Revista INTEGRACIÓN
Universidad Industrial de Santander
Escuela de Matemáticas
Vol. 17, No 2, p. 117–134, julio–diciembre de 1999

Sobre Autosemejanza Topológica, Parte II*

Sonia M. Sabogal P.** ***

Resumen

Se establecen algunos resultados relativos a autosemejanza en el conjunto de funciones X^Y, con la topología producto (obteniendo como consecuencia inmediata que el espacio de Cantor es autosemejante) y con otras topologías sobre X^Y que constituyen generalizaciones de la topología producto. Se presentan también algunas ampliaciones de la noción de autosemejanza topológica.

1. Introducción

En la primera parte de este trabajo [4] se inicia un estudio sistemático de la noción de autosemejanza topológica, haciendo inicialmente una breve descripción de algunas formalizaciones existentes del concepto y luego presentando diversos ejemplos, propiedades e interrelación con conceptos afines como autosemejanza simbólica y atractor de un sistema iterado de funciones. En esta segunda parte se demuestra que X^Y es autosemejante para cualquier espacio X y cualquier Y conjunto infinito; como consecuencia inmediata el espacio de Cantor es autosemejante. También se estudia la autosemejanza de X^Y con otras topologías que corresponden a generalizaciones de la topología producto, todo lo cual proporciona (proposiciones 2.2, 2.3, 2.5 y 2.8) formas de construir

* *Key words and phrases.* Autosimilitud, espacios autohomeomorfos, espacios de funciones.
**Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia, S.A., e–mail: ssabogaluis.edu.co
***La autora desea dar crédito a COLCIENCIAS, entidad que le otorgó, de 1994 a 1996, una beca–crédito condonable para adelantar estudios de doctorado en matemáticas en la Universidad Nacional de Colombia y a la Fundación Mazda para el Arte y la Ciencia, entidad que le concedió una beca durante los años 1998 y 1999. También desea agradecer a los profesores **Carlos Ruiz** y **Rafael Isaacs** por sus importantes y valiosas sugerencias.

espacios autosemejantes. Finalmente, en la última sección se presentan y analizan algunas generalizaciones de la noción de autosemejanza y se plantean algunas preguntas y tareas pendientes. La mayor parte de los resultados que se presentan en este trabajo fueron expuestos en diferentes sesiones del **Seminario Sabatino de Topología**, realizado en la Universidad Nacional de Colombia, durante el segundo semestre de 1996 y constituyen un avance del trabajo de tesis que realizó la autora, bajo la dirección del **Doctor Carlos J. Ruiz S.**

2. Autosemejanza y Espacios de Funciones (Otros metodos de construcción)

2.1. Autosemejanza y X^Y con la topología producto

En la parte I de este trabajo [4], se proporcionan (Proposiciones 2.1 (v), (vi), 3.3, 3.5 y 3.6) formas de obtener espacios autosemejantes. En esta sección se presentan otros métodos de construcción.

Proposición 2.1. *Si X es un espacio topológico cualquiera y Y es un conjunto infinito, entonces X^Y es autosemejante.*

Demostración. Sea $O = O_{y_1} \times \cdots \times O_{y_n} \times \prod_{y \neq y_i} X_y$ un abierto básico de X^Y; (es decir cada O_{y_i} es un abierto de X y $X_y = X$ para cada $y \neq y_i$). Sea $(x_y)_{y \in Y}$ un punto de O. Entonces

$$(x_y)_y \in C = \{x_{y_1}\} \times \cdots \times \{x_{y_n}\} \times \prod_{y \neq y_i} X_y \subseteq O$$

y se tiene que $C \simeq X^Y$. □

Una consecuencia inmediata es el siguiente resultado, que ya se había demostrado directamente en [4], Proposición 3.1.

Corolario 2.1. *El espacio de Cantor $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ es autosemejante*

Corolario 2.2. *Todo espacio topológico es (homeomorfo a) un subespacio de un espacio autosemejante, este subespacio es a su vez un cociente de un espacio autosemejante. Además, si X es hiperconexo (es decir, todo par de abiertos no vacíos se intersectan), entonces tal subespacio es denso en el correspondiente espacio autosemejante.*

Demostración. $X^{\mathbb{N}}$ es autosemejante (Proposición 2.1) y $\phi : X \longrightarrow X^{\mathbb{N}}$ definida por: $\phi(x) = (x, x, \cdots)$ es un homeomorfismo de X en $\phi(X)$. Por otra parte la función $f : X^{\mathbb{N}} \longrightarrow \phi(X)$ definida por $f(x_1, x_2, \cdots) = (x_1, x_1, \cdots)$ es continua, abierta y sobre, por lo tanto $\phi(X)$ es un cociente de $X^{\mathbb{N}}$. Ahora, si X es hiperconexo, sea $O = O_1 \times \cdots \times O_k \times X^{\mathbb{N}}$ un abierto (básico) no vacío de $X^{\mathbb{N}}$ y sea $x \in \bigcap_{i=1}^{k} O_k$. Entonces $(x, x, \cdots) \in O \cap \phi(X)$. □

Observación 2.1. En [1] se muestra que $[0, 1]$ es un conjunto autosemejante que no es el producto de conjuntos autosemejantes y por lo tanto no puede ser un espacio producto X^Y con Y infinito.

Observación 2.2. En realidad, en la Proposición 2.1 se ha demostrado algo un poco más fuerte: **para todo abierto O y todo $x \in O$ existe un conjunto C tal que $x \in C \subseteq O$ y C es homeomorfo al espacio total.** Esto corresponde al concepto de **autosemejanza punto a punto**, definido en [2], pág. 217, Definición 2.3, el cual implica autosemejanza, aunque no recíprocamente (ver [2], pág. 218, Ejemplo 2.8).

A partir del resultado establecido en la Proposición 2.1, se planteó la siguiente pregunta: ¿ Qué otras topologías (distintas de la trivial y de la producto) dotan a X^Y de estructura topológica autosemejante? A continuación se establecen algunas respuestas.

2.2. Autosemejanza y la topología de compacto-abierto

Se sabe que la topología de compacto-abierto τ_C coincide con la topología producto τ_P, cuando Y se considera con la topología discreta. El siguiente ejemplo muestra que en general (X^Y, τ_C) no es autosemejante:

Ejemplo 2.1. Considere $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ donde $\{0, 1\}$ tiene la topología discreta y $\mathbb{N}$ la topología de complementos finitos. Entonces $\mathbb{N} - \{1\}$ es un compacto de $\mathbb{N}$, y se tiene,

$$< \mathbb{N} - \{1\}, \{0\} >= \{ \ f \in 2^{\mathbb{N}} \mid f(\mathbb{N} - \{1\}) = \{0\} \ \} = \{f_0, f_1\}$$

es un abierto (sub-básico) que tiene exactamente dos elementos, lo cual prueba que $(2^{\mathbb{N}}, \tau_C)$ no puede ser autosemejante.

Una condición para que X^Y con la topología τ_C sea autosemejante, es que Y sea infinito y discreto, pues, como ya se anotó, en este caso τ_C coincide con la topología producto, que notaremos τ_P. Más generalmente se tiene:

Proposición 2.2. *Si Y es infinito y anti-compacto entonces (X^Y, τ_C) es auto-semejante.*

Demostración. Un espacio topológico se dice **anti-compacto** si sus únicos subespacios compactos son los conjuntos finitos (ver [3]).

Veamos que en las condiciones dadas, las topologías τ_C y τ_P coinciden. La contenencia $\tau_p \subseteq \tau_C$ siempre se tiene, pues si $O = O_{y_1} \times \cdots \times O_{y_n} \times \prod_{y \neq y_i} X_y$ es un abierto básico de la topología producto, entonces

$$O =< \{y_1\}, O_{y_1} > \cap \cdots \cap < \{y_n\}, O_{y_n} >$$

que es un abierto básico de la topología compacto-abierto. Recíprocamente, sea $< K, O >$ un abierto sub-básico de τ_C. Sea $K = \{y_1, \cdots, y_N\}$. Entonces $< K, O >= O^N \times \prod_{y \neq y_i} X_y$ que es abierto de τ_P. $\square$

Algunos ejemplos de espacios anti-compactos son los siguientes,

Ejemplo 2.2. Todo espacio infinito y discreto.

Ejemplo 2.3. $\mathbb{R}$ con la topología de complementos enumerables: dado K compacto de este espacio, si K fuera infinito, sea $\{x_1, x_2, \cdots\}$ enumerable y contenido en K. Sean $O_1 = \mathbb{R} - \{x_2, x_3, \cdots\}$, $O_2 = \mathbb{R} - \{x_3, x_4, \cdots\}$, $\cdots$,$O_n = \mathbb{R} - \{x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots\}$, $\cdots$. La familia de los conjuntos O_n forma un cubrimiento abierto de K, pero ninguna subfamilia finita de esta familia recubre al conjunto $\{x_1, x_2, \cdots\}$. Por lo tanto K debe ser finito.

Ejemplo 2.4. X un conjunto y $a \in X$. La topología $< a >=: \{\ G \subseteq X \mid a \in G\ \} \cup \{\emptyset\}$ es anti-compacta pues si K es un compacto en $(X, < a >)$ entonces $\{\ \{x, a\} \mid x \in K\ \}$ constituye un recubrimiento abierto de K, por tanto existe N tal que $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} \{x_i, a\}$, lo cual implica que K es finito.

Ejemplo 2.5. El ejemplo anterior se puede generalizar tomando A un subconjunto finito de X y $< A >=: \{\ G \subseteq X \mid A \subseteq G\ \} \cup \{\emptyset\}$.

Observación 2.3. Siempre se tiene $\tau_P \subseteq \tau_C$, pero en general son distintas: considere $2^{\mathbb{N}}$ donde $2 = \{0, 1\}$ se considera con la topología discreta y $\mathbb{N}$ con la topología de complementos finitos. Entonces, como ya se vió en el ejemplo 2.1, $< \mathbb{N} - \{1\}, \{0\} >= \{f_0, f_1\}$ es abierto de τ_C pero no lo es en τ_P (los abiertos de la topología producto son infinitos).

Observación 2.4. Un abierto sub-básico de la topología de compacto-abierto es de la forma $O^K \times X^{Y-K}$ donde K es un compacto de Y y O es un abierto de X, por tanto τ_C es siempre menos fina que la topología de cajas τ_{CA}. En general, la otra contenencia no se tiene: para $2^{\mathbb{N}}$, 2 con la topología de Sierpinski y $\mathbb{N}$ con la topología discreta, el conjunto $\{0\}^{\mathbb{N}} = \{f_0\}$ es abierto en la topología de cajas, pero no lo es en la de compacto-abierto pues ya sabemos que en este caso $< 2^{\mathbb{N}}, \tau_C >$ es autosemejante y por lo tanto no tiene puntos aislados.

2.3. Autosemejanza y una generalizacion de la topología producto sobre X^Y

La demostración de la Proposición 2.1 sugiere una forma de construir topologías sobre X^Y (más finas que la topología producto), de tal manera que este siga siendo autosemejante.

Proposición 2.3. *Sean X un espacio topológico, Y un conjunto infinito y α un cardinal infinito fijo tal que $\alpha \leq |Y|$.*

i) Los conjuntos de la forma,

$$\prod_{y \in I} O_y \times X^{Y-I} = \{f \in X^Y |\ f(y) \in O_y,\ \forall y \in I\}$$

donde $I \subseteq Y$ tal que $|I| < \alpha$, y cada O_y es un abierto de X, forman una base para una topología τ_α sobre X^Y.

ii) (X^Y, τ_α) es autosemejante punto a punto.

Demostración. i) Cuando $I = \emptyset$ se obtiene el espacio total X^Y. La intersección de dos conjuntos de la forma dada es nuevamente un subconjunto de la misma forma, pues $|I| < \alpha$ y $|I'| < \alpha$ implican $|I \cup I'| < \alpha$.

i) Sean $O = \prod_{y \in I} O_y \times X^{Y-I}$ un abierto básico de τ_α y $(x_y)_{y \in Y}$ un punto de O. Entonces,

$$(x_y)_y \in C = \prod_{y \in I} \{x_y\} \times X^{Y-I} \subseteq O$$

y $C \simeq X^Y$, pues si $|I| < \alpha$ entonces $|Y - I| = |Y|$

$\square$

Observación 2.5. 1. La topología producto τ_P es menos fina que τ_α para cualquier α y además $\tau_{\chi_0} = \tau_P$, es decir tomando $\alpha = \chi_0 = |\mathbb{N}|$ se obtiene la topología producto sobre X^Y, con lo cual la construcción definida en la proposición anterior corresponde a una generalización de la topología producto sobre X^Y. Como consecuencia inmediata, si Y es enumerable, $\tau_P = \tau_\alpha = \tau_{|Y|}$.

2. Si $\alpha \leq \beta \leq |Y|$, α y β infinitos, entonces $\tau_\alpha \subseteq \tau_\beta \subseteq \tau_{CA}$. De esto se deduce que $\tau_P = \cap\{\tau_\alpha \mid \alpha \textit{ es un cardinal infinito}, \ \alpha \leq |Y|\}$.

3. De la proposición 2.3 y las observaciones anteriores, tenemos una cadena (de topologías) en el retículo $Top(X^Y)$, con Y infinito:
$$\tau_{trivial} \subseteq \tau_{\chi_0} = \tau_P \subseteq \cdots \subseteq \tau\alpha \subseteq \cdots \subseteq \tau_{|Y|}, \quad \chi_0 \leq \alpha \leq |Y|;$$
cada una de las cuales dota a X^Y de una estructura autosemejante.

4. En general τ_C y $\tau_{|Y|}$ no son comparables: tome $2^{\mathbb{N}}$ donde $2 = \{0,1\}$ se considera con la topología discreta y $\mathbb{N}$ con la topología de complementos finitos. Como $\mathbb{N}$ es enumerable, $\tau_{|Y|} = \tau_P$ y ya se vió en una observación anterior que en este caso $\tau_C \nsubseteq \tau_P$. Por otra parte, considere $2^{\mathbb{R}}$ donde 2 se considera con la topología de Sierpinski y $\mathbb{R}$ con la topología usual. Se puede probar entonces que $\{0\}^{\mathbb{Q}} \times \{0,1\}^{\mathbb{R}-\mathbb{Q}} (= \{f \in 2^{\mathbb{R}} \mid f(\mathbb{Q}) = \{0\}\})$ es un abierto en $\tau_{|Y|}$ pero no lo es en τ_C.

5. Si Y es finito, X^Y puede no ser autosemejante (cuando no se especifica la topología de X^Y se entiende que se está considerando la topología producto). Por ejemplo $S^1 \times S^1$ no es autosemejante. Sin embargo sabemos ([4], Proposición 2.1, (vi)) (vi)) que si X es autosemejante entonces X^n también es autosemejante.

6. (X^Y, τ_{CA}) no es autosemejante, en general. Por ejemplo considere $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ donde $\{0,1\}$ se toma con la topología discreta. Entonces $\{0\}^{\mathbb{N}} = \{f_0\}$ es un abierto (unitario) de la topología de cajas, con lo cual τ_{CA} no puede ser autosemejante. Si X es autosemejante entonces (X^Y, τ_{CA}) resulta también autosemejante: si $O = \prod_{y \in Y} O_y$ es abierto no vacío de X^Y con la topología de cajas, entonces para cada $y \in Y$, O_y es un abierto no vacío de X, por tanto existe X'_y homeomorfo a X y tal que $X'_y \subseteq O_y$. Se puede probar que $\prod_{y \in Y} X'_y \subseteq O$ y es homeomorfo a X^Y.

La construcción que se describe en la proposición 2.3, se puede generalizar de la siguiente manera,

Proposición 2.4. *X e Y espacios topológicos y $\mathcal{F}$ una familia de subconjuntos de Y, cerrada para uniones finitas. Entonces los conjuntos de la forma*

$$\prod_{y\in F} O_y \times X^{Y-F} = \{f \in X^Y \mid f(y) \in O_y,\ \forall y \in F\}$$

donde $F \in \mathcal{F}$ y cada O_y es un abierto de X, forman una base para una topología $\tau_{\mathcal{F}}$ sobre X^Y.

Demostración. Cuando $F = \emptyset$ se obtiene X^Y y por ser $\mathcal{F}$ cerrada para uniones finitas, entonces la intersección de dos conjuntos de la forma dada, es nuevamente un conjunto de la misma forma. $\square$

Observación 2.6.

1. Para cualquier $\mathcal{F}$, $\tau_{\mathcal{F}} \subseteq \tau_{CA}$, y si $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ entonces $\tau_{\mathcal{F}} \subseteq \tau_{\mathcal{G}}$.
2. Si $\mathcal{F} = P_f(Y) = \{A \subseteq Y|\ A\ es\ finito\}$ entonces $\tau_{\mathcal{F}} = \tau_P$.
3. Si $\mathcal{F}_\alpha = \{I \subset Y|\ |I| < \alpha\}$, donde α es un cardinal infinito, $\alpha \leq |Y|$, entonces $\tau_{\mathcal{F}_\alpha} = \tau_\alpha$.
4. Si $Y \in \mathcal{F}$ entonces $\tau_{\mathcal{F}} = \tau_{CA}$.
5. Si X tiene la topología trivial entonces $\tau_{\mathcal{F}}$ es la topología grosera, para cualquier $\mathcal{F}$.

En el siguiente resultado, se establecen condiciones sobre Y para que X^Y, con cierta topología construida como se describe en la proposición 2.4, sea autosemejante.

Proposición 2.5. *X, Y espacios topológicos. Sea $\mathcal{C} = \{F \subseteq Y \mid F$ es cerrado y $F \neq Y\}$. Si $Y \neq \emptyset$ es autosemejante e hiperconexo (es decir todo par de abiertos no vacíos se intersectan), entonces $(X^Y, \tau_{\mathcal{C}})$ es autosemejante punto a punto.*

Demostración. En primer lugar debe verse que $\mathcal{C}$ en efecto satisface las condiciones de la Proposición 2.4. Claramente $\emptyset \in \mathcal{C}$. Si F y F' son cerrados y distintos de Y entonces $F \cup F'$ es cerrado y también distinto de Y, por ser Y hiperconexo.

Sea $\mathcal{O}_F = \prod_{y\in F} O_y \times X^{Y-F}$ un abierto básico no vacío de $\tau_{\mathcal{C}}$. Entonces F es un cerrado de Y y distinto de Y. Luego $Y - F$ es un abierto no vacío de Y y como Y es autosemejante, existe $Y' \subseteq Y - F$ tal que $Y' \simeq Y$. Sea $(x_y)_{y\in Y} \in \mathcal{O}_F$. El conjunto de funciones $X^{Y'}$ se considera con la topología

$\tau_{\mathcal{C}'}$ donde $\mathcal{C}' = \{F' \subseteq Y' \mid F' \textit{ es cerrado en } Y' \textit{ y } F' \neq Y'\}$, (como Y es hiperconexo y Y' es homeomorfo a Y entonces Y' también es hiperconexo.)

(a) $X^Y \simeq X^{Y'}$: Sabemos que existe $h : Y' \longrightarrow Y$ un homeomorfismo. Sea $\widetilde{h} : X^Y \longrightarrow X^{Y'}$ definida por $\widetilde{h}(f) = fh$. Claramente $\widetilde{h}(f) \in X^{Y'}$, además, * $\widetilde{h}$ es uno a uno: Si $\widetilde{h}(f) = \widetilde{h}(g)$ entonces $fh = gh$ luego $f = g$.
* $\widetilde{h}$ es sobre: Si $g \in X^{Y'}$ entonces $gh^{-1} \in X^Y$ y $\widetilde{h}(gh^{-1}) = g$.

* $\widetilde{h}$ es continua: Sea $\mathcal{O}_{h^{-1}(C)} = \{f \in X^{Y'} | \ f(y) \in G_y, \ \forall y \in h^{-1}(C)\}$ abierto básico de $X^{Y'}$, (todo cerrado de Y' se puede expresar de la forma $h^{-1}(C)$ donde C es un cerrado de Y; cada G_y es un abierto de X). Entonces

$$\begin{aligned} \widetilde{h}^{-1}(\mathcal{O}_{h^{-1}(C)}) &= \{fh^{-1} \in X^Y \mid f(y) \in G_y, \ \forall y \in h^{-1}(C)\} \\ &= \{g \in X^Y \mid g(y) \in G_y, \ \forall y \in C\} \end{aligned}$$

y este último conjunto es un abierto de X^Y.

* $\widetilde{h}$ es abierta: Sea $\mathcal{O}_C = \{f \in X^Y \mid f(y) \in G_y, \ \forall y \in C\}$ abierto básico de X^Y (cada G_y es un abierto de X y C es un cerrado de Y). Entonces

$$\begin{aligned} \widetilde{h}(\mathcal{O}_C) &= \{fh \in X^{Y'} \mid f(y) \in G_y, \ \forall y \in C\} \\ &= \{g \in X^{Y'} \mid g(y) \in G_y, \ \forall y \in h^{-1}(C)\} \end{aligned}$$

siendo este último un abierto de $X^{Y'}$.

(b) $V =: \{f \in X^Y \mid f(y) = x_y, \ \forall y \in Y - Y'\} \simeq X^{Y'}$: sea $\phi : V \longrightarrow X^{Y'}$ definida por $\phi(f) =: f|_{Y'}$. Claramente $\phi(f) = f|_{Y'} \in X^{Y'}$.

* ϕ es uno a uno: Si $\phi(f) = \phi(g)$ entonces f y g coinciden en Y'. Pero también, por estar en V, coinciden en $Y - Y'$, luego $f = g$.

* ϕ es sobre: Sea $g \in X^{Y'}$. Sea $\widetilde{g} : Y \longrightarrow X$, definida por

$$\widetilde{g}(y) =: \begin{cases} x_y & \text{si } y \in Y - Y' \\ g(y) & \text{si } y \in Y' \end{cases}$$

entonces $\widetilde{g} \in V$ y $\phi(\widetilde{g}) = g$.

* ϕ es continua: sea $\mathcal{O}_{C\cap Y'} = \{f \in X^{Y'} \mid f(y) \in G_y, \ \forall y \in C \cap Y'\}$ abierto básico de $X^{Y'}$ (cada G_y es un abierto de X y C es un cerrado de Y). Entonces

$$\begin{aligned} \phi^{-1}(\mathcal{O}_{C\cap Y'}) &= \{\widetilde{f} \in V \mid f(y) \in G_y, \ \forall y \in C \cap Y'\} \\ &= V \cap \{g \in X^Y \mid g(y) \in G'_y, \ \forall y \in C\} \end{aligned}$$

donde $G'_y = G_y$ si $y \in C \cap Y'$ y $G'_y = X$ si $y \in C - Y'$.

*ϕ es abierta: sea $\mathcal{O}_C = \{f \in V \mid f(y) \in G_y,\ \forall y \in C\}$ abierto básico de V (cada G_y es un abierto de X y C es un cerrado de Y). Entonces

$$\begin{aligned}\phi(\mathcal{O}_C) &= \{f|_{Y'} \in X^{Y'} \mid f(y) \in G_y,\ \forall y \in C\} \\ &= \{g \in X^{Y'} \mid g(y) \in G_y,\ \forall y \in C \cap Y'\}\end{aligned}$$

que es un abierto de $X^{Y'}$

(c) $V \subseteq \mathcal{O}_F$: Sea $f \in V$. Sea $y \in F$; como $Y' \subseteq Y - F$ entonces $y \in Y - Y'$, luego $f(y) = x_y \in O_y$. Así $f \in \mathcal{O}_F$. De (a), (b) y (c) se concluye que $(X^Y, \tau_{\mathcal{C}})$ es autosemejante punto a punto.

□

Se probará ahora que las topologías τ_α (ver Proposición 2.3 y la observación 2.6, 3. anterior), son del tipo descrito en la Proposición 2.5.

Proposición 2.6. *Si $\mathcal{F}_\alpha = \{I \subseteq Y \mid |I| < \alpha\}$, α cardinal infinito, $\alpha \leq |Y|$, entonces la colección $\mathcal{F}_\alpha \cup \{Y\}$ es la familia de cerrados correspondiente a una topología sobre Y, hiperconexa y autosemejante.*

Demostración. Usando propiedades de los cardinales no es difícil demostrar que la familia $\mathcal{F}_\alpha \cup \{Y\}$ satisface las condiciones para ser una familia de cerrados de una topología. Sea $\mu_\alpha = \{A \subseteq Y \mid |Y - A| < \alpha\} \cup \{\emptyset\}$ la familia de abiertos correspondiente. Si A y B son dos abiertos no vacíos de μ_α, entonces $|Y - (A \cap B)| = |(Y - A) \cup (Y - B)| < \alpha$, por tanto $Y - (A \cap B) \neq Y$ o lo que es lo mismo $A \cap B \neq \emptyset$, lo que prueba que μ_α es hiperconexa. Para probar que μ_α es autosemejante, tomemos A un abierto no vacío de μ_α es decir $|Y - A| < \alpha$ lo que implica $|A| = |Y|$. Sea entonces $h : A \longrightarrow Y$ una biyección. Como la topología de subespacio para A es $\{G \subseteq A \mid |A - G| < \alpha\} \cup \{\emptyset\}$ y h conserva cardinales, se puede concluir que h es un homeomorfismo. □

Nota 2.1. Obsérvese que (Y, μ_α) es "fuertemente autosemejante", pues *todo* abierto no vacío es homeomorfo a Y y lo es bajo *cualquier* biyección.

En la proposición anterior se dan condiciones sobre Y para que el espacio $(X^Y, \tau_{\mathcal{F}})$ sea autosemejante. A continuación se generaliza ligeramente esta construcción y se dan condiciones sobre X para obtener nuevamente autosemejanza en $(X^Y, \tau_{\mathcal{F}})$.

Proposición 2.7. *X e Y conjuntos, $\mathcal{O}$ una familia de subconjuntos de X y $\mathcal{F}$ una familia de subconjuntos de Y que satisfacen:*

i) $\mathcal{O}$ es cerrada para intersecciones finitas;

ii) $\mathcal{F}$ es cerrada para uniones finitas.

Entonces los conjuntos de la forma

$$\prod_{y\in F} O_y \times X^{Y-F} = \{f \in X^Y |\ f(y) \in O_y,\ \forall y \in F\}$$

donde $F \in \mathcal{F}$ y $O_y \in \mathcal{O}$ para cada $y \in F$, forman una base para una topología $\tau_{\mathcal{O},\mathcal{F}}$ sobre X^Y.

Demostración. Al tomar $\emptyset$ como conjunto de índices se tiene por ii), que $\emptyset$ pertenece a $\mathcal{F}$ y al tomar $F = \emptyset$ se obtiene X^Y.

Usando las condiciones i) y ii) se concluye que la intersección de dos conjuntos de la forma dada, es nuevamente un conjunto de la misma forma. $\square$

Nota 2.2. Cuando $\mathcal{O}$ es una topología se tiene la $\tau_{\mathcal{F}}$ construida en la proposición 2.4.

Proposición 2.8. *Si $\mathcal{O}$ es una topología sobre X tal que $(X, \mathcal{O})$ es autosemejante, entonces $(X^Y, \tau_{\mathcal{O},\mathcal{F}})$ es autosemejante.*

Demostración. Sea $O = \{f \in X^Y |\ f(y) \in O_y,\ \forall y \in F\}$ un abierto básico, no vacío de $(X^Y, \tau_{\mathcal{O},\mathcal{F}})$, es decir $F \in \mathcal{F}$ y O_y es abierto de X para cada $y \in F$. Debemos probar que O contiene un subespacio homeomorfo a $(X^Y, \tau_{\mathcal{O},\mathcal{F}})$. Si $F = \emptyset$ entonces $O = X^Y$ y ya se tendría. Si $F \neq \emptyset$, para cada $y \in F$, $f(y) \in O_y$, luego cada O_y es no vacío y como X es autosemejante, existe $X'_y \subseteq O_y$ tal que $X'_y \simeq X$. Sea $A = \{f \in X^Y |\ f(y) \in X'_y,\ \forall y \in F\}$. Claramente $A \subseteq O$. Veamos que $A \simeq X^Y$. Para cada $y \in F$ existe $h_y : X \longrightarrow X'_y$ homeomorfismo. Sea $h : A \longrightarrow X^Y$ que a cada $f \in A$ le asocia $h(f) : Y \longrightarrow X$ definida por,

$$h(f)(y) =: \begin{cases} h_y^{-1} f(y) & \text{si } y \in F \\ \quad f(y) & \text{si } y \in Y - F. \end{cases}$$

Claramente $h(f) \in X^Y$.

* h es uno a uno: si $h(f) = h(g)$ entonces para $y \in F$ se tiene $h_y^{-1} f(y) = h_y^{-1} g(y)$ de donde $f(y) = g(y)$, y para $y \in Y - F$ obviamente $f(y) = g(y)$.

*h es sobre: sea $f \in X^Y$. Entonces $f = h(\widetilde{f})$ donde $\widetilde{f} : Y \longrightarrow X$ se define por:

$$\widetilde{f}(y) =: \begin{cases} h_y f(y) & \text{si } y \in F \\ f(y) & \text{si } y \in Y - F. \end{cases}$$

y fácilmente se ve que $\widetilde{f} \in A$.

* h es continua: sea $G = \{f \in X^Y |\ f(y) \in G_y,\ \forall y \in F'\}$ abierto básico de X^Y, (cada G_y es un abierto de X y $F' \in \mathcal{F}$). Entonces

$$\begin{aligned} h^{-1}(O) &= \{h^{-1}(f) |\ f(y) \in G_y,\ \forall y \in F'\} \\ &= \{g \in A |\ g(y) \in A_y,\ \forall y \in F \cap F',\ y\ , g(y) \in G_y\ \forall y \in F' - F\} \end{aligned}$$

donde $A_y \cap X'_y = h_y(G_y)$, A_y es abierto en X. Puesto que $(F' \cap F) \cup (F' - F) = F'$ y A_y, G_y son abiertos de X se concluye que $h^{-1}(O)$ es un abierto de A.

*h es abierta: sea $G = \{f \in A |\ f(y) \in G_y,\ \forall y \in F'\}$ abierto básico de A. Entonces

$$\begin{aligned} h(G) &= \{h(f) |\ f(y) \in X_y,'\ \forall y \in F\ y\ f(y) \in G_y,\ \forall y \in F'\} \\ &= \{g \in X^Y |\ g(y) \in h_y^{-1}(G_y \cap X'_y),\ \forall y \in F \cap F',\ y\ g(y) \in G_y, \\ &\quad \forall y \in F' - F\} \end{aligned}$$

que es un abierto de X^Y. □

Nota 2.3. La proposición anterior sigue siendo válida si en vez de tomar $\mathcal{O}$ una topología, se toma una base de topología.

3. Algunas generalizaciones de la nocion de autosemejanza

En la definición del concepto de autosemejanza topológica intervienen dos elementos importantes: la “lupa”bajo la cual se examina el espacio y el “espacio modelo”que se busca bajo la lupa (en el caso de la autosemejanza son los abiertos no vacíos del espacio X y el mismo espacio X, respectivamente). Motivados por algunos ejemplos, se variaron estos dos elementos, y se obtuvieron algunas generalizaciones interesantes de la noción de autosemejanza. En esta sección se presentan estas generalizaciones, estableciendo para cada una de ellas una lista de propiedades. Además se muestran algunas caracterizaciones de la misma noción, en términos de sus generalizaciones.

Definición 3.1. Y-semejanza: *Dado Y un espacio topológico (fijo), un espacio X se dirá* Y**-semejante** *si todo abierto no vacío de X contiene un subespacio homeomorfo a Y.*

Obsérvese que en el caso particular $Y = X$ se tiene la noción de autosemejanza.

Ejemplo 3.1. S^1 no es autosemejante pero si es $\mathbb{R}$-semejante.

Propiedades.

a) Es inmediato que $\emptyset$ *es Y-semejante para cualquier espacio Y; X es $\emptyset$-semejante y también $\{x\}$- semejante, para todo espacio X.*

b) *Si X es Y-semejante entonces $|Y| \leq |O| \leq |X|$ para todo O abierto no vacío de X*: Esto es consecuencia inmediata de la definición de Y-semejanza.

c) De la proposición anterior se deduce que si X es Y-semejante, y si $|Y| > 1$ *entonces X es perfecto.*

d) *Y-semejanza se hereda por semi-abiertos*: sean X espacio Y-semejante y H tal que $O \subseteq H \subseteq \overline{O}$ para algún O abierto de X. Si $H = \emptyset$ entonces H es Y-semejante. Si H no es vacío, sea $G \cap H$ un abierto no vacío de H, (G es abierto de X). Sea $x \in G \cap H$, entonces $x \in G \cap \overline{O}$ de lo cual se deduce que $G \cap O \neq \emptyset$ y por hipótesis existe $Y' \subseteq G \cap O$ tal que $Y' \simeq Y$, luego $Y' \subset G \cap H$ y esto prueba que H es Y-semejante.

e) *Y-semejanza es una propiedad topológica*: es inmediato.

f) *La suma de espacios Y-semejantes es Y-semejante*: si $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ es una familia de espacios Y-semejantes, sea O abierto no vacío de $\sum_{\alpha\in\Delta} X_\alpha$. Entonces para cada función $i_\alpha : X_\alpha \longrightarrow \sum_{\alpha\in\Delta} X_\alpha$, definida por $i_\alpha(x_\alpha) = (x_\alpha, \alpha)$ se tiene que $i_\alpha^{-1}(O)$ es abierto de X_α, y como $O \neq \emptyset$, entonces para algún α, $i_\alpha^{-1}(O) \neq \emptyset$. Por hipótesis existe $Y' \subseteq i_\alpha^{-1}(O)$ tal que $Y' \simeq Y$, luego $i_\alpha(Y') \subseteq O$ y como i_α es inyectiva, continua y abierta, entonces $i_\alpha(Y')$ es homeomorfo a Y' y por consiguiente a Y.

g) *Si $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ es una familia de espacios topológicos, y cada X_α es Y_α-semejante, entonces $\prod_\alpha X_\alpha$ es $\prod_\alpha Y_\alpha$-semejante*: sean $X = \prod_\alpha X_\alpha$, $Y = \prod_\alpha Y_\alpha$ y $O = \prod_\alpha O_\alpha$ un abierto (básico) no vacío de X, (es decir cada O_α es abierto no vacío de X_α y $O_\alpha = X_\alpha$ salvo para un número finito de índices). Por hipótesis para cada α existe $Y'_\alpha \subseteq O_\alpha$ tal que $Y'_\alpha \simeq Y_\alpha$. Por tanto $Y' = \prod_\alpha Y'_\alpha \simeq Y$ y $Y' \subseteq O$.

h) Sean (X,τ) espacio topológico, Y un conjunto y $\mathcal{F}$ una familia de subconjuntos de Y cerrada para uniones finitas. *Si* (X,τ) *es* Z*-semejante entonces* $(X^Y,\tau_{\mathcal{F}})$ *(ver Proposición 2.4) es* Z^Y*-semejante (* Z^Y *se considera con la topología* $\mu_{\mathcal{F}}$ *donde* μ *es la topología sobre* Z*)*: sea

$$\prod_{y\in F} O_y \times X^{Y-F} = \{f \in X^Y |\ f(y) \in O_y,\ \forall y \in F\}$$

donde $F \in \mathcal{F}$ y $O_y \in \tau$ para cada $y \in F$, abierto (básico) no vacío de $(X^Y,\tau_{\mathcal{F}})$. Si $F = \emptyset$ entonces $O = X^Y$. Existe $Z' \simeq Z$ tal que $Z' \subseteq X$. Entonces $Z'^Y \subseteq X^Y$ y $Z'^Y \simeq Z^Y$.

Si $F \neq \emptyset$ entonces cada O_y y el mismo X son abiertos no vacíos de X. Como X es Z-semejante, para cada $y \in F$ existe $Z'_y \subseteq O_y$ tal que $Z'_y \simeq Z$ y para cada $y \in Y - F$ existe también $Z'_y \subseteq X$ tal que $Z'_y \simeq Z$. Sea $A = \prod_{y\in Y} Z'_y$; entonces $A \subseteq O$ y $A \simeq Z^Y$ bajo el homeomorfismo $h : Z^Y \longrightarrow A$ que a cada $f \in Z^Y$ le asigna la función $h(f) : Y \longrightarrow X$ definida por $h(f)(y) =: h_y f(y)$ para cada $y \in Y$, donde h_y es un homeomorfismo de Z en Z'_y.

i) *Si* X *es* Y*-semejante,* $Y \neq \emptyset$ *y* Y *es* Z*-semejante, entonces* X *es* Z*-semejante.*: sea O un abierto no vacío de X. Existe $Y' \subseteq O$ y $Y' \simeq Y$. Como Y es Z-semejante y la Z-semejanza es una propiedad topológica, entonces Y' es Z-semejante. Además Y' es abierto no vacío en sí mismo, luego existe $Z' \subseteq Y'$, $Z' \simeq Z$ y claramente $Z' \subseteq O$.

Definición 3.2. **$\mathcal{C}$-autosemejanza:** *Dados un espacio topológico* X *y* $\mathcal{C} \subseteq PX$*, se dirá que* X *es* **$\mathcal{C}$-autosemejante***, si todo* $C \in \mathcal{C}$ *contiene un subespacio homeomorfo a* X*.*

Obsérvese que en el caso particular en que $\mathcal{C}$ es la colección de abiertos no vacíos de X, se tiene la noción de autosemejanza.

Ejemplo 3.2. $\beta\mathbb{N}$ no es autosemejante pero si es $\mathcal{C}$–autosemejante, donde $\mathcal{C} = \{\ C \subseteq \beta\mathbb{N} \mid C\ es\ cerrado\ e\ infinito\ \}$ y también $\mathcal{A}$-autosemejante donde

$$\mathcal{A} = \{\ A \subseteq \beta\mathbb{N} \mid A\ es\ abierto\ no\ contable\ \}$$

Propiedades.

a) Claramente X *es* $\{X\}$*-autosemejante y también* $\emptyset$*- autosemejante para todo espacio* X*.*

b) *Si X es $\mathcal{C}$-autosemejante entonces $|C| = |X|$ para todo $C \in \mathcal{C}$*: esto es consecuencia inmediata de la definición de $\mathcal{C}$-autosemejanza.

c) *Si X es $\mathcal{C}$-autosemejante y $A \subseteq X$ entonces A es $\mathcal{C}'$-autosemejante, donde $\mathcal{C}' =: \{C \in \mathcal{C} \mid C = C' \cap A$ para algun $C' \in \mathcal{C}\}$*: claramente cada elemento de $\mathcal{C}'$ es un subconjunto de A y un elemento de $\mathcal{C}$; por hipótesis contiene un subespacio homeomorfo a X, el cual a su vez contendrá un subespacio homeomorfo a A.

d) *Si X es $\mathcal{C}$-autosemejante y $X \simeq Y$ bajo un homeomorfismo h, entonces Y es $h(\mathcal{C})$-autosemejante*: sea $h(C)$ donde C es un elemento de $\mathcal{C}$. Por hipótesis existe $X' \subseteq C$ tal que $X' \simeq X$; luego $h(X') \simeq X' \simeq X \simeq Y$ y $h(X') \subseteq h(C)$.

e) *Si X_α es $\mathcal{C}_\alpha$-autosemejante para todo $\alpha \in \Delta$, entonces $\prod_\alpha X_\alpha$ es $\mathcal{C}$-autosemejante donde $\mathcal{C} =: \{ \prod_\alpha C_\alpha | \; C_\alpha \in \mathcal{C}_\alpha, \; \forall \alpha \}$*: para cada C_α existe $X'_\alpha \subseteq C_\alpha$ tal que $X'_\alpha \simeq X_\alpha$. Por tanto $\prod X'_\alpha \subseteq \prod C_\alpha$ y $\prod X'_\alpha \simeq \prod X_\alpha$.

f) *X^Y es $\mathcal{C}$-autosemejante para cualquier espacio X, cualquier conjunto infinito Y y cualquier colección $\mathcal{C}$ cuyos conjuntos son de la forma $C_{y_1} \times \cdots \times C_{y_n} \times X^{Y-\{y_1,\cdots,y_n\}}$ donde $n \in \mathbb{N}$ y cada C_{y_i} es un subconjunto no vacío de X*: sean $C = C_{y_1} \times \cdots \times C_{y_n} \times X^{Y-\{y_1,\cdots,y_n\}}$ un elemento de la colección $\mathcal{C}$ y $x = (x_y)_{y\in Y} \in C$. Sea $A =: \{x_{y_1}\} \times \cdots \times \{x_{y_n}\} \times X^{Y-\{y_1,\cdots,y_n\}}$, entonces $A \subseteq C$ y $A \simeq X^Y$.

g) Sean (X, τ) espacio topológico, Y un conjunto y $\mathcal{F}$ una familia de subconjuntos de Y cerrada para uniones finitas. *Si (X, τ) es $\mathcal{C}$-autosemejante entonces $(X^Y, \tau_\mathcal{F})$ es $\mathcal{C}'$-autosemejante, donde $\mathcal{C}' =: \{ \prod C_y | \; C_y \in \mathcal{C}, \; \forall y \in Y \}$*: sea $\prod C_y \in \mathcal{C}'$. Como cada $C_y \in \mathcal{C}$, por hipótesis existe para cada y, $X'_y \subseteq C_y$ tal que $X'_y \simeq X$. Por lo tanto $\prod X'_y \subseteq \prod C_y$ y se puede verificar que $\prod X'_y \simeq X^Y$ bajo el homeomorfismo $h : X^Y \longrightarrow \prod X'_y$ que a cada función $f \in X^Y$ le asocia la función $h(f) : Y \longrightarrow \bigcup_{y\in Y} X'_y$ definida por $h(f)(y) = h_y f(y)$ donde h_y es un homeomorfismo de X en X'_y.

Definición 3.3. $\mathcal{C}$-Y-semejanza: *Dado un espacio topológico Y (fijo), un espacio X se dirá que es* **$\mathcal{C}$-Y-semejante**, *donde $\mathcal{C} \subseteq PX$, si todo $C \in \mathcal{C}$ contiene un subespacio homeomorfo a Y.*

Obsérvese que en el caso particular en que $\mathcal{C}$ es la colección de abiertos no vacíos de X y $Y = X$ se tiene la noción de autosemejanza.

Ejemplo 3.3. $\mathbb{R}$ es $\mathcal{C}$-Cantor-semejante, donde $\mathcal{C}$=$\{ [a, b] \mid a < b \}$.

Propiedades.

a) Claramente X *es* $\mathcal{C}$-$\emptyset$*-semejante y también* $\emptyset$-Y*-semejante para todo par de espacios* X *e* Y *y toda colección* $\mathcal{C}$ *de subconjuntos de* X*;* y X *es* $\mathcal{C}$-$\{x\}$*-semejante para todo* X *y toda colección* $\mathcal{C}$ *de subconjuntos no vacíos de* X.

b) *Si* X *es* $\mathcal{C}$-Y*-semejante entonces* $|Y| \leq |C| \leq |X|$ *para todo* $C \in \mathcal{C}$: esto es consecuencia inmediata de la definición de $\mathcal{C}$-Y-semejanza.

c) *Si* X *es* $\mathcal{C}$-Y*-semejante y* $A \subseteq X$ *entonces* A *es* $\mathcal{C}'$-Y*-semejante, donde* $\mathcal{C}' =: \{C \in \mathcal{C} \mid C = C' \cap A$ *para algun* $C' \in \mathcal{C}\}$: es inmediato.

d) *Si* X *es* $\mathcal{C}$-Y*-semejante y* $X \simeq Z$ *bajo un homeomorfismo* h*, entonces* Z *es* $h(\mathcal{C})$-Y*-semejante*: sea $h(C)$ donde C es un elemento de $\mathcal{C}$. Por hipótesis existe $Y' \subseteq C$ tal que $Y' \simeq Y$; luego $h(Y') \simeq Y' \simeq Y$ y $h(Y') \subseteq h(C)$.

e) *Si* X_α *es* $\mathcal{C}_\alpha$-Y*-semejante para todo* $\alpha \in \Delta$*, entonces* $\sum X_\alpha$ *es* $\bigcup \mathcal{C}_\alpha$-$Y$*-semejante*: la colección $\bigcup \mathcal{C}_\alpha$ se puede ver como una colección de subconjuntos de $\sum X_\alpha$. Sea C un elemento de dicha colección. Entonces $C \in \mathcal{C}_\alpha$ para algún α y por hipótesis existe $Y' \simeq Y$ tal que $Y' \subseteq C$.

f) *Si* X_α *es* $\mathcal{C}_\alpha$-Y_α*-semejante para todo* $\alpha \in \Delta$*, entonces* $\prod_\alpha X_\alpha$ *es* $\mathcal{C}$-$\prod Y_\alpha$*-semejante donde* $\mathcal{C} =: \{\ \prod_\alpha C_\alpha |\ C_\alpha \in \mathcal{C}_\alpha,\ \forall \alpha\ \}$: para cada C_α existe $Y'_\alpha \subseteq C_\alpha$ tal que $Y'_\alpha \simeq Y_\alpha$. Por tanto $\prod Y'_\alpha \subseteq \prod C_\alpha$ y $\prod Y'_\alpha \simeq \prod Y_\alpha$.

g) Sean (X, τ) espacio topológico, Y un conjunto y $\mathcal{F}$ una familia de subconjuntos de Y cerrada para uniones finitas. *Si* (X, τ) *es* $\mathcal{C}$-Z*-semejante entonces* $(X^Y, \tau_{\mathcal{F}})$ *es* $\mathcal{C}'$-Z^Y*-semejante, donde* $\mathcal{C}' =: \{\ \prod C_y |\ C_y \in \mathcal{C},\ \forall y \in Y\ \}$ *(* Z^Y *se considera con la topología* $\mu_{\mathcal{F}}$ *donde* μ *es la topología sobre* Z*)*: sea $\prod C_y \in \mathcal{C}'$. Como cada $C_y \in \mathcal{C}$, por hipótesis existe para cada y, $Z'_y \subseteq C_y$ tal que $Z'_y \simeq Z$. Por lo tanto $\prod Z'_y \subseteq \prod C_y$ y se puede verificar que $\prod Z'_y \simeq Z^Y$ bajo el homeomorfismo $h : Z^Y \longrightarrow \prod Z'_y$ que a cada función $f \in Z^Y$ le asocia la función $h(f) : Y \longrightarrow \bigcup_{y \in Y} Z'_y$ definida por $h(f)(y) = h_y f(y)$ donde h_y es un homeomorfismo de Z en Z'_y.

h) *Si* X *es* $\mathcal{C}$-Y*-semejante y* Y *es* $\mathcal{F}$*-* Z*-semejante,* $\mathcal{F} \neq \emptyset$*, entonces* X *es* $\mathcal{C}$-Z*-semejante*: Sea $C \in \mathcal{C}$. Existe $Y' \subseteq C$ y $Y' \simeq Y$. Sea $F \in \mathcal{F}$. Existe $Z' \subseteq F$ y $Z' \simeq Z$. Además existe $F' \subseteq Y'$ tal que $F' \simeq F$. Como $Z' \subseteq F$, existe $Z'' \subseteq F'$ tal que $Z'' \simeq Z'$. Luego $Z'' \subseteq Y' \subseteq C$ y $Z'' \simeq Z$.

Definición 3.4. **$\mathcal{E}$-semejanza:** *Sea $\mathcal{E}$ una familia de espacios topológicos. Un espacio X se dirá* **$\mathcal{E}$-semejante** *si todo abierto no vacío de X contiene un subespacio homeomorfo a alguno de los espacios de la familia $\mathcal{E}$.*

Obsérvese que en el caso particular $\mathcal{E} = \{X\}$ se tiene la noción de autosemejanza y si $\mathcal{E} = \{Y\}$ se tiene la Y-semejanza.

Ejemplo 3.4. Si X es el espacio formado por S^1 y un disco cerrado, tangente a S^1, entonces X no es autosemejante pero si es $\mathcal{E}$-semejante donde $\mathcal{E} = \{\mathbb{R}, \mathbb{R}^2\}$

Propiedades.

a) Es inmediato que $\emptyset$ *es $\mathcal{E}$-semejante para cualquier colección $\mathcal{E}$ de espacios topológicos*, y que X *es $\{\emptyset, \{x\}\}$-semejante para todo espacio X.*

b) *Si X es $\mathcal{E}$-semejante entonces $m \leq |O| \leq |X|$ para todo O abierto no vacío de X, donde $m = min\{|E|; E \in \mathcal{E}\}$*: esto es consecuencia inmediata de la definición de $\mathcal{E}$-semejanza.

c) De la proposición anterior se deduce que *si X es $\mathcal{E}$-semejante y $|E| > 1$ para todo $E \in \mathcal{E}$ entonces X es perfecto.*

d) *$\mathcal{E}$-semejanza se hereda por semi-abiertos*: sean X espacio $\mathcal{E}$-semejante y H tal que $O \subseteq H \subseteq \overline{O}$ para algún O abierto de X. Si $H = \emptyset$ entonces H es $\mathcal{E}$-semejante. Si H no es vacío, sea $G \cap H$ un abierto no vacío de H, (G es abierto de X). Sea $x \in G \cap H$, entonces $x \in G \cap \overline{O}$ de lo cual se deduce que $G \cap O \neq \emptyset$ y por hipótesis existe $E' \subseteq G \cap O$ tal que $E' \simeq E$ para algún $E \in \mathcal{E}$. Luego $E' \subset G \cap H$ y esto prueba que H es $\mathcal{E}$-semejante.

e) *$\mathcal{E}$-semejanza es una propiedad topológica*: es inmediato.

f) *Si X_α es $\mathcal{E}_\alpha$-semejante para todo $\alpha \in \Delta$, entonces $\sum_{\alpha\in\Delta} X_\alpha$ es $\bigcup \mathcal{E}_\alpha$-semejante*: Sea O abierto no vacío de $\sum_{\alpha\in\Delta} X_\alpha$. Entonces para cada función $i_\alpha : X_\alpha \longrightarrow \sum_{\alpha\in\Delta} X_\alpha$, definida por $i_\alpha(x_\alpha) = (x_\alpha, \alpha)$ se tiene que $i_\alpha^{-1}(O)$ es abierto de X_α, y como $O \neq \emptyset$, entonces para algún α, $i_\alpha^{-1}(O) \neq \emptyset$. Existe $E'_\alpha \subseteq i_\alpha^{-1}(O)$ tal que $E'_\alpha \simeq E_\alpha$, para algún $E_\alpha \in \mathcal{E}_\alpha \subseteq \bigcup \mathcal{E}_\alpha$. Entonces $i_\alpha(E'_\alpha) \subseteq O$ y $i_\alpha(E')$ es homeomorfo a E'_α.

g) *Si $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ es una familia de espacios topológicos, y cada X_α es $\mathcal{E}_\alpha$-semejante, entonces $\prod_\alpha X_\alpha$ es $\mathcal{E}$-semejante donde $\mathcal{E} = \{ \prod_\alpha E_\alpha \mid E_\alpha \in \mathcal{E}_\alpha,\ \forall\ \alpha\}$*: sean $X = \prod_\alpha X_\alpha$ y $O = \prod_\alpha O_\alpha$ un abierto (básico) no vacío de X, (es decir cada O_α es abierto no vacío de X_α. Para cada α existe $E'_\alpha \subseteq O_\alpha$ tal que $E'_\alpha \simeq E_\alpha$ para algún $E_\alpha \in \mathcal{E}_\alpha$. Entonces $\prod_\alpha E'_\alpha \subseteq \prod_\alpha O_\alpha$ y $\prod_\alpha E'_\alpha \simeq \prod_\alpha E_\alpha \in \mathcal{E}$.

Veamos ahora algunas caracterizaciones de la noción de autosemejanza, en términos de sus generalizaciones. Para esto se usará la siguiente definición:

Definición 3.5. *X espacio topológico y $\mathcal{C}$ una colección de subconjuntos de X. $\mathcal{C}$ se dirá una colección de superabiertos si para todo $C \in \mathcal{C}$ existe O abierto no vacío de X tal que $O \subseteq C$.*

Proposición 3.1. *X espacio topológico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) X es autosemejante;

ii) O es X-semejante para todo O abierto de X;

iii) O es A-semejante para todo O abierto de X y todo A subespacio de X;

iv) X es $\mathcal{C}$-autosemejante para toda colección $\mathcal{C}$ de superabiertos;

v) X es $\mathcal{C}$-autosemejante para alguna colección $\mathcal{C}$ de superabiertos, más fina que la colección de abiertos no vacíos de X.

Demostración. *i)* $\Rightarrow$ *ii)*: Si $O = \emptyset$ se tiene el resultado. Si $O \neq \emptyset$ tomemos $G \cap O$ un abierto no vacío de O; es decir G es un abierto no vacío de X. Entonces $G \cap O$ es también un abierto no vacío de X y por tanto existe $X' \subseteq G \cap O$ tal que $X' \simeq X$.

ii) $\Rightarrow$ *iii)*: Nuevamente si $O = \emptyset$ se tiene el resultado. Si $O \neq \emptyset$ sea $G \cap O$ abierto no vacío de O. Existe $X' \subseteq G \cap O$ tal que $X' \simeq X$. Si A es subespacio de X existe A' subespacio de X' tal que $A' \simeq A$ y claramente $A' \subseteq X' \subseteq G \cap O$.

iii) $\Rightarrow$ *iv)*: Sea $C \in \mathcal{C}$. Existe O abierto de X, no vacío, tal que $O \subseteq C$. Por hipótesis O es X-semejante luego existe $X' \subseteq O \subseteq C$ tal que $X' \simeq X$.

iv) $\Rightarrow$ *v)*: Basta tomar $\mathcal{C}$ como la colección de abiertos no vacíos de X.

v) $\Rightarrow$ *i)*: Sea O abierto no vacío de X. Por hipótesis $O \in \mathcal{C}$ luego existe $X' \subseteq O$ tal que $X' \simeq X$. $\square$

Finalmente se plantean algunas preguntas, inquietudes y tareas pendientes que fueron surgiendo a lo largo del trabajo realizado:

1. Comportamiento con funciones: ¿ Si X tiene algún tipo de semejanza y $f : X \longrightarrow Y$, bajo qué condiciones se obtiene el mismo tipo de semejanza en Y? (una respuesta para el caso particular de ciertos cocientes del espacio de Cantor se proporciona en la Proposición 3.3 de [4]. Otra respuesta corresponde a la Proposición 3.6 de [4]).

2. ¿ Es en general $\beta(X) - X$ autosemejante?.

3. ¿ Si $\beta(X)$ y $\beta(Y)$ son autosemejantes entonces $\beta(X \times Y)$ es autosemejante?.

4. ¿Cómo se puede caracterizar la familia de subespacios de un espacio autosemejante, que hereda la autosemejanza?.

5. ¿Bajo qué condiciones un espacio autosemejante es un espacio autosimilar simbólico?.

6. Claramente todo espacio cuasi–invariante es autosimilar simbólico y de cancelación, ¿se cumple lo recíproco?.

7. ¿Si X es un cociente de Cantor y X es perfecto, entonces X es un espacio de cancelación ?.

8. Obtener caracterizaciones topológicas para los atractores de SIF's.

9. ¿X^n autosemejante implica X autosemejante?.

10. ¿Vale el recíproco de la Proposición 3.4 ?.

11. Investigar la estructura de la colección $SA(X)$ de todos los subespacios autosemejantes de un espacio topológico X.

12. ¿Qué estructura tiene el conjunto de las topologías autosemejantes sobre X, dentro del retículo $Top(X)$?.

13. ¿Qué propiedades se tienen para cada noción de semejanza, con respecto a los cocientes ?.

Referencias

[1] C. Bandt y K. Keller, "Self-Similar Sets 2. A Simple Approach to the Topological Structure of Fractals", *Math. Nachr.*, **154** (1991), 27–39.

[2] W. J. Charatonik y A. Dilks, "On self-homeomorphic spaces", *Topol. and its Appl.*, **55** (1994), 215–238 .

[3] I. L. Reilly y M. K. Vamanamurthy, "Some Topological Anti-properties", *Illinois Journal of Mathematics*, **24:3** (1980), 382–389.

[4] S. M. Sabogal, *Sobre autosemejanza topológica, Parte I*, *Revista Integración*, **vol. 17, No. 1** (1999), 27–47.