Revista INTEGRACIÓN
Universidad Industrial de Santander
Escuela de Matemáticas
Vol. 17, No 2, p. 99–115, julio–diciembre de 1999

Formulación Geométrica del Método de Cuantización Canónica

Guillermo A. González*

Resumen

Se presentan las ideas fundamentales del Método de Cuantización Geométrica y su aplicación a la formulación de la dinámica cuántica de un sistema físico. En primer lugar, se presenta la formulación geométrica de la mecánica clásica no-relativista de una partícula, obteniendo así una formulación independiente de las coordenadas. Con base en lo anterior, se presenta el Método de Cuantización Geométrica, obteniendose entonces una formulación geométrica de la dinámica cuántica no relativista de una partícula, independiente de las coordenadas.

1. Introducción

El propósito de la aplicación de métodos geométricos a la mecánica cuántica es interpretar la dinámica cuántica de un sitema físico según una cuantización geométrica de la dinámica clásica de éste, a partir del procedimiento de cuantización canónica utilizado usualmente en física. El método de cuantización geométrica es, esencialmente, una globalización del esquema de cuantización canónica en la cual la estructura adicional necesaria para la cuantización se expresa explícitamente en términos geométricos. La formulación geométrica del procedimiento de cuantización canónica fue estudiada originalmente por Konstant [1] y Souriau [2].

El Método de Cuantización Geométrica proporciona una estructura unificada para la cuantización de la dinámica de un sistema clásico que, cuando se aplica a muchos sistemas de interés físico, proporciona las teorías cuánticas esperadas

*Escuela de Física, Universidad Industrial de Santander, A.A. 678, Bucaramanga, Santander, Colombia, Email: guillego@uis.edu.co

para éstos eliminando, además, algunas de las ambigüedades presentes en otros esquemas de cuantización menos rigurosos. Este método permite, así mismo, plantear algunos interrogantes relativos a las teorías cuánticas obtenidas a partir de un sistema clásico determinado, proporcionando a su vez algunas respuestas parciales a ellos; sin embargo, muchos problemas permanecen aún sin resolver.

2. Mecánica Clásica de una Partícula

En la formulación Hamiltoniana de la mecánica clásica [3], el elemento fundamental es el espacio de fase del sistema; esto es, el conjunto de todos los posibles estados dinámicos del sistema: las parejas (q,p), donde q es el conjunto de coordenadas generalizadas y p es el conjunto de momentos congujados generalizados, en un instante de tiempo t. Matemáticamente, el espacio de fase de un sistema clásico con n grados de libertad se describe mediante una variedad simpléctica suave $2n$-dimensional [4, 5, 6].

La evolución en el tiempo de un estado dinámico $m \in M$ se obtiene mediante una transformación canónica ϕ; esto es, un difeomorfismo $\phi : M \to M$ tal que:

$$\phi^* \omega \;=\; \omega. \tag{2.1}$$

donde la 2-forma diferencial ω define la estructura simpléctica de M. Toda transformación canónica es una sucesión de transformaciones canónicas infinitesimales. Un difeomorfismo infinitesimal es generado por un campo vectorial [5, 6]; esto es, con todo campo vectorial suave $\xi : M \to T(M)$ se asocia el grupo mono-paramétrico de difeomorfismos, o flujo, $g^t : M \to M$ para el cual $\xi(m)$ es el vector velocidad:

$$\xi(m) \;=\; \frac{d}{dt}(g^t m)\big|_0. \tag{2.2}$$

Ahora bien, un campo vectorial ξ sobre M genera una transformación canónica sí, y solo sí, su grupo monoparamétrico g^t preserva la estructura simpléctica ω sobre M:

$$(g^t \omega)^* \;=\; \omega; \tag{2.3}$$

es decir, la derivada de Lie de ω en la dirección de ξ es igual a cero

$$L_\xi \;=\; 0. \tag{2.4}$$

La derivada de Lie, la derivada exterior y el producto interior se encuentran relacionados por [4, 5, 6]

$$L_\xi \;=\; d \circ i_\xi \;+\; i_\xi \circ d, \tag{2.5}$$

de modo que

$$(d \circ i_\xi)\omega + (i_\xi \circ d)\omega \;=\; 0. \tag{2.6}$$

Pero, dado que ω es cerrada, $d\omega = 0$ y así

$$(d \circ i_\xi)\omega \;=\; d(i_\xi \omega) \;=\; 0; \tag{2.7}$$

es decir, un campo vectorial ξ es el generador de una transformación canónica sí, y solo sí, la 1-forma $i_\xi\omega$ es cerrada.

Con cada observable clásico podemos asociar una familia de transformaciones canónicas del espacio de fase M generadas por él. Las cantidades físicas observables son funciones reales suaves F sobre el espacio de fase M, $F \in C^\infty(M, \mathbb{R})$. El diferencial dF de una función F es una 1-forma diferencial sobre M [4, 5], definida por

$$dF_m(\xi) \;=\; \frac{d}{dt} F(g^t m)|_{t=0}. \tag{2.8}$$

La existencia de una estructura simpléctica ω sobre M induce un isomorfismo I entre los espacios de vectores tangentes y de 1-formas $I : \theta \to I\theta = \xi_\theta$, definido a través de la relación

$$\theta(\eta) \;=\; \omega(\eta, \xi_\theta). \tag{2.9}$$

Así entonces, obtenemos un campo vectorial ξ_F sobre M, correspondiente al observable F, definido como

$$\xi_F \;=\; IdF. \tag{2.10}$$

Este campo vectorial recibe el nombrew de “campo vectorial Hamiltoniano de F”. Tenemos entonces que

$$i_{\xi_F}\omega \;=\; -dF; \tag{2.11}$$

es decir, la 1-forma $i_{\xi_F}\omega$ es cerrada y, por lo tanto, el campo vectorial Hamiltoniano ξ_F es el generador de un grupo mono-paramétrico de transformaciones canónicas locales, el cual denotamos por ${\phi_F}^t$.

El conjunto $C^\infty(M, \mathbb{R})$ de observables clásicos posee la estructura de un álgebra de Lie [4, 5, 6]. Consideremos dos funciones $F, G \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ y sus campos vectoriales Hamiltonianos ξ_F y ξ_G, respectivamente, los cuales generan los grupos monoparamétricos de difeomorfismos ${g_F}^t$ y ${g_G}^t$. Los flujos ${g_F}^t$ y ${g_G}^t$ reciben el nombre de flujos de fase Hamiltonianos con función Hamiltoniana F y G, respectivamente. El paréntesis de Poisson (F, G) de dos funciones se define como la derivada de la función F en la dirección del flujo de fase Hamiltonianao ${g_G}^t$ [4]:

$$(F, G)(m) \;=\; \frac{d}{dt} F({g_G}^t m)|_0; \tag{2.12}$$

es decir, el paréntesis de Poisson (F, G) es igual al valor de la 1-forma dF evaluada en el campo vectorial Hamiltoniano ξ_G. De acuerdo con el isomorfismo I, el paréntesis de Poisson (F, G) es entonces igual al valor de la 2-forma simpléctica ω evaluada en los campos vectoriales Hamiltonianos ξ_G y ξ_F:

$$(F, G) \;=\; \omega(\xi_G, \xi_F). \tag{2.13}$$

Sea $A(M)$ el conjunto de todos los campos vectoriales Hamiltonianos sobre M. $A(M)$ es un sub-espacio del espacio lineal $H(M)$ de todos los campos vectoriales sobre M. $H(M)$ posee la estructura de un álgebra de Lie, con el paréntesis de Lie definido como

$$[\xi, \eta] \;=\; \xi\eta \;-\; \eta\xi, \tag{2.14}$$

para todo ξ, $\eta \in H(M)$. El conjunto $A(M)$ constituye una sub-álgebra de Lie del álgebra de Lie $H(M)$: el paréntesis de Lie $[\xi_F, \xi_G]$ de dos campos vectoriales Hamiltonianos ξ_F, $\xi_G \in A(M)$ es también un campo vectorial Hamiltoniano y su función Hamiltoniana es el paréntesis de Poisson (G, F) de las funciones G y F.

El paréntesis de Poisson dota al conjunto $C^\infty(M, \mathbb{R})$ con la estructura de un álgebra de Lie, dado que es bilineal, antisimétrico y satisface la identidad de Jacobi

$$(F, \lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2) = \lambda_1 (F, G_1) + \lambda_2 (F, G_2), \tag{2.15a}$$

$$(F, G) = -(G, F), \tag{2.15b}$$

$$((F_2, F_1), F_0) + ((F_0, F_2), F_1) + ((F_1, F_0), F_2) = 0; \tag{2.15c}$$

lo cual se deduce de las propiedades de toda 2-forma y del hecho de que ω sea cerrada:

$$d\omega(\xi_{F_0}, \xi_{F_1}, \xi_{F_2}) = 0. \tag{2.16}$$

Así entonces, el álgebra de Lie $C^\infty(M, \mathbb{R})$ de funciones Hamiltonianas, llamada el álgebra de Poisson, puede llevarse naturalmente sobre el álgebra de Lie $A(M)$ de campos vectoriales Hamiltonianos. La aplicación $F \to \xi_F$ es un homomorfismo de álgebras.

El espacio de configuración de un sistema clásico con n grados de libertad se describe matemáticamente mediante una variedad suave n-dimensional X, cuyos puntos representan las posibles posiciones instantaneas del sistema. El espacio de fase M del sistema se define como el haz cotangente del espacio de configuración, $M = T^*M$ [4]. El conjunto $T^*(X)$ tiene la estructura de una variedad suave $2n$-dimensional. Un punto de $T^*(X)$ es una 1-forma sobre el espacio tangente a X en algún punto $x \in X$. Existe una proyección natural π, diferenciable y sobreyectiva, que envia toda 1-forma $p \in T(x)_x$ al punto x. La pre-imagen de un punto $x \in X$ bajo π es el espacio cotangente $T^*(X)_x$, el espacio dual a $T(X)_x$.

Sea $(U; \hat{q}^1, ..., \hat{q}^n)$ un sistema de coordenadas sobre X; es decir, un conjunto abierto $U \subset X$ y una colección de n funciones $\hat{q}^i : U \to \mathbb{R}$. Así entonces, una base natural para el espacio tangente $T(X)_x$ será el conjunto $\{\partial/\partial\hat{q}^i\}$ y, por lo tanto, la base para el espacio cotangente $T^*(X)_x$ será la base dual $\{d\hat{q}^i\}$, definida por:

$$d\hat{q}^i(\partial/\partial\hat{q}^j) \;=\; \delta^i_j. \tag{2.17}$$

De acuerdo con esto, toda 1-forma $p \in T(X)_x$ está dada por sus n componentes p_i, definidas por:

$$p_i \;=\; \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\hat{q}}^i}; \tag{2.18}$$

es decir, los momentos generalizados, con $\mathcal{L}$ la función lagrangiana del sistema. Estas coordenadas definen un sistema de coordenadas sobre $T^*(X)$, $(\pi^{-1}U; p_1, ..., p_n, q^1, ..., q^n)$, donde $q^i = \hat{q}^i \circ \pi$.

Sea $\xi \in T(M)_m$ un vector tangente al haz cotangente en el punto $m \in M$; localmente se cumple que $m = (p, q)$. La derivada, $\pi_* : T(M) \to T(X)$, de la proyección natural lleva ξ a un vector $\pi_*\xi \in T(X)_x$. Definimos la 1-forma canónica θ sobre $T^*(X)$ mediante la relación

$$\theta(\xi) \;=\; p(\pi_*\xi). \tag{2.19}$$

En las coordenadas locales descritas anteriormente, esta 1-forma se expresa como:

$$\theta \;=\; \sum_{i=1}^{n} p_i dq^i; \tag{2.20}$$

por lo tanto, la 2-forma $\omega = d\theta$, la cual es cerrada y no-degenerada, dota al haz cotangente de una estructura simpléctica natural. En las coordenadas descritas, ω se escribe como

$$\omega \;=\; \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq^i. \tag{2.21}$$

Para toda función $F \in C^\infty(M,\mathbb{R})$, su restricción a $\pi^{-1}(U)$ puede escribirse como una función de las coordenadas $(p_1,...,p_n,q^1,...,q^n)$, la cual denotaremos por $F(p,q)$. Así entonces, el diferencial dF de la función $F(p,q)$ vendrá dado por:

$$dF \;=\; \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial p_i}\,dp_i \;+\; \frac{\partial F}{\partial q^i}\,dq^i\right); \tag{2.22}$$

dF es una 1-forma diferencial sobre M y $\{dp_i, dq^i\}$ son las 1-formas base de $T^*(M)$. El campo vectorial Hamiltoniano $\xi_F = IdF$ se puede escribir en función de los campos vectoriales $\{\partial/\partial p_i, \partial/\partial q^i\}$, los cuales forman una base para $T(M)$.

En las coordenadas (p,q) el isomorfismo simpléctico I tiene la expresión

$$I = \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.23}$$

donde E es la matriz identidad $n\times n$; por lo tanto, el campo vectorial Hamiltoniano ξ_F se expresa como

$$\xi_F \;=\; \sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{\partial F}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p_i} \;+\; \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q^i}\right), \tag{2.24}$$

de modo que $\partial/\partial q^i$ es el campo vectorial Hamiltoniano de la función coordenada p_i y $-\partial/\partial p_i$ el campo vectorial Hamiltoniano de la función coordenada q^i.
El paréntesis de Poisson (F,G) de dos funciones se expresa en las coordenadas (p,q) como

$$(F,G) \;=\; \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial q^i}\frac{\partial G}{\partial p_i} \;-\; \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q^i}\right), \tag{2.25}$$

Una curva $\gamma : (a,b) \subset \mathbb{R} \to M$, tal que $\gamma(t) \in \pi^{-1}(U)$, es una curva integral del campo vectorial Hamiltoniano ξ_F sí, y solo sí, satisface las ecuaciones canónicas

$$\frac{dp_i}{dt}\left(\gamma(t)\right) \;=\; -\frac{dF}{dq^i}\left(\gamma(t)\right), \tag{2.26a}$$

$$\frac{dq^i}{dt}\left(\gamma(t)\right) \;=\; \frac{dF}{dp_i}\left(\gamma(t)\right), \tag{2.26b}$$

para todo $t \in (a,b) \subset \mathbb{R}$, con $i = 1,2,...,n$. Estas ecuaciones reciben el nombre de ecuaciones canónicas de Hamilton y la curva γ se denomina una trayectoria con función Hamiltoniana F.

3. El Método de Cuantización Geométrica

El objetivo del procedimiento de cuantización geométrica es construir una representación en un espacio de Hilbert del álgebra de Poisson de observables clásicos $C^\infty(M, \mathbb{R})$; esto es, construir un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ sobre el cual cada observable clásico esté representado por un operador hermítico, en tal forma que el paréntesis de Poisson (F, G) de dos observables clásicos F y G esté representado por el conmutador $[O_F, O_G]$ de los correspondientes operadores cuánticos O_F y O_G; es decir, que se satisfagan las relaciones de conmutación

$$[O_F, O_G] \; = \; i\hbar O_{(F,G)} \tag{3.1}$$

para cada par de observables clásicos F y G.

En su forma más sencilla, la idea que desarrollaremos será construir $\mathcal{H}$ a partir del espacio de funciones de valor complejo sobre el espacio de fase. En realidad, ésto es lo que se hace cuando el espacio de fase es el haz cotangente de algún espacio de configuración; sin embargo, para estudiar sistemas más complicados, tales como partículas con grados de libertad internos, es necesario modificar este procedimiento: $\mathcal{H}$ no se construye a partir de las funciones de valor complejo sobre el espacio de fase, sino a partir de las secciones de un cierto haz lineal L sobre el espacio de fase. Los conceptos geométricos fundamentales en la teoría de haces lineales se pueden encontrar en las referencias [5 - 11].

El método de cuantización geométrica se basa en la expresión matemática de la condición de integrabilidad de la mecánica cuántica en términos de la 2-forma de curvatura Ω de la conexión α del haz lineal L, definida como (ver [5 - 11])

$$\pi^*\Omega \; = \; d\alpha. \tag{3.2}$$

El hecho más importante, desde el punto de vista físico, relacionado con la 2-forma de curvatura Ω, es que el resultado de integrarla sobre cualquier contorno cerrado 2-dimensional en M es un número entero. El resultado anterior se expresa mediante el siguiente teorema [8, 6]:

Teorema 3.1. – Condición de Integrabilidad *La* 2*-forma de curvatura* Ω *corresponde a un haz lineal hermítico* L *con* 1*-forma de conexión* α *y derivada covariante* ∇ *sí, y solo sí, la integral de la* 2*-forma de curvatura* Ω *sobre cualquier contorno cerrado* 2*-dimensional es un número entero.*

Consideremos ahora un sistema clásico (M, ω), con espacio de fase M y 2-forma simpléctica ω. Sea (L, π, M) un haz lineal hermítico sobre M con 1-forma de conexión α y 2-forma de curvatura Ω, la cual se encuentra definida en términos de la 2-forma simpléctica ω de la siguiente manera

$$\Omega \; = \; -(1/h)\omega, \tag{3.3}$$

donde h es la constante de Planck. De acuerdo con el teorema anterior, el haz lineal L existirá sí, y solo sí, la 2-forma Ω satisface la condición de integrabilidad. Esto conduce al siguiente teorema, el cual determina cuándo un sistema clásico es cuantizable mediante el método de cuantización geométrica [6],

Teorema 3.2. – Condición de Cuantización *Un sistema clásico* (M, ω)*, con espacio de fase* M *y* 2*-forma simpléctica* ω*, admite una cuantización mediante el método de cuantización geométrica sí, y solo sí, el resultado de integrar la* 2*-forma* ω *sobre cualquier contorno cerrado* 2*-dimensional en* M *es un multiplo entero de la constante de Planck* h*.*

Estos dos teoremas expresan matemáticamente el hecho físico más importante relacionado con la noción de cuantización; esto es, el resultado experimental de que los valores medibles de las diferentes variables dinámicas son multiplos enteros de la constante de Planck h.

El haz lineal L se encuentra dotado con una métrica hermítica, definida de la siguiente manera. Sobre cada fibra $L_m \approx \mathbb{C}$ de L existe un producto interno hermítico $\langle\ ,\ \rangle_m : L_m \times L_m \to \mathbb{C}$ en virtud de la estructura de espacio vectorial complejo de L_m. Este producto interno induce una métrica hermítica sobre el conjunto $\Gamma(L) = \{\lambda : M \to L\}$ de secciones de L, $\langle\ ,\ \rangle : \Gamma(L) \times \Gamma(L) \to C^\infty(M, \mathbb{C})$, tal que la función $\langle \lambda, \lambda' \rangle : M \to \mathbb{C}$, definida por

$$\langle \lambda, \lambda' \rangle(m) \; = \; \langle \lambda(m), \lambda'(m) \rangle_m, \tag{3.4}$$

es suave. En física, esta métrica corresponde a la definición de densidad de probabilidad o amplitud de transición de un estado cuántico a otro.

El espacio $\Gamma(L)$ de secciones de L es isomorfo a un sub-espacio del espacio $C^\infty(L^*, \mathbb{C})$ de funciones de valor complejo ψ sobre L^*. Este sub-espacio, que denotaremos por $C^\infty_\lambda(L^*, \mathbb{C})$, está constituido por aquellas funciones $\psi \in C^\infty(L^*, \mathbb{C})$ que satisfacen la condición de homogeneidad

$$\psi_\lambda(z\ell) \; = \; z^{-1}\psi_\lambda(\ell), \tag{3.5}$$

para todo $z \in \mathbb{C}^*$ y todo $\ell \in L^*$. El isomorfismo $\lambda \leftrightarrow \psi_\lambda$ viene dado por la relación

$$(\lambda \circ \pi)(\ell) \; = \; \psi_\lambda(\ell)\ell, \tag{3.6}$$

donde $\ell \in L^*$. Así entonces, si para algún $m \in M$, $\lambda(m) \neq 0$, entonces $\lambda(m) = \ell \in L^*$ y la ec. (3.6) implica que:

$$\psi \circ \lambda \ = \ 1. \tag{3.7}$$

La acción del campo vectorial fundamental σ_z sobre el espacio $C^\infty_\lambda(L^*, \mathbb{C})$ viene dada por (ver [5 - 11]):

$$(\sigma_z \psi_\lambda)(\ell) \ = \ -2\pi i z \psi_\lambda(\ell); \tag{3.8}$$

así entonces, para cada función $F \in C^\infty(M, \mathbb{C})$ definimos un campo vectorial σ_F sobre L como

$$\sigma_(\ell) \ = \ \sigma_{F(\pi(\ell))}(\ell), \tag{3.9}$$

para cada $\ell \in L^*$. Por lo tanto, haciendo $z = F \circ \pi$ en (3.8), la acción de σ_F sobre la función ψ_λ está dada por

$$\sigma_F \psi_\lambda \ = \ -2\pi i (F \circ \pi) \psi_\lambda. \tag{3.10}$$

Posteriormente consideraremos las funciones $F \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ de valor real sobre M, las cuales identificaremos como los observables físicos de la mecánica clásica, y construiremos el campo vectorial σ_F de acuerdo con (3.9) y (3.10).

La derivada covariante $\nabla_\xi \lambda$ de una sección λ de L en la dirección del campo vectorial ξ sobre M viene dada por (ver [5 - 11]):

$$\nabla_\xi \lambda(\pi((\ell)) \ = \ \ell(\hat{\xi} \psi_\lambda)(\ell), \tag{3.11}$$

donde $\hat{\xi}$ es el el levantameinto horizontal de ξ. En términos de la 1-forma de conexión α (3.11) se expresa como

$$\nabla_\xi \lambda \ = \ 2\pi i (\lambda^* \alpha)(\xi) \lambda. \tag{3.12}$$

La derivada covariante ∇_ξ debe ser compatible con la métrica hermítica $\langle \ , \ \rangle$; esto es, se debe satisfacer la condición

$$\xi \langle \lambda, \lambda' \rangle \ = \ \langle \nabla_\xi \lambda, \lambda' \rangle \ + \ \langle \lambda, \nabla_\xi \lambda' \rangle, \tag{3.13}$$

para todo campo vectorial real $\xi \in H(M)$ y todo par de secciones λ, λ' de L [7, 8, 11].

El conjunto $\Gamma(L)$ tiene la estructura de un espacio lineal sobre $\mathbf{C}$, con las operaciones de adición y multiplicación definidas por

$$(\lambda_1 \ + \ \lambda_2)(m) \ = \ \lambda_1(m) \ + \ +\lambda_2(m), \tag{3.14a}$$

$$(z \cdot \lambda_1)(m) \ = \ z \cdot \lambda_1 9m), \tag{3.14b}$$

para todo λ_1, $\lambda_2 \in \Gamma(L)$, $m \in M$ y $z \in \mathbb{C}$. Existe, además, un elemento de volumen natural ω^n sobre M, dado en términos de ω por

$$\omega^n \;=\; \omega \wedge \cdots \wedge \omega, \tag{3.15}$$

mediante el cual se define el producto interno $\langle\ ,\ \rangle$ sobre $\Gamma(L)$, $\langle\ ,\ \rangle : \Gamma(L) \times \Gamma(L) \to \mathbb{C}$, tal que para todo λ_1, $\lambda_2 \in \Gamma(L)$, $\langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle$ es el número complejo, no necesariamente finito, dado por

$$\langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle \;=\; \int_M \langle \lambda_1(m), \lambda_2(m) \rangle \omega^n, \tag{3.16}$$

donde $\langle \lambda_1(m), \lambda_2(m) \rangle$ es las métrica hermítica sobre L defiida por la ec. (3.4).

El sub-espacio de $\Gamma(L)$ constituido por aquellas secciones λ para las cuales $\langle \lambda, \lambda \rangle$ es finito, constituye un espacio pre-Hilbert, $\mathcal{H}_0 = \{\lambda : M \to L \mid \langle \lambda, \lambda \rangle\ es\ finito\}$. El espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ de la cuantización geométrica es la completación del espacio pre-Hilbert $\mathcal{H}_0$. El primer paso en la construcción de los operadores cuánticos sobre $\mathcal{H}$ es reemplazar el álgebra de Poisson de observables clásicos $C^\infty(M, \mathbb{R})$ por el conjunto de campos vectoriales reales sobre L^* que presevan la 1-forma de conexión α; esto es, el conjunto $\hat{H}(L^*) = \{\zeta \in H(L^*) \mid L_\zeta = 0\}$. Vamos a construir el campo vectorial $\zeta_F \in \hat{H}(L^*)$ asociado con el observable clásico $F \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, demostrando que su componente vertical ζ_V es el campo vectorial fundamental asociado con la función F, $\zeta_V = -\sigma_{F/h}$, y que su componente horizontal ζ_H es el levantamiento horizontal del campo vectorial Hamiltoniano ξ_F del observable F, $\zeta_H = \hat{\xi}_F$.

La condición $L_\zeta \alpha = 0$ puede escribirse como

$$i_\zeta d\alpha \;+\; di_\zeta \alpha \;=\; 0 \tag{3.17}$$

y así, al evaluarla sobre el campo vectorial fundamental σ_z, obtenemos [7]

$$\sigma_z(\alpha(\zeta)) \;=\; 0, \tag{3.18}$$

para todo $z \in \mathbb{C}$. Así entonces, $\alpha(\zeta)$ es constante a lo largo de las fibras del haz L^* y, consecuentemente, existe una función F sobre M tal que

$$\alpha(\zeta) \;=\; -(1/h)(F \circ \pi). \tag{3.19}$$

Esta ecuación determina la componente vertical del campo vectorial ζ. De acuerdo con la definición de campo vectorial fundamental (ver [5 - 11]), esta componente es

$$\zeta_V \;=\; -\sigma_{F/h}. \tag{3.20}$$

Substituyendo (3.19) y (3.2) en (3.17) obtenemos

$$i_{\zeta_H}(\pi^*\omega) \; = \; -d(F\circ\pi); \tag{3.21}$$

por lo tanto, F es una función de valor real sobre M y ζ_H es el levantamiento horizontal del campo vectorial Hamiltoniano ξ_F de F,

$$\zeta_H \; = \; \hat{\xi}_F. \tag{3.22}$$

Denotaremos por ζ_F al campo vectorial determinado por las ecs. (3.20) y (3.22); esto es,

$$\zeta_F \; = \; \hat{\xi}_F \; - \; \sigma_{F/h}. \tag{3.23}$$

La aplicación $F \to \zeta_F$ es un siomorfismo lineal del álgebra de Poisson $C^\infty(M,\mathbb{R})$ en el álgebra de Lie $\hat{H}(L^*)$.

Podemos definir la acción de cada campo vectorial ζ_F sobre el espacio $C^\infty_\lambda(L^*,\mathbb{C})$ de funciones ψ_λ como

$$\zeta_F\psi_\lambda \; = \; \hat{\xi}_F\psi_\lambda \; + \; (i/\hbar)(F\circ\pi)\psi_\lambda, \tag{3.24}$$

donde $\hbar = h/2\pi$. Por tanto, la acción del campo vectorial ζ_F sobre el espacio $\Gamma(L)$ es

$$\lambda(m)\cdot(\zeta_F\psi_\lambda)(\lambda(m)) \; = \; \nabla_{\xi_F}\lambda(m) \; + \; (i/\hbar)F(m)\lambda(m). \tag{3.25}$$

Vamos ahora a definir el operador cuántico O_F correspondiente al observable clásico F. Consideremos una función $F \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ tal que su campo vectorial Hamiltoniano ξ_F es completo, así que F genera un grupo mono-paramétrico ${\phi_F}^t$ de transformaciones canónicas del espacio de fase M. El grupo ${\phi_F}^t$ induce un grupo $\hat{\phi}^t_F$ de difeomorfismos de L^* que preservan la conexión α t tal que, para cada $t \in \mathbb{R}$, se cumple la relación

$$\pi\circ\hat{\phi}^t_F \; = \; {\phi_F}^t\circ\pi. \tag{3.26}$$

El grupo de difeomorfismos $\hat{\phi}^t_F$ es generado por el campo vectorial ζ_F, definido mediante la ec. (3.23). Puesto que $\hat{\phi}^t_F$ preserva a α, entonces conmuta con la acción del grupo $\mathbb{C}^*$ sobre L^*; por lo tanto, para cada $t \in \mathbf{R}$ y cada $\lambda \in \Gamma(L)$, podemos definir una función $\psi_\lambda\circ\hat{\phi}^t_F$ sobre L^*, la cual define entonces una sección ${\phi_F}^t$ de L a través de la relación

$$\psi_{{\phi_F}^t} \; = \; \psi_\lambda\circ\hat{\phi}^{-t}_F. \tag{3.27}$$

Las aplicaciones $\psi_\lambda \to \psi_{{\phi_F}^t\lambda}$ forman un grupo mono-paramétrico de transformaciones lineales sobre el espacio $C^\infty_\lambda(L^*,\mathbb{C})$ de funciones ψ_λ; por lo tanto, las aplicaciones $\lambda \to {\phi_F}^t\lambda$ forman un grupo mono-paramétrico de transformaciones lineales sobre el espacio $\Gamma(L)$ de secciones de L.

Definimos el operador cuántico O_F correspondiente al observable F como el generador del grupo monoparamétrico ${\phi_F}^t\lambda$,

$$O_F\,[\lambda] \;=\; i\hbar\frac{d}{dt}\left({\phi_F}^t\lambda\right)|_{t=0}. \tag{3.28}$$

El operador O_F se puede expresar en términos del campo vectorial ζ_F, de la siguiente manera. Dado que ζ_F es el generador del grupo mono-paramétrico $\hat{\phi}^t_F$, entonces

$$-\zeta_F(\psi_\lambda) \;=\; \frac{d}{dt}(\psi_\lambda \circ \hat{\phi}^{-t}_F)|_{t=0} \;=\; \frac{d}{dt}(\psi_{{\phi_F}^t})|_{t=0}; \tag{3.29}$$

por lo tanto,

$$\psi_{O_F[\lambda]} \;=\; i\hbar\frac{d}{dt}(\psi_{{\phi_F}^t})|_{t=0} \;=\; -i\hbar\zeta_F\psi_\lambda. \tag{3.30}$$

La ecuación anterior se puede usar como una definición alternativa de O_F; en particular, se puede usar para definir O_F cuándo el campo vectorial ζ_F no es completo y ${\phi_F}^t\lambda$ no necesariamente está definido. Así entonces, tenemos que

$$O_F[\lambda] \;=\; \lambda(\psi_{O_F[\lambda]})(\lambda), \tag{3.31}$$

que, de acuerdo con la ec. (3.25), puede escribirse como

$$O_F[\lambda] \;=\; [-i\hbar\nabla_{\xi_F} \;+\; F]\lambda. \tag{3.32}$$

Si la función F es constante, entonces $\xi_F = 0$ y O_F es el operador de multiplicación por F. De acuerdo con esto, la aplicación $O : F \to O_F$ es un monomorfismo líneal del álgebra de Poisson $C^\infty(M,\mathbb{R})$ en el álgebra de Lie de operadores hermíticos sobre el espacio $\Gamma(L)$ de secciones λ.

Mediante la ec. (3.32) puede verse que el monomorfismo $O : F \to O_F$ satisface la condición (3.1): el paréntesis de Poisson (F,G) de dos funciones F y G se representa mediante el conmutador $[O_F,O_G]$ de los correspondientes operadores cuánticos O_F y O_G. Así entonces, el método de cuantización geométrica es un procedimiento general para construir una representación del álgebra de Poisson de observables clásicos mediante el álgebra de Lie de operadores hermíticos sobre $\Gamma(L)$.

4. Mecánica Cuántica de una Partícula

Como una aplicación del método de cuantización geométrica formularemos la mecánica cuántica de una partícula. El espacio de configuración X de una partícula individual es isomorfo a $\mathbb{R}^3$; así entonces, su espacio de fase M es isomorfo a $\mathbb{R}^6$. El isomorfismo de M en $\mathbb{R}^6$ se define mediante las componentes q^1, q^2 y q^3 del vector posición $\mathbf{q}$ y las componentes p_1, p_2 y p_3 del vector momentum líneal $\mathbf{p}$ con respecto a un marco de referencia inercial. La 1-forma canónica θ se expresa como

$$\theta \;=\; \sum_{i=1}^{3} p_i dq^i, \tag{4.1}$$

de modo que la 2-forma $\omega = d\theta$, que define la estructura simpléctica del espacio de fase M, viene dada por

$$\omega \;=\; \sum_{i=1}^{3} dp_i \wedge dq^i. \tag{4.2}$$

Escojamos como haz líneal L sobre M el haz trivial $L = M \times \mathbf{C}$, con $\pi : L \to M$ la proyección sobre el primer factor. Como un sistema local para L podemos tomar el conjunto $\{(M, \lambda_0)\}$, donde $\lambda_0 : M \to L$ definida como

$$\lambda_0(m) \;=\; (m, 1), \tag{4.3}$$

para todo $m \in M$, es la sección unidad de L; por lo tanto, $\gamma(L)$ es isomorfo a $C^\infty(M, \mathbb{C})$ puesto que caualquier otra sección $\lambda \in \Gamma(L)$ es univocamente de la forma $\lambda = \delta \cdot \lambda_0$, para algún $\delta \in C^\infty(M, \mathbb{C})$. Podemos tomar la 1-forma de conexión α del haz líneal L como la expresión

$$\alpha \;=\; -(1/\hbar)\pi^*\theta, \tag{4.4}$$

la cual satisface las ecs. (3.2) y (3.3) que definen la 2-forma de curvatura de L.

La derivada covariante de una sección λ en la dirección de un campo vectorial ξ sobre M se escribe como

$$\nabla_\xi \lambda \;=\; \nabla(\delta \cdot \lambda_0) \;=\; (\xi\delta)\lambda_0 \;+\; \delta \nabla_\xi \lambda_0; \tag{4.5}$$

es decir,

$$\nabla_\xi \lambda \;=\; [\xi\delta \;+\; 2\pi i(\lambda_0^*\alpha)(\xi)\delta]\; \lambda_0. \tag{4.6}$$

La 1-forma $\lambda_0^* \alpha$ se escribe, de acuerdo con (4.4), como

$$\lambda_0^* \alpha \;=\; -(1/\hbar)\theta, \tag{4.7}$$

de modo que la derivada covariante $\nabla_\xi \lambda$ puede escribirse como

$$\nabla_\xi \lambda \;=\; [\xi - (i/\hbar)\theta(\xi)]\delta\lambda_0. \tag{4.8}$$

El operador cuántico O_F correspondiente al observable clásico F viene dado por la ec. (3.32). De acuerdo con (4.8), O_F se expresa como

$$O_F \;=\; -i\hbar\xi_F \;-\; \theta(\xi_F) \;+\; F, \tag{4.9}$$

donde ξ_F es el campo vectorial Hamiltoniano del observable F.

De especial importancia en la teoría cuántica son los observables constituidos por las componentes q^i del vector posición, las componentes p_i del vector momentum líneal y las componentes $J_i = \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} q^j p_k$ del vector momentum angular. Los campos vectoriales Hamiltonianos de los observables q^i, p_i y J_i son

$$\xi_{q^i} = -\frac{\partial}{\partial p_i}, \tag{4.10a}$$

$$\xi_{p_i} = \frac{\partial}{\partial q^i}, \tag{4.10b}$$

$$\xi_{J_i} = \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk}(q^j \frac{\partial}{\partial q^k} - p_k \frac{\partial}{\partial p_j}). \tag{4.10c}$$

Aquí, ϵ_{ijk} es el símbolo de permutación igual a 1 si $(1,2,3) \to (i,j,k)$ es una permutación par, -1 si es una permutación impar y 0 si algunos de los índices i,j,k son iguales.

Para encontrar las expresiones de los operadores O_F correspondientes, evaluamos la 1-forma θ en los respectivos campos vectoriales Hamiltonianos. Utilizando la expresión (4.1) para la 1-forma θ y las propiedades $dq^i(\partial/\partial q^j) = \delta^i_j$ y $dq^i(\partial/\partial p_j) = 0$, obtenemos

$$\theta(\xi_{q^i}) = 0 \;, \tag{4.11a}$$

$$\theta(\xi_{p_i}) = p_i \;, \tag{4.11b}$$

$$\theta(\xi_{J_i}) = J_i \;; \tag{4.11c}$$

por lo tanto, de acuerdo con (4.9), los correspondientes operadores cuánticos son

$$O_{q^i} = \ i\hbar\frac{\partial}{\partial p_i} \ + \ q^i \ , \tag{4.12a}$$

$$O_{p_i} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial q^i} \ , \tag{4.12b}$$

$$O_{J_i} = i\hbar\sum_{j,k=1}^{3}\epsilon_{ijk}(p_k\frac{\partial}{\partial p_j} - q^j\frac{\partial}{\partial q^k}) \ . \tag{4.12c}$$

Sin embargo, la construcción está aún incompleta, pues estamos interesados en sistemas elementales, para los cuales la representación debe ser irreducible; esto es, ningún sub-espacio del espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ debe ser invariante bajo la acción de los operadores cuánticos O_F. La condición de irreducibilidad refelja el hecho de que, en el sistema clásico, los observables F generan transformaciones canónicas del espacio de fase bajo las cuales cualquier estado clásico, o punto de M, puede ser llevado a cualquier otro estado cercano. El sistema cuántico correspondiente debe tener una propiedad análoga: ningún sub-espacio del espacio de Hilberet debe ser invariante bajo cambios de posición y momentum.
El espacio $\Gamma(L)$ de todas las secciones λ, el cual en este caso es isomorfo a $C^\infty(M,\mathbb{R})$, es demasiado grande para producir una representación irreducible [8, 6]. En particular, el sub-espacio de $C^\infty(M,\mathbb{R})$ constituido por aquellas funciones χ que son constantes sobre las fibras de M es invariante bajo la acción de los operadores O_{q^i}, O_{p_i} y O_{J_i}. Este subespacio, $C^\infty(X,\mathbb{R})$, es adeás el mínimo sub-espacio invariante de $C^\infty(M,\mathbb{R})$. Ası entonces, debemos construir el espacio de representación $\mathcal{H}$ ya no de la totalidad de $C^\infty(M,\mathbb{R})$, sino a partir del sub-espacio $C^\infty(X,\mathbb{R})$ constituido por las funciones χ que son constantes sobre las fibras de M; esto es, funciones de onda sobre el espacio de configuración y no sobre el espacio de fase. Las secciones λ de L son entonces de la forma

$$\lambda \ = \ \chi \cdot \lambda_0 \ , \tag{4.13}$$

donde $\chi \in C^\infty(X,\mathbb{R})$; es decir, $\chi = \chi(q^1, q^2, q^3)$.
Aplicando entonces los operadores cuánticos O_{q^i}, O_{p_i} y O_{J_i}, dados por (4.12),

a las secciones λ de la forma (4.13), obtenemos

$$O_{q^i}[\chi \cdot \lambda_0] = \left(q^i \chi\right) \lambda_0 \ , \tag{4.14a}$$

$$O_{p_i}[\chi \cdot \lambda_0] = -i\hbar \left(\frac{\partial \chi}{\partial q^i}\right) \lambda_0 \ , \tag{4.14b}$$

$$O_{J_i}[\chi \cdot \lambda_0] = -i\hbar \left(\sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} q^j \frac{\partial}{\partial q^k}\right) \lambda_0 \ . \tag{4.14c}$$

Estas expresiones para los operadores concuerdan con los resultados obtenidos mediante el procedimiento de cuantización canónica usual [12, 13], obteniendose así las expresiones de operadores correctas para los observables fundamentales. El método de cuantización geométrica presenta además la ventaja de remover las ambigüedades existentes en el procedimiento de cuantización canónica, como veremos a continuación.

El procedimiento de cuantización canónica consiste en lo siguiente: Consideremos un sistema dinámico clásico, con Hamiltoniano $H(q, p, t)$, cuya energía total es

$$E \ = \ H(q, p, t), \tag{4.15}$$

donde $q = (q^1, ..., q^n)$ y $p = (p_1, ..., p_n)$. A este sistema clásico le hacemos corresponder un sistema cuántico cuyo estado dinámico viene representado por una función de onda $\psi(q, t)$ y cuya ecuación de onda se obtiene realizando en la ec. (4.15) las substituciones

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \ , \tag{4.16a}$$

$$p_i \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial q^i}, \tag{4.16b}$$

con $i = 1, ..., n$, y postulando que estas cantidades, consideradas como operadores, producen resultados iguales cuando actúan sobre ψ.

Sin embargo, esta regla de correspondencia no define en forma única los operadores cuánticos correspondientes a un sistema determinado. Existen dos causas de ambigüedad, la primera de las cuales se debe a que esta regla no es invariante bajo un cambio de coordenadas del espacio de configuración [12]. Este problema queda resuelto en el método de cuantización geométrica el cual es, debido a su naturaleza "geométrica", independiente de las coordenadas escogidas para describir el sistema. La segunda causa de ambigüedad se debe a que la regla (4.16) substituye magnitudes que obedecen las reglas del álgebra ordinaria por operadores que no conmutan todos entre sí.

El Hamiltoniano H viene dado en general, en coordenadas cartesianas, por una expresión de la forma

$$H(q,p,t) \;=\; \sum p_i p_j \;+\; \sum p_i f_i(q) \;+\; h(q) \;, \tag{4.17}$$

presentandose entonces problemas al aplicar la regla (4.16) al segundo término de (4.17), pues pueden realizarse las dos correspondencias

$$p_i f_i(q) \to -i\hbar \frac{\partial}{\partial q^i}\left[f_i(q)\psi(q,t)\right] \;, \tag{4.18}$$

o

$$p_i f_i(q) \to -i\hbar f_i(q) \frac{\partial}{\partial q^i}\left[\psi(q,t)\right] \;, \tag{4.19}$$

las cuales producen dos operadores cuánticos diferentes para la misma función clásica $p_i f_i(q)$.

El caso de una partícula en presencia de un campo magnético constante, $\mathbf{B} = B_0\hat{\mathbf{k}}$, es un ejemplo de sistemas donde se presenta esta ambigüedad. En este caso el vector potencial es de la forma $\mathbf{A} = (1/2)B_0\rho\hat{\mathbf{e}}_\phi$, expresado en coordenadas cilíndricas. En el Hamiltoniano aparecen términos proporcionales a productos de la forma $p_i A^i$, que pueden entonces cuantizarse de las dos formas posibles mostradas anteriormente.

Ahora bien, aplicando el método de cuantización geométrica a funciones de la forma $p_i f_i(q)$ se obtiene el resultado único

$$O_{p_i f_i(q)}[\chi \cdot \lambda_0] \;=\; -i\hbar \left(f_i(q)\frac{\partial \chi}{\partial q^i} \right) \lambda_0, \tag{4.20}$$

obteniendose entonces un operador bien definido para cada uno de los observables considerados; por lo tanto, no existe ambigüedad en el ordenamiento de los operadores.

Referencias

[1] B. Konstant, *Quantization and Unitary Representations*, Lecture Notes in Mathematics **170**, p. 87, Springer - Verlag, 1970.
[2] J. M. Souriau, *Structure des Systèmes Dynamiques*, Dunod, 1970.
[3] H. Goldstein, *Mecánica Clásica*, Aguilar, 1963.

[4] V. I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Gruadate Texts in Mathematics, **60**, Springer-Verlag, 1980.

[5] Y. Choquet-Bruhat, C. DeWitt-Morette and M. Dillard-Bleick. *Analysis, Manifolds and Physics*, North-Holland, 1978.

[6] A. A. Kirillov, *Elements of the Theory of Representations*, Grundlehren der Mathematishen Weissenschaften, **220**, Springer-Verlag, 1976.

[7] J. Sniatycki, *Geometric Quantization and Quantum Mechanics*, Applied Mathematical Science, **30**, Springer-Verlag, 1980.

[8] D. J. Simms and N. M. J. Woodhouse, *Lectures on Geometric Quantization*, Lecture Notes in Physics **53**, Springer-Verlag, 1976.

[9] N. Steenrod, *The Topology of Fibre Bundles*, Princeton University Press, 1951.

[10] C. Chevalley, *Theory of Lie Groups*, Princeton University Press, 1946.

[11] R. O. Wells, *Differential Analysis on Complex Manifolds*, Graduate Text in Mathematics, **65**, Springer-Verlag, 1979.

[12] A. Messiah, *Mecánica Cuántica*, Editorial Tecnos, 1973.

[13] L. I. Schiff, *Quantum Mechanics*, McGraw-Hill, 1968.