''$ sea testor.*

Posteriormente y de forma muy natural se extiende el concepto a rasgos no necesariamente bivalentes y a una tabla con cualquier número de clases, pero manteniéndose dentro de la teoría clásica de conjuntos. Entenderemos como estos los testores clásicos de Zhuravlev.

**Proposición 1.** *Los testores clásicos de Zhuravlev son $g$–testores.*

**Demostración.** $\forall x_i \in R$, $(i \in \{1,...,n\})$ definamos $\varphi_i : Mi \times Mi \longrightarrow \{0,1\}$ del modo siguiente:

$$\varphi_i(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = y, \\ 1, & \text{en otro caso;} \end{cases} \tag{3}$$

y $\beta_{R'}$ en función de los $\varphi_i$ $(i \in \{1,...,n\})$ de la manera siguiente

$$\beta_{R'}(O_t,O_v) = \begin{cases} 0, & \text{si } \forall i \ [x_i \in R' \Rightarrow \varphi_i(x_i(O_t),x_i(O_v)) = 0], \\ 1, & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{4}$$

Como $MA$ es tal que $K_1',...,K_c'$ aparecen como conjuntos duros y disjuntos, cada objeto pertenece a una y sólo una clase, y por tanto los $c$–uplos de pertenencia tendrán una única coordenada igual a uno y el resto cero; al conjunto de tales $c$–uplos lo representaremos por $E_c$; sea $\nu : E_c \times E_c \longrightarrow \{0,1\}$ tal que

$$\nu(a,b) = \begin{cases} 0, & \text{si } a = b, \\ 1, & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{5}$$

Para estas funciones específicas y tomando $D = D' = \{0\}$, se tiene que los testores clásicos de Zhuravlev son $g$–testores. ∎

**Corolario 1.** *Los testores típicos clásicos de Zhuravlev son $g$–testores típicos.*

Es inmediato considerando $\xi$ como la relación de inclusión.

**Observación 1.** *Si en calidad de $\varphi_i$ (para algún $i$, $i \in \{1,...,n\}$) se toma un criterio menos exigente, al estilo por ejemplo de*

$$\varphi_i(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{si } |x-y| \leq \varepsilon_i, \\ 1, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

*siendo $\varepsilon_i$ un parámetro no negativo de tolerancia, aún con las mismas $\beta$, $\nu$, $D$ y $D'$ se obtiene un testor menos restrictivo que se mantiene dentro de la definición clásica y es también un $g$–testor.*

## 4.2. Testores difusos de Goldman

En 1980 R. S. Goldman plantea una extensión del concepto de testor al considerar los mismos presupuestos de Zhuravlev pero trabajando con criterios de comparación infinito–valentes entre valores de un mismo rasgo; en particular toma $V = [0,1]$, interpretando los valores de $\varphi_i$ como "grados de diferenciación" y los testores como subconjuntos difusos de $R$ (Zadeh (1965)).

**Definición 4 (Goldman (1980)).** *El conjunto* $R' = \{\mu_{r_1}|x_{r_1}, ..., \mu_{r_s}|x_{r_s}\}$ *es un testor difuso respecto a* $MA$ *si*

$$\forall A_j \in MD \left[\exists \mu_{r_p}|x_{r_p} \in R' \left[0 < \mu_{r_p} = \mu_{R'}(x_{r_p}) \leq \mu_{A_j}(x_{r_p})\right]\right].$$

*$R'$ es un testor difuso típico si:*

a) *para cualquier subconjunto propio* $\{i_1, ..., i_k\}$ *de* $\{r_1, ..., r_s\}$ *se tiene que* $R'' = \{\mu_{R'}(x_{i_1})|x_{i_1}, ..., \mu_{R'}(x_{i_k})|x_{i_k}\}$ *no es un testor difuso;*

b) *para cualquier* $R'' = \{\mu'_{r_1}|x_{r_1}, ..., \mu'_{r_s}|x_{r_s}\}$ *con* $\mu_{r_p} \leq \mu'_{r_p}$ $\forall p \in \{1, ..., s\}$, *y para algún* $p$ *la desigualdad es estricta, entonces* $R''$ *no es un testor difuso.*

Aquí $MD$ está denotando la llamada matriz de diferencia (o de comparación); en esta matriz cada fila $(A_j)$ representa el resultado de comparar, aplicando los $\varphi_i$, dos objetos de $MA$ que se encuentran en clases diferentes; entonces, si $|K'_i| = m_i$ el número de filas de $MD$ es $m'$, siendo $m' = \sum_{i=1}^{c-1} \sum_{j=i+1}^{c} m_i \cdot m_j$. Se considera $MD$ como un conjunto de filas, de modo que el hecho de que $A_j$ es una fila de $MD$ se representa como $A_j \in MD$. $\mu_{A_j}(x_{r_p})$ denota el valor asociado al rasgo $x_{r_p}$ en la fila $A_j$.

**Proposición 2.** *Los testores difusos de Goldman son g–testores.*

**Demostración.** Sean $\nu$ y $D'$ como hasta ahora; y consideremos que $\varphi_i : M_i \times M_i \longrightarrow [0,1]$ es el criterio de comparación asociado al rasgo $x_i$ que toma valores en $M_i$. Los $\varphi_i$ son tales que $\varphi_i(x,y) < \varphi_i(z,w)$ significa que $x$ e $y$ son menos diferentes que $z$ y $w$.

Sea $R' = \{\mu_{R'}(x_{i_1})|x_{i_1}, ..., \mu_{R'}(x_{i_s})|x_{i_s}\}$ un subconjunto difuso de $R$, y definamos $\beta_{R'}$ en términos de los $\varphi_i$ de la manera siguiente:

$$\beta_{R'}(O_t, O_v) = \begin{cases} 0, & \text{si } \forall j \left[\varphi_{i_j}(x_{i_j}(O_t), x_{i_j}(O_v)) < \mu_{R'}(x_{i_j})\right], \ j = 1, ..., s, \\ 1, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Tomando $D = \{0\}$ se obtienen como $g$–testores los testores difusos de Goldman. ∎

**Proposición 3.** *Los testores difusos típicos de Goldman son g–testores típicos.*

**Demostración.** Sea $\Psi$ la familia de testores difusos de Goldman de una cierta matriz $MA$; sean $t_i$ $(i \in I)$ los elementos de $\Psi$, y definamos la siguiente relación sobre los elementos de $\Psi$:

$$t_1 \xi t_2 \Longleftrightarrow (t_1 \cap t_2) \cup ((\operatorname{sop} t_1 \backslash \operatorname{sop} t_2) \cap t_1) \cup ((\operatorname{sop} t_2 \backslash \operatorname{sop} t_1) \cap t_2) = t_2$$

(aquí $\operatorname{sop} t$ denota el soporte del conjunto difuso $t$).

De $t_1 \xi t_2$ se tiene que $(\operatorname{sop} t_1 \backslash \operatorname{sop} t_2) = \emptyset$; es decir, $\operatorname{sop} t_1 \subseteq \operatorname{sop} t_2$. Si $\operatorname{sop} t_1 = \operatorname{sop} t_2$ entonces $t_1 \xi t_2 \Longleftrightarrow t_2 \subseteq t_1$.

*Probemos que $\xi$ es una relación de orden.* $\xi$ es trivialmente reflexiva, para todo $t$ se tiene que $t \xi t$.

Fácilmente se prueba que $\xi$ es antisimétrica a partir de la conmutatividad y la asociatividad de $\cup$ y $\cap$.

*Demostremos entonces que $\xi$ es transitiva.* Sean $t_1, t_2, t_3 \in \Psi$, tales que $t_1 \xi t_2$ y $t_2 \xi t_3$.

De $t_1 \xi t_2$ se tiene que $\operatorname{sop} t_1 \subseteq \operatorname{sop} t_2$, y de $t_2 \xi t_3$ se tiene que $\operatorname{sop} t_2 \subseteq \operatorname{sop} t_3$; de donde resulta que $\operatorname{sop} t_1 \subseteq \operatorname{sop} t_3$, y entonces $\operatorname{sop} t_3$ se puede particionar en $\operatorname{sop} t_1$ y $(\operatorname{sop} t_3 \backslash \operatorname{sop} t_1)$.

Sea $D = (t_1 \cap t_3) \cup ((\operatorname{sop} t_1 \backslash \operatorname{sop} t_3) \cap t_1) \cup ((\operatorname{sop} t_3 \backslash \operatorname{sop} t_1) \cap t_3)$; como $\operatorname{sop} t_1 \subseteq \operatorname{sop} t_3$, entonces $D = (t_1 \cap t_3) \cup ((\operatorname{sop} t_3 \backslash \operatorname{sop} t_1) \cap t_3)$

Sea $x \in \operatorname{sop} t_1$; $de t_1 \xi t_2$ resulta que $\mu_{t_1}(x) \geq \mu_{t_2}(x)$, y de $t_2 \xi t_3$ que $\mu_{t_2}(x) \geq \mu_{t_3}(x)$; luego $\mu_{t_1}(x) \geq \mu_{t_3}(x)$, y se tiene que $\mu_D(x) = \mu_{t_3}(x)$.

Sea ahora $x \in (\operatorname{sop} t_3 \backslash \operatorname{sop} t_1)$; por definición de D resulta que $\mu_D(x) = \mu_{t_3}(x)$, luego $\forall x \in \operatorname{sop} t_3$, $\mu_D(x) = \mu_{t_3}(x)$, de donde $D = t_3$, y queda demostrado que $t_1 \xi t_3$ y con ello que $\xi$ es transitiva.

$\xi$ es por tanto una relación de orden.

*Probemos ahora que los elementos minimales para esta relación de orden son los testores difusos típicos de Goldman.* Sea $t^*$ un elemento minimal de $\Psi$ por la relación $\xi$ y supongamos que $t^*$ no es un testor difuso típico; entonces ó $(a)$ se le puede eliminar algún rasgo a $t^*$, ó $(b)$ se le puede aumentar el grado de pertenencia a alguno de los rasgos de $\operatorname{sop} t^*$, o ambas ($a$ y $b$), sin que deje de ser un testor difuso.

Supongamos primero $(a)$:

sea $\mu_{t*}(x_i) \neq 0$ $(x_i \in \operatorname{sop} t^*)$ y sea $t' = t * \cap \{\operatorname{sop} t * \backslash \{x_i\}\} \in \Psi$ (aquí se está suponiendo que existe en $\Psi$ un testor difuso que se obtiene de $t^*$ eliminando algún rasgo).

Resulta entonces que $(t' \cap t*) = t'$, $(\operatorname{sop} t * \backslash \operatorname{sop} t') = \{x_i\}$; luego $(\operatorname{sop} t * \backslash \operatorname{sop} t') \cap t^* = \{\mu_{t^*}(x_i)|x_i\}$, y de aquí que $(t' \cap t^*) \cup ((\operatorname{sop} t^* \backslash \operatorname{sop} t') \cap t^*) = t^*$, de donde se obtiene que $t'\xi t^*$, lo que contradice que $t^*$ sea minimal.

Entonces si $t^*$ es minimal en $\Psi$, por la relación $\xi$ no existe elemento en $\Psi$ que se obtenga de suprimirle algún rasgo a $t^*$.

Supongamos que es posible $(b)$, esto es, aumentarle a alguna variable el grado de pertenencia. Sea $x_i \in \operatorname{sop} t^*$ y sea $t' = t^* \cup \{\mu_{t'}(x_i)|x_i\}$ con $\mu_{t'}(x_i) > \mu_{t^*}(x_i)$ y $\operatorname{sop} t^* = \operatorname{sop} t'$.

Se tiene entonces que $t' \cap t^* = t^*$, luego $t'\xi t^*$, lo que contradice que $t^*$ es minimal, y se tiene lo que se quería probar. ∎

## 4.3. Testores de Aizenberg y Tsipkin

Una interesante extensión del concepto de testor fue formulada por Aizenberg y Tsipkin en 1971 utilizando una lógica bivalente, y luego a su vez extendida en 1984 a una lógica $k$–valente por Ruiz Shulcloper, quien define el concepto de $k$–testor. En ambos casos se definen los testores primos ($k$–testores primos) como los minimales para la relación de inclusión.

Lo novedoso en la formulación de Aizenberg y Tsipkin está en utilizar de manera simultánea criterios de semejanza y de diferencia para diferentes rasgos.

Consideremos que a cada rasgo $x_i$, $i \in \{1, ..., n\}$, se le asocia un criterio de comparación del tipo $\varphi_i : M_i \times M_i \longrightarrow \{0, 1\}$, que se define de modo que $\varphi_i(x, y) = 1$ se interpreta como "$x$ e $y$ son semejantes" y $\varphi_i(x, y) = 0$ como su negación. Conjuntamente con $\varphi_i$ podemos considerar su negación, que denotaremos $\overline{\varphi_i}$ y que estará definida como

$$\overline{\varphi_i}(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{si } \varphi_i(x, y) = 1, \\ 1, & \text{si } \varphi_i(x, y) = 0. \end{cases}$$

En la formulación clásica del concepto de testor podríamos utilizar para cada rasgo un criterio de comparación del tipo $\varphi_i$, llamado de semejanza; o alternativamente, para cada rasgo un criterio de comparación del tipo $\overline{\varphi_i}$, llamado de diferencia.

Para cada testor de Aizenberg y Tsipkin los rasgos de $R$ se dividen en tres grupos: los que no forman parte del testor, los que sí forman parte del testor y se asocian a un criterio de comparación de semejanza y los que sí se consideran y se asocian a un criterio de comparación de diferencia.

**Definición 5 (Aizenberg y Tsipkin (1971)).** *El conjunto de predicados* $\tau = \{\widetilde{\varphi_{r_1}}, ..., \widetilde{\varphi_{r_s}}\}$ *es un testor para la muestra de aprendizaje* $\{K_1', ..., K_c'\}$

*si*

$$\begin{aligned}\forall p &\in \{1,...,c\}, \forall q \in \{1,...,c\} \forall O_i \in K'_p, \forall O_j \in K'_q,\\ [[p &\neq q] \Rightarrow \overline{\widetilde{\varphi_{r_1}}(O_i,O_j) \wedge ... \wedge \widetilde{\varphi_{r_s}}(O_i,O_j)]}\end{aligned}$$

*es una tautología.*

*$\tau$ es un testor primo si ningún subconjunto propio es testor.*

El símbolo "~" encima de los predicados significa que pueden aparecer con negación.

Aizenberg y Tsipkin no exigen que las clases sean disjuntas, de modo que en este caso un objeto puede pertenecer a más de una clase a la vez; luego en este modelo los $c$–uplos de pertenencia pueden tener más de una coordenada unitaria; al conjunto de tales $c$–uplos lo denotaremos simbólicamente por $\sum E_c$.

A fin de efectuar una nueva formalización de los conceptos de Aizenberg y Tsipkin, definamos un nuevo tipo de subconjunto, que llamaremos 3–subconjunto.

Sea, como hasta ahora, $R = \{x_1, ..., x_n\}$.

**Definición 6.** *Diremos que $R' = \{(x_1,p_1), ..., (x_n,p_n)\}$, donde $p_j \in \{0,1,2\}$, $j \in \{1,..,n\}$, es un 3–subconjunto de $R$.*

Por analogía con la teoría de subconjuntos difusos convendremos en escribir en $R'$ sólo aquellos pares en los que la segunda coordenada no es nula; así, $R' = \{(x_{i_1},p_{i_1}), ..., (x_{i_r},p_{i_r})\}$ con $p_{i_j} \in \{1,2\}$, $j \in \{1,..,r\}$.

Al conjunto $\{x_{i_1},...,x_{i_r}\}$ lo llamaremos 3–soporte de $R'$ y al número $r$ longitud de $R'$.

Sean $t_1 = \{(x_1,p_1), ..., (x_n,p_n)\}$ y $t_2 = \{(x_1,p'_1), ..., (x_n,p'_n)\}$ 3–subconjuntos de $R$; diremos que $t_1$ está incluido en $t_2$ y lo denotaremos $t_1 \subseteq_3 t_2$, si

$$\forall j[[p'_j = 0 \Rightarrow p_j = 0] \wedge [p_j = 1 \Rightarrow p'_j = 1] \wedge [p_j = 2 \Rightarrow p'_j = 2]]. \tag{6}$$

Si representamos $t_1 = \{(x_{i_1},p_{i_1}), ..., (x_{i_r},p_{i_r})\}$ ($p_{i_j} \in \{1,2\}$, $j \in \{1,..,r\}$) y $t_2 = \{(x_{j_1},p_{j_1}), ..., (x_{j_s},p_{j_s})\}$ ($p_{j_i} \in \{1,2\}, i \in \{1,...,s\}$), entonces (6) es equivalente a $t_1 \subseteq t_2$ en el sentido clásico de la teoría de conjuntos, considerando a $t_1$ y $t_2$ como conjuntos de pares ordenados.

**Proposición 4.** *Los testores de Aizenberg y Tsipkin son $g$–testores.*

**Demostración.** Sea $R' = \{(x_{i_1},p_{i_1}), ..., (x_{i_r},p_{i_r})\}$ un 3–subconjunto de $R$;

definamos

$$\beta_{R'}(O_t, O_v) = \begin{cases} 1, & \text{si } \exists j \quad \left[ \begin{array}{l} \left[p_{i_j} = 1 \Rightarrow \varphi_{i_j}(x_{i_j}(O_t), x_{i_j}(O_v)) = 0\right] \vee \\ \quad \left[p_{i_j} = 2 \Rightarrow \overline{\varphi_{i_j}}(x_{i_j}(O_t), x_{i_j}(O_v)) = 0\right] \end{array} \right], \\ & j = 1, \dots, r; \\ 0, & \text{en otro caso;} \end{cases}$$

consideremos además $\nu : \sum E_c \times \sum E_c \rightarrow \{0, 1\}$ tal que

$$\nu(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{si } \|x\| \cdot \|y\| \cdot \sum_{i=1}^{c} x_i \cdot y_i = 1, \\ 1, & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{7}$$

Entonces, si tomamos $D' = D = \{0\}$ resulta que se obtienen de la definición de $g$–testor los testores de Aizenberg y Tsipkin. ∎

Realmente Aizenberg y Tsipkin formulan el concepto de conjunto testor de predicados. A partir de $R'$ se obtiene unívocamente el conjunto de predicados y viceversa.

**Corolario 2.** *Los testores primos de Aizenberg y Tsipkin son $g$–testores típicos.*

**Demostración.** Sea ahora $\Psi$ la familia de testores de Aizenberg y Tsipkin de una matriz de aprendizaje $MA$.

$\subseteq_3$ es una relación de orden y los elementos minimales por $\subseteq_3$ en $\Psi$ son los testores primos de Aizenberg y Tsipkin. ∎

## 4.4. $k$–testores de Ruiz Shulcloper

Consideremos ahora una lógica $k$–valente de Lukasiewicz, con valores veritativos en $E_k = \{0, \dots, k-1\}$, de modo que $0, \dots, (s-1)$ se consideran valores destacados negativos, $(k-s), \dots, (k-1)$ valores destacados positivos y los valores intermedios $s, \dots, (k-s-1)$ valores no destacados (suponemos que $s \leq k/2$).

De ese modo, aunque se trabaja sobre una lógica $k$–valente, para algunas cosas se le da tratamiento 3–valente. A cada rasgo $x_i$ de $R$ se le asocia un criterio de comparación del tipo $\varphi_i : M_i \times M_i \rightarrow E_k$.

Consideraremos que $x$ e $y$ son valores "semejantes" del rasgo $x_i$ si $\varphi_i(x, y) \geq k - s$. Análogamente podemos considerar asociado a $x_i$ el criterio que se obtiene de $\varphi_i$ según la negación de Lukasiewicz y que denotaremos $\overline{\varphi_i}$:

$$\overline{\varphi_i} : M_i \times M_i \rightarrow E_k;$$

en este caso $\overline{\varphi_i}(x,y) \leq s-1$ significará lo mismo que $\varphi_i(x,y) \geq k-s$; ($\overline{\varphi_i}(x,y) \geq k-s$ se entiende como que $x$ e $y$ son valores "diferentes" del rasgo $x_i$).

**Definición 7 (Ruiz–Shulcloper y Lazo–Cortés (1991)).** *El conjunto de predicados $k$–valentes $\tau = \left\{\varphi_{r_1}^{\sigma_{r_1}}, \ldots, \varphi_{r_s}^{\sigma_{r_s}}\right\}$ es un $k$–testor para la muestra de aprendizaje $\{K_1', \ldots, K_c'\}$ si*

$$\forall p \in \{1,\ldots,c\},\ \forall q \in \{1,\ldots,c\},\ \forall O_i \in K_p',\ \forall O_j \in K_q',$$
$$\max\left\{k-1-[p \neq q], k-1-\min\left\{[\varphi_{r_1}^{\sigma_{r_1}}(O_i,O_j)], \ldots, [\varphi_{r_s}^{\sigma_{r_s}}(O_i,O_j)]\right\}\right\}$$

*es una tautología, siendo $\sigma_i \in \{0,1\}$; $[\varphi^0(O_i,O_j)] = k-1-\varphi(O_i,O_j)$, $[\varphi^1(O_i,O_j)] = \varphi(O_i,O_j)$.*
*$\tau$ es un testor primo si ningún subconjunto propio es testor.*

**Proposición 5.** *Los $k$–testores de Ruiz Shulcloper son $g$–testores.*

**Demostración.** Sea $R' = \{(x_{i_1}, p_{i_1}), \ldots, (x_{i_r}, p_{i_r})\}$ un 3–subconjunto de $R$, definamos

$$\beta_{R'}(O_t,O_v) = \begin{cases} 1, & \text{si } \exists j \quad \left[\begin{array}{l} \left[p_{i_j} = 1 \Rightarrow \varphi_{i_j}(x_{i_j}(O_t), x_{i_j}(O_v)) \leq s-1\right] \vee \\ \left[p_{i_j} = 2 \Rightarrow \overline{\varphi_{i_j}}(x_{i_j}(O_t), x_{i_j}(O_v)) \leq s-1\right] \end{array}\right] \\ & j = 1, \ldots, r; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Considerando $\nu$ como en (7) y $D' = D = \{0\}$ se tiene lo que se desea probar. ∎

Si tomamos $k=2$ obtenemos como caso particular de $k$–testor el testor de Aizenberg y Tsipkin.

**Corolario 3.** *Los $k$–testores primos de Ruiz Shulcloper son $g$–testores típicos.*

**Demostración.** Sea $\Psi$ la familia de $k$–testores de una matriz de aprendizaje $MA$, sobre $\Psi$ podemos considerar la relación de orden $\subseteq_3$. Los elementos minimales en $\Psi$ por $\subseteq_3$ son los $k$–testores primos de Ruiz Shulcloper. ∎

### 4.5. Testores de Andréev

A. E. Andréev da en 1981 una definición de testor en el sentido clásico de Zhuravlev para un problema en el que las clases, siendo duras, no necesariamente son disjuntas; aquí nuevamente los $c$–uplos de pertenencia están en $\sum E_c$. Los patrones –para Andréev– se describen mediante vectores booleanos, pero es posible eliminar tal restricción.

Andréev formula su definición en los siguientes términos

**Definición 8 (Andréev (1981)).** *Sea $T : V \to E^n$ una tabla binaria. $E^n$ denota el cubo $n$–dimensional binario y $V$ un conjunto finito tal que $V = \bigcup_{i=1}^{c} K_i'$. Un $n$–uplo $\tau$ de $E^n$ se llama testor de la tabla si para cualesquiera distintos $O_i$, $O_j$ elementos de $V$, de $\tau \preceq T(O_i) \oplus T(O_j) \oplus (1, ..., 1)$ se tiene que existe una clase $K_t'$ tal que $O_i$, $O_j \in K_t'$, $t \in \{1, ..., c\}$. $T(O)$ denota la descripción de $O$ en términos de $n$ variables booleanas y $\oplus$ la suma módulo 2.*

$\tau$ se llama típico si no existe $\tau' \in E$ tal que $\tau' < \tau$ y $\tau'$ es un testor.

**Proposición 6.** *Los testores de Andréev son $g$–testores.*

**Demostración.** Sea $\nu : \sum E_c \times \sum E_c \to \{0, 1\}$ tal que

$$\nu(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{si } \sum_{i=1}^{c} x_i \cdot y_i = 1, \\ 1, & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{8}$$

Considerando $\varphi_i$ y $\beta_{R'}$ como en (3) y (4), $\nu$ como en (8), y tomando $D = D' = \{0\}$, se obtienen de la definición de $g$–testor los testores de Andréev. ∎

**Corolario 4.** *Los testores típicos de Andréev son $g$–testores típicos.*

Se tiene del hecho de que los testores típicos de Andréev son minimales para la relación de inclusión.

## 4.6. $\varepsilon$–testores

El concepto de $\varepsilon$–testor surge como un primer intento de resolver un problema más general.

Con frecuencia en la solución de problemas prácticos se utilizan los pesos informacionales de rasgos y objetos, obtenidos por ejemplo a partir del enfoque clásico de Zhuravlev. Es decir, considerando un testor como combinación de rasgos para la cual no hay descripciones semejantes para objetos en clases diferentes, entendiendo por descripciones semejantes aquellas que lo son rasgo a rasgo para el conjunto de rasgos que se considera.

Ocurre, sin embargo, que al aplicar un algoritmo de clasificación puede utilizarse otra concepción acerca de la semejanza entre objetos (al comparar cada objeto a clasificar con cada objeto de la muestra de aprendizaje), luego se produce una incompatibilidad con los pesos de objetos y rasgos que se consideran, pues fueron calculados a partir de otra función de semejanza.

En este sentido, surge el concepto de $\varepsilon$–testor, de considerar la función de semejanza

$$\beta_{R'}(O_t, O_v) = \begin{cases} 0, & \text{si } |\{x_i \in R' : \varphi_i(O_t, O_v) \notin D_i\}| \leq \varepsilon, \\ 1, & \text{en otro caso,} \end{cases} \tag{9}$$

donde $\varphi_i : M_i \times M_i \to V_i$ y $D_i$ es cierto subconjunto de $V_i$ tal que $\varphi_i(O_t, O_v) \in D_i$ se interpreta como que $O_t$ y $O_v$ son semejantes atendiendo únicamente al rasgo $x_i$.

Los autores definen el concepto en los siguientes términos:

**Definición 9 (Alba–Cabrera et al. (1994)).** *Un conjunto de columnas $T$ es un $\varepsilon$–testor si la submatriz que $T$ define en $MD$ no contiene filas formadas sólo por $\gamma$ unos, $\gamma \leq \varepsilon$; es decir, sólo contiene filas formadas por al menos $\varepsilon + 1$ unos.*

*Un $\varepsilon$–testor es un $\varepsilon$–testor típico si cualquier subconjunto propio de él no es $\varepsilon$–testor.*

**Proposición 7.** *Los $\varepsilon$–testores son $g$–testores.*

**Demostración.** Se tiene de considerar $\beta$ como en (9), $\nu$ como en (5) y $D = D' = \{0\}$. ∎

**Corolario 5.** *Los $\varepsilon$–testores típicos son $g$–testores típicos.*

Es inmediato si consideramos $\xi$ como la relación de inclusión.

### 4.7. Testores en cierto grado

Este enfoque de la noción de testor es el único que considera un problema en que la pertenencia de los objetos a las clases –particularmente en la muestra de aprendizaje– es difusa.

**Definición 10.** *Un subconjunto de variables lingüísticas $T = \{\mathcal{X}^{r_1}, ..., \mathcal{X}^{r_s}\} \subseteq R$ es un testor en grado $\mu$ si al eliminar de $MD$ todas las columnas, excepto las que figuran en $T$, se cumple que:*

i) *no existe fila alguna de $MD$ formada sólo por ceros;*

ii) $\mu\left(\mathcal{X}^{t}\right) \neq 0,\ t = i_1, \ldots, i_s.$

*$\mu$ es el grado de pertenencia de $T$ a la familia $\Psi$ de testores en cierto grado, y se define como* $\mu = \mu_{\Psi}(T) = \frac{1}{s}\sum_{t=1}^{s}\mu\left(\mathcal{X}^{r_t}\right).$

*$\mu\left(\mathcal{X}^{i}\right)$ es una magnitud asociada a la variable lingüística $\mathcal{X}^{i}$.*

*Un testor en grado $\mu$ es típico si ninguno de sus subconjuntos propios es un testor en grado $\mu$.*

Sea para cada $\mathcal{X}^{i}$ definido un criterio de comparación $\varphi_i$,

$$\varphi_i : \mathcal{T}\left(\mathcal{X}^{i}\right) \times \mathcal{T}\left(\mathcal{X}^{i}\right) \rightarrow \mathcal{T}\left(\Delta\mathcal{X}^{i}\right),$$

donde $\mathcal{T}\left(\mathcal{X}^{i}\right)$ representa los términos de la variable $\mathcal{X}^{i}$ y $\mathcal{T}\left(\Delta\mathcal{X}^{i}\right)$ los términos de la variable lingüística de comparación $\Delta\mathcal{X}^{i}$; y sea $D_i$ tal que $\varphi_i(\mathcal{X}^{i}_{t}, \mathcal{X}^{i}_{v}) \in D_i$ puede interpretarse como que $O_t$ y $O_v$ toman en la variable $\mathcal{X}^{i}$ valores semejantes.

Se considera la pertenencia de los objetos a las clases de manera difusa, pero tomando cada objeto sólo en aquella clase para la cual la pertenencia es máxima (la suponemos única), de modo que los $c$–uplos de pertenencia tienen una sola coordenada no nula. Al conjunto de tales $c$–uplos lo denotaremos $[0,1]_c$.

**Proposición 8.** *Los testores en cierto grado son $g$–testores.*

**Demostración.** Sea $R' = \{\mathcal{X}^{r_1}, \ldots, \mathcal{X}^{r_s}\} \subsetneq R$ un testor en grado $\mu$ (con respecto a $R$ y $MA$).

Definamos $\beta_{R'}$ de la siguiente manera

$$\beta_{R'}(O_t, O_v) = \begin{cases} 0, & \text{si } \exists \mathcal{X}^{j} \in R' \left[\mu(\mathcal{X}^{i}) = 0\right] \wedge \\ & \forall \mathcal{X}^{i} \in R' \left[\varphi_j(\mathcal{X}^{j}_{t}, \mathcal{X}^{j}_{v}) \in D_j\right]; \\ 1, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Sea $\nu : [0,1]_c \times [0,1]_c \rightarrow \{0,1\}$ el criterio de comparación entre $c$–uplos definido por

$$\nu(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{si } \sum_{i=1}^{c} x_i \cdot y_i = 0, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Entonces, considerando $D = D' = \{0\}$ se tiene el resultado. ∎

**Corolario 6.** *Los testores típicos en cierto grado son $g$–testores típicos.*

Es inmediato si consideramos $\xi$ como la relación de inclusión.

## 5. Conclusiones

La definición propuesta de $g$–testor constituye una extensión del concepto primario de testor, que no solo logra generalizar éste, sino que a la vez permite considerar todas las extensiones conocidas hasta hoy de dicho concepto como casos particulares de la misma. Resulta un paso unificador dentro de la teoría de testores, adquiriendo fundamentalmente un valor metodológico.

El concepto de $g$–testor nos brinda un enfoque general de la problemática que encierra la idea que da origen al concepto primario de testor.

Aquí hemos demostrado que todas las extensiones propuestas hasta hoy responden a este enfoque general; es decir, se obtienen como casos particulares de $g$–testores. Sin embargo, los $\varepsilon$–testores y sobre todo los testores en cierto grado ya plantean situaciones que pueden estudiarse desde posiciones más generales.

Los problemas en los que, para lograr una eficiente modelación, las clases deben ser tomadas como subconjuntos difusos, surgen como necesidades en las más variadas situaciones de la práctica, y ellos a su vez constituyen fuentes de interesantes y complejas investigaciones teóricas.

La utilización de criterios más generales de comparación por rasgos y entre objetos es otra importante exigencia para el desarrollo de nuevos modelos.

## Referencias


[1] AIZENBERG, N. N. Y A. I. TSIPKIN (1971): *Testores primos*, Doklady Akademiie Nauk 201 (4) 801–802. (En Ruso).

[2] ALBA–CABRERA, E., N. LÓPEZ–REYES Y J. RUIZ–SHULCLOPER (1994): *Extensión del concepto de test típico a partir de la función de analogía entre patrones. Tópicos Acerca de la Teoría de Testores.* CINVESTAV IPN. Serie Amarilla 134, 7–28. México.

[3] ANDRÉEV, A. E. (1981): *On irredundant and minimal tests*, Soviet Math. Dokl. 23 (1) 92–96.

[4] CHEGUIS, I. A., Y S. V. YABLONSKII (1955): *Acerca de los testores para esquemas eléctricos.* Uspieji Matematicheskij Nauk 4. (66) 182–184. (En Ruso).

[5] DMÍTRIEV, A. N., J. I. ZHURAVLEV Y F. P. KRENDELEIEV (1966): *Acerca de los principios matemáticos de la clasificación de objetos y fenómenos*, Diskretnyi Analiz, 7 3 15. (En Ruso).