Revista INTEGRACIÓN
Universidad Industrial de Santander
Escuela de Matemáticas
Vol. 17, No 1, p. 27–47, enero–junio de 1999

Sobre autosemejanza topológica, Parte I

Sonia M. Sabogal P.* †

Resumen

Un espacio topológico X se dice autosemejante (topológicamente) si todo abierto no vacío contiene un subespacio homeomorfo a X. Se presentan ejemplos (entre ellos $\beta\mathbb{N} - \mathbb{N}$), propiedades e interrelación con conceptos afines como autosemejanza simbólica y atractor de un sistema iterado de funciones.

Palabras claves. Autosimilitud, espacios autohomeomorfos, cocientes del espacio de Cantor, fractales.

1 Introducción

Aunque ejemplos de conjuntos autosemejantes (o autosimilares) son conocidos desde hace mucho tiempo, al parecer es sólo recientemente que se hacen intentos para establecer una base teórica, formal y sistemática acerca de ellos. Un objetivo de este trabajo es contribuir con el establecimiento de dicha base.

La noción intuitiva de autosemejanza (o autosimilitud) es muy sencilla y natural; muy seguramente todos la hemos percibido en algún momento y de alguna manera en muy diversos contextos: por ejemplo al observar diferentes objetos de la naturaleza como los árboles, algunas clases de helechos, una cabeza de coliflor, las nubes, las olas del mar, entre muchos otros. Se encuentra también, claro está, en el contexto de las matemáticas: algunas

*La autora desea dar crédito a Colciencias, entidad que le otorgó, de 1994 a 1996, una beca–crédito condonable para adelantar estudios de doctorado en matemáticas en la Universidad Nacional de Colombia, y a la Fundación Mazda para el Arte y la Ciencia, entidad que le concedió una beca durante los años 1998 y 1999. También desea agradecer a los profesores **Carlos Ruiz** y **Rafael Isaacs** por sus importantes y valiosas sugerencias.

†Profesora, Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, COLOMBIA, S.A. (*E–mail*: `ssabogal@uis.edu.co`)

fracciones continuas, conjuntos cuyos elementos son conjuntos, filtros cuyos elementos son filtros, la categoría de las categorías, la estructura de $\mathrm{Top}(X)$ y numerosos conjuntos, hoy ejemplos clásicos de conjuntos autosimilares como el conjunto de Cantor, el triángulo de Sierpinski y la curva de Koch. En todos estos entes se percibe de alguna forma y en mayor o menor grado la siguiente característica: *el todo está formado por varias copias de sí mismo, solo que reducidas y colocadas en diferente posición*; o, dicho de otra manera: *el todo es igual a sus partes salvo un factor de escala*.

La mención explícita quizá más remota en la historia sobre el fenómeno de autosemejanza, se remonta al siglo V a. de J.C. al examinar las ideas del filósofo jonio **Anaxágoras de Clazomene** (¿500?–428 a. de J.C.). Según Anaxágoras, el universo fue un caos de innumerables semillas (*spermata*), al cual la mente (*nus*), mediante un movimiento de rotación (*perichoresis*), dio orden y forma. Estas "semillas" no son elementos pues *cada una es tan compleja como el todo.* La alusión a la autosemejanza es clara: según Anaxágoras,

> *todo el universo y sus partes, por pequeñas que sean, son homogéneos; sus diferencias son solo diferencia de tamaño, no de composición.*

Así, cada semilla o *sperma*,

> *no es más simple que el resto, ni esencialmente distinta en su composición* ([16], p. 297)).

B. Mandelbrot [15] describió (de una manera muy informal) la noción de autosemejanza, a la que él denomina "escalante", de la siguiente manera:

> *Dícese de una figura geométrica o de un objeto natural cuyas partes tienen la misma forma o estructura que el todo, salvo que están a diferente escala y pueden estar ligeramente deformadas.*

J. E. Hutchinson [9] presentó una teoría muy formal y bien fundamentada de los que él llamó conjuntos estrictamente autosimilares. Demostró que dado $\mathbb{S} = \{S_1, \ldots, S_N\}$, un conjunto finito de contracciones sobre un espacio métrico completo (esto es lo que más adelante Barnsley [3] denominó un Sistema Iterado de Funciones, SIF), entonces existe un único conjunto compacto no vacío K, invariante con respecto a $\mathbb{S}$, es decir tal que $K = \bigcup_{i=1}^{N} S_i(K)$, (por ejemplo el conjunto de Cantor es el único compacto no vacío, invariante bajo las contracciones $S_1(x) = \frac{1}{3}x,\ S_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ de la recta real) y discutió las propiedades de dicho conjunto invariante principalmente en relación con su medida, para luego proponer la siguiente definición:

Un conjunto K se dice autosimilar con respecto a $\mathbb{S}$ (como antes $\mathbb{S}$ es un conjunto finito de contracciones sobre un espacio métrico completo (X,d)) si cumple las siguientes dos condiciones:

(i) *K es invariante con respecto a $\mathbb{S}$;*

(ii) $H^k(K) > 0,\ H^k(K_i \cap K_j) = 0$, para $i \neq j$, *donde $H^k(K)$ es la medida de Hausdorff de K en dimensión k*, $k = \dim K,\ K_i = S_i(K)\ \forall i$.

Sugirió también una noción de autosimilitud que podría ser más útil, usando la llamada "condición del conjunto abierto", e hizo un estudio muy formal y riguroso de los conjuntos autosimilares principalmente desde el punto de vista de la teoría de la medida, y para el caso particular en que $\mathbb{S}$ es un conjunto de similitudes (es decir, composiciones de isometrías y homotecias) y (X,d) es $\mathbb{R}^n$ con la métrica euclidiana.

K. J. Falconer [6] estudió diversos conjuntos fractales como ejemplos de conjuntos autosimilares, adoptando la definición dada por Hutchinson y trabajando aproximadamente desde el mismo punto de vista de este último.

M. Hata [8] investigó propiedades topológicas del único conjunto compacto K tal que $K = \sum_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda(K)$, donde cada f_λ es una contracción débil de un espacio métrico completo y Λ es finito ó $\Lambda = \mathbb{N}$, proponiendo así una nueva definición de conjunto autosimilar y generalizando algunos resultados de Hutchinson. **M. Barnsley** y **S. Demko** [4] formalizaron una aproximación a los fractales autosimilares, y más adelante el mismo Barnsley amplió esta aproximación en [3] e hizo un estudio formal de la obtención, mediante SIF's, de conjuntos autosimilares , a los que él llamó *atractores* de SIF's. Barnsley omitió la condición (ii) de la definición dada por Hutchinson, con lo cual obviamente generalizó el concepto. **C. Bandt** y **K. Keller** [2] presentaron una descripción de la topología de ciertos conjuntos autosimilares y consideraron propiedades de ramificación y conexidad. **F. Takeo** [17] estudió la estructura de conjuntos autosimilares que son invariantes con respecto a dos contracciones sobre $\mathbb{R}^N$. **G. B. Lewellen** [14] definió un conjunto autosimilar como un conjunto compacto que es la unión de sus imágenes bajo los miembros de una colección de contracciones, indizadas por un conjunto compacto Λ, extendiendo el trabajo de Hutchinson, Barnsley y Hata en cuanto la colección de contracciones que actúan puede ser o no contable. **A. Kameyama** [11] estudió propiedades topológicas de los conjuntos autosimilares, trabajando con la definición de Barnsley. Introdujo objetos más generales a los que llamó *espacios autosimilares simbólicos*, que son cierto tipo de espacios cociente del espacio de Cantor, y dió condiciones para la metrizabilidad, conexidad y conexidad local de estos espacios. El mismo Kameyama presenta en [12], presenta otra definición de conjunto autosimilar, por medio de sistemas dinámicos simbólicos, obteniendo otra generalización de la definición formulada por Hutchinson.

Las definiciones anteriores de la noción de autosemejanza están restringidas al contexto de los espacios métricos. **W. J. Charatonik** y **A. Dilks** [5] investigaron espacios topológicos en los cuales se puede encontrar, en todo abierto no vacío, una imagen homeomórfica del espacio total. Plantearon entonces la siguiente definición (y algunas modificaciones de ella), con la cual se pretende estudiar el concepto en el contexto más amplio de los espacios topológicos; tal definición es la que adoptaremos en este trabajo.

Definición 1.1. *Un espacio topológico X se dirá* ***autosemejante (topológicamente)****, si todo abierto no vacío de X contiene un subespacio homeomorfo a X.*

La propiedad de ser autosemejante es necesaria para que un espacio sea autosimilar estricto (ver sección 2 de [5]); por lo tanto, la familia de espacios topológicamente autosemejantes incluye muchos de los llamados "fractales". Además, esta familia contiene propiamente la familia de espacios invariantes (ver definición 3.1 y Figura 1).

En la siguiente sección se presentan ejemplos (entre ellos $\beta\mathbb{N}-\mathbb{N}$) y propiedades. En la sección 3 se analizan interrelaciones con algunos conceptos afines como espacios autosimilares simbólicos y atractor de un sistema iterado de funciones. Se demuestra (Corolario 3.2) que, bajo cierta condición, el atractor de un SIF es autosemejante. Aunque este resultado aparece más general en [5] (Teorema 3.4), la demostración que nosotros presentamos es diferente y además la podemos generalizar fácilmente para otro tipo de cocientes (Proposiciones 3.5 y 3.6). Se presentan formas de construcción, algunas de las cuales corresponden a espacios de filtros y ultrafiltros. En la parte II de este trabajo se presentarán otras construcciones en espacios de funciones, se demostrará que X^Y es autosemejante para cualquier espacio X y cualquier Y conjunto infinito; como consecuencia inmediata el espacio de Cantor es autosemejante. También se estudiará la autosemejanza de X^Y con otras topologías que corresponden a generalizaciones de la topología producto. Finalmente, en la última sección de la Parte II se presentan y analizan algunas generalizaciones de la noción de autosemejanza y se plantean algunas preguntas y tareas pendientes.

La mayor parte de los resultados que se presentan en este trabajo fueron expuestos en diferentes sesiones del **Seminario Sabatino de Topología**, realizado en la Universidad Nacional de Colombia, durante el segundo semestre de 1996 y constituyen un avance del trabajo de tesis que realizó la autora, bajo la dirección del **Doctor Carlos J. Ruiz S.**

2 Ejemplos y propiedades

En lo que sigue se entenderá que autosemejanza significa autosemejanza topológica, tal como se definió en la sección anterior. Estamos interesados, entre otras cosas, en estudiar cómo se propaga la propiedad de autosemejanza a través de las operaciones que son propias de los constructos, por ejemplo su conducta con respecto al orden en $\mathrm{Top}(X)$ con respecto a los procedimientos de imagen inversa e imagen directa, y más particularmente con respecto a subespacios (imagen inversa bajo inyección) y cocientes (imagen directa bajo sobreyección). Por ejemplo, es claro que el espacio trivial $(X, \{\emptyset, X\})$ (el mínimo en $(\mathrm{Top}(X), \subseteq)$) es autosemejante, pero el espacio discreto (X, PX), (el máximo en $(\mathrm{Top}(X), \subseteq)$) no es autosemejante ($X$ es un conjunto con más de un punto). De la misma forma, un espacio finito no trivial con más de un punto no es autosemejante. Además, un espacio no trivial con exactamente un número finito de abiertos, no es autosemejante. Por otra parte, la propiedad de autosemejanza no se preserva por topologías más finas ni menos finas: $\mathbb{R}$ es autosemejante con la topología usual pero no lo es con la topología cuya base es la topología usual agregando el singletón $\{0\}$, ni lo es con la topología $\tau = \{\emptyset,\ \mathbb{R},\ (0,1)\ \}$.

Otros ejemplos son los siguientes:

Ejemplo 2.1. *$\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ y en general $\mathbb{R}^n$ son autosemejantes. Cualquier intervalo de $\mathbb{R}$ también es autosemejante.*

Ejemplo 2.2. *En $\mathbb{R}^2$ un disco $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ es autosemejante, pero por ejemplo el círculo S^1 no lo es.*

Ejemplo 2.3. *Un conjunto infinito con la topología de complementos finitos, es autosemejante. En este caso se tiene una especie de "autosemejanza fuerte", en el sentido de que cualquier abierto no vacío resulta ser él mismo homeomorfo a todo el espacio, y no sólo eso, sino que además cualquier biyección entre el abierto y el espacio total sirve como homeomorfismo. Análogamente ocurre con un conjunto no enumerable dotado de la topología de complementos enumerables, y en general con un conjunto infinito de cardinal*

α, tomando como abiertos los subconjuntos cuyo complemento tiene cardinal estrictamente menor que α, además del conjunto vacío.

Ejemplo 2.4. $\mathbb{N}$ *con la topología de las colas a la derecha, es autosemejante. En este caso también ocurre que cualquier abierto no vacío es él mismo homeomorfo a* $\mathbb{N}$*, aunque a diferencia del ejemplo anterior, no lo es bajo cualquier biyección.*

En la siguiente proposición se enumeran algunas propiedades de la autosemejanza topológica.

Proposición 2.1.

- (i) *Si todo punto $x \in X$ admite un sistema fundamental de vecindades, cada una de ellas homeomorfa a X, entonces X es autosemejante.*
- (ii) *Si X es autosemejante, $|O| = |X|$ para todo O abierto no vacío de X.*
- (iii) *Un espacio autosemejante con más de un punto es perfecto.*
- (iv) *La autosemejanza es una propiedad topológica.*
- (v) *La autosemejanza se hereda por semiabiertos*[1]*, es decir un subespacio semiabierto de un espacio autosemejante, es autosemejante.*
- (vi) *Si $\{X_\alpha\}_\alpha$ es una familia de espacios autosemejantes, entonces el espacio producto $\prod_\alpha X_\alpha$ es autosemejante.*
- (vii) *En general, la autosemejanza no se preserva por subespacios, sumas, ni cocientes.*

Demostración. (i), (ii), (iii), (iv) y (vi) son inmediatas.

(v) Sean X autosemejante, O un abierto de X y H tal que $O \subseteq H \subseteq \overline{O}$. Se probará que H es autosemejante. Si $O = \emptyset$ entonces también $H = \emptyset$, que es autosemejante. Si O no es vacío, sea $A \cap H$ un abierto no vacío del subespacio H (es decir, se está tomando A un abierto de X). Sea $x \in A \cap H$. Entonces A es una vecindad de x y $x \in \overline{O}$, luego $O \cap A$ es un abierto no vacío de X. Sea entonces X' homeomorfo a X y $X' \subseteq O \cap A$. Sea $H' \subseteq X'$ tal que H' es homeomorfo a H. Como $X' \subseteq O \cap A$ y $O \cap A \subseteq A \cap H$, entonces $H' \subseteq A \cap H$, lo que prueba que H es autosemejante.

[1]Un subconjunto H de un espacio topológico X se dice **semiabierto** si existe O abierto en X tal que $O \subseteq H \subseteq \overline{O}$ (veáse [13]).

(vii) Basta considerar por ejemplo S^1 como subespacio de $\mathbb{R}^2$, S^1 como cociente del intervalo $[0,1]$, y la suma de un intervalo con un disco, respectivamente.

∎

Observación 2.1. *Vale la pena anotar que lo recíproco de* (i) *no se cumple. Por ejemplo, el triángulo de Sierpinski (véase ejemplo* **3.2***) S es autosemejante en virtud del Corolario* **3.2***, pero para el punto donde se intersecan $w_1(S)$ y $w_2(S)$ no existe un sistema fundamental de vecindades homeomorfas a S. Por otra parte, es claro que lo recíproco de* (ii) *tampoco se tiene, como se deduce al considerar por ejemplo el círculo S^1. Con respecto a* (v) *cabe decir que si un subespacio H de un espacio autosemejante X es también autosemejante, no necesariamente H es un semiabierto, como ocurre tomando por ejemplo $X = \mathbb{R}$ y $H = \mathbb{Q}$; y finalmente, con respecto a la afirmación* (vi) *también podemos decir que lo recíproco no se cumple, como se deduce de la proposición* ***3.1***

Ejemplo 2.5 (Autosemejanza y el compactado $\beta\mathbb{N}$). *Una forma de construir el compactado de Stone–Čech del espacio discreto $\mathbb{N}$ de los números naturales consiste en tomar*

$$\beta\mathbb{N} = \{\ \mathcal{U} \mid \mathcal{U} \text{ es ultrafiltro sobre } \mathbb{N}\ \}$$

con la topología que tiene como base la familia

$$\mathcal{B} = \{\ \mathbb{F}_A \mid A \subseteq \mathbb{N}\ \},$$

donde $\mathbb{F}_A = \{\ \mathcal{U} \in \beta\mathbb{N} \mid A \in \mathcal{U}\ \}$ para cada $A \subseteq \mathbb{N}$. Así, es fácil ver que $\beta\mathbb{N} - \mathbb{N}$ es autosemejante (ver [18]); tenemos que

$$\beta' =: \beta\mathbb{N} - \mathbb{N} = \{\ \mathcal{U} \in \beta\mathbb{N} \mid \mathcal{U} \text{ es ultrafiltro no principal } \}.$$

Sea

$$\mathbb{F}'_A = \mathbb{F}_A \cap \beta' = \{\ \mathcal{U} \mid \mathcal{U} \text{ es ultrafiltro no principal y } A \in \mathcal{U}\ \}$$

abierto básico de β'. Entonces β' y $\mathbb{F}'_A$ son homeomorfos.

Observación 2.2.

1. *En general, X autosemejante no implica βX autosemejante. Por ejemplo, $\mathbb{R}$ es autosemejante, pero el intervalo $(0,1)$ claramente no contiene una copia de $\beta\mathbb{R}$. Sin embargo, del ejemplo anterior surge una pregunta natural: ¿es en general $\beta X - X$ autosemejante? (esta pregunta queda planteada en la última sección de la Parte* **II** *de este trabajo).*

2. *El ejemplo* **2.5** *se puede generalizar como sigue: si X es espacio discreto, su compactado de Stone–Čech está dado por*

$$\beta X = \{ \mathcal{U} \mid \mathcal{U} \text{ es ultrafiltro sobre } X \}$$

con la topología que tiene como base la familia

$$\mathcal{B} = \{ \mathbb{F}_A \mid A \subseteq X \},$$

donde $\mathbb{F}_A = \{ \mathcal{U} \in \beta X \mid A \in \mathcal{U} \}$. Entonces el subespacio

$$\beta' = \{ \mathcal{U} \in \beta X \mid |A| = |X|, \ \forall A \in \mathcal{U} \}$$

es autosemejante.

3. *Aunque $\beta\mathbb{N}$ no es autosemejante, sí satisface por ejemplo la siguiente propiedad: "todo subconjunto abierto no contable contiene una copia de $\beta\mathbb{N}$" (véase* **[18]**). *Esto induce a pensar en una nueva noción, más general:*

   *$\mathcal{C}$–**autosemejanza**: sean X un espacio topológico y $\mathcal{C} \subseteq PX$. X se dirá $\mathcal{C}$–autosemejante si todo $C \in \mathcal{C}$ contiene un subespacio homeomorfo a X.*

   O aún más generalmente:

   *$\mathcal{C}$–Y–**semejanza**: sean Y un espacio topológico (fijo), X un espacio topológico y $\mathcal{C} \subseteq PX$. X se dirá $\mathcal{C}$–Y–semejante si todo $C \in \mathcal{C}$ contiene un subespacio homeomorfo a Y. De esta manera la autosemejanza correspondería a la τ^*–autosemejanza= τ^*–X–semejanza, donde τ^* es la colección de abiertos no vacíos de X. Otro ejemplo que motiva esta segunda generalización lo constituye la noción clásica de **variedad**, que correspondería entonces a la τ^*–$\mathbb{R}^n$–semejanza. En la Parte* II *de este trabajo se exploran un poco este tipo de generalizaciones.*

4. *El complemento del compactado de Stone–Čech de un espacio topológico, con respecto al cubo donde se sumerge, es autosemejante. En efecto: dado un espacio de Tíjonov, se construye su compactado de Stone–Čech como sigue: si $C^*(X)$ denota el conjunto de las funciones de dominio X y valor real que son continuas y acotadas, sea para cada*

$f \in C^*(X)$, I_f un intervalo cerrado y acotado que contiene el recorrido de f. Sea $e : X \longrightarrow \prod_f I_f$ la función evaluación definida por $e(x)(f) =: f(x)$. Entonces el compactado de Stone–Čech de X es la clausura $\beta(X) = \overline{e(x)}$. Puesto que cada intervalo I_f es autosemejante, entonces el producto $\prod_f I_f$ es autosemejante (Proposición **2.1**, *(vi)); claramente $\prod_f I_f - \beta(X)$ es abierto en el producto, luego es semiabierto y se tiene el resultado (Proposición* **2.1**, *(v)).*

5. *Siguiendo la misma idea de la observación 2.2, parte 2, pero tomando ahora todos los filtros sobre un conjunto, se obtiene otra forma de construir espacios autosemejantes: si X es un conjunto y*

$$\mathfrak{F}(X) = \{ \ \mathcal{F} \mid \mathcal{F} \text{ es filtro sobre } X \ \},$$

entonces la familia

$$\mathcal{B} = \{ \ \mathbb{F}_A \mid A \subseteq X \ \},$$

donde $\mathbb{F}_A = \{ \ \mathcal{F} \in \mathfrak{F}(X) \mid A \in \mathcal{F} \ \}$, es base para una topología T_0 sobre $\mathfrak{F}(X)$ tal que el subespacio

$$\mathfrak{F}' = \{ \ \mathcal{F} \in \mathfrak{F}(X) \mid |F| = |X|, \ \forall F \in \mathcal{F} \ \}$$

es autosemejante. Además, se puede probar que si X es dotado con una topología tal que todo abierto no vacío de X tiene el mismo cardinal que X, entonces

   a) la función $\mathcal{V} : X \longrightarrow \mathfrak{F}'$ que a cada $x \in X$ le asocia su filtro de vecindades $\mathcal{V}(x)$, es continua.

   b) Si X es T_0 entonces $\mathcal{V}$ es un homeomorfismo.

6. *Para $\beta\mathbb{N}$ se tiene que*

$$\mathbb{N} = \{ \ \mathcal{U} \in \beta\mathbb{N} \mid \mathcal{U} \text{ es ultrafiltro principal } \}$$

es minimal en la familia de subespacios $\mathfrak{A}$ de $\beta\mathbb{N}$ tales que $\beta\mathbb{N} - \mathfrak{A}$ es autosemejante. Análogamente, notando $\mathfrak{F}(\mathbb{N}) = \mathfrak{F}' \cup \mathfrak{F}''$, donde

$$\mathfrak{F}' = \{ \ \mathcal{F} \in \mathfrak{F}(\mathbb{N}) \mid \forall F \in \mathcal{F}, \ F \text{ es infinito } \}$$

y

$$\mathfrak{F}'' = \{ \ \mathcal{F} \in \mathfrak{F}(\mathbb{N}) \mid \exists F \in \mathcal{F}, \ F \text{ finito } \}$$

entonces $\mathfrak{F}''$ es minimal en la familia de subespacios $\mathfrak{A}$ de $\mathfrak{F}(\mathbb{N})$ tales que $\mathfrak{F}(\mathbb{N}) - \mathfrak{A}$ es autosemejante (o equivalentemente, $\mathfrak{F}'$ es maximal en la familia de subespacios autosemejantes de $\mathfrak{F}(\mathbb{N})$).

7. *La observación anterior hace pensar que, dado un espacio (X, τ), podría ser interesante estudiar las colecciones* $\mathrm{sa}(X)$ *=: colección de subespacios autosemejantes de X y* $\mathrm{cas}(X)$ *=: colección de subespacios de X, de complemento autosemejante. Esta es una tarea pendiente por realizar.*

3 Autosemejanza *versus* atractor de un SIF, *versus* autosemejanza simbólica

Se mostrarán ahora algunas interrelaciones entre los espacios autosemejantes, los atractores de Sistemas Iterados de Funciones y los espacios autosimilares simbólicos, que son cierto tipo de cocientes topológicos del espacio de Cantor. En particular, de las Proposiciones 3.2 y 3.3 se deduce que la autosemejanza topológica constituye efectivamente una extensión de algunas nociones de autosemejanza métrica.

En primer lugar se mostrará que el espacio de Cantor es autosemejante. Para esto se usa el llamado **Espacio de los Códigos**([3], pág. 12): fijo N entero positivo y notando $\Sigma =: \{0, 1, \ldots, N-1\}$, entonces

$$\Sigma^{\mathbb{N}} = \{\ x = x_1 x_2 \cdots \mid x_i \in \Sigma\ \},$$

con la métrica d definida por

$$d(x_1 x_2 \cdots, y_1 y_2 \cdots) =: \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{(N+1)^i},$$

es un espacio métrico (llamado el Espacio de los Códigos) homeomorfo al espacio de Cantor $\mathcal{C}$. Además:

i) si k es un entero positivo fijo y $x \in \Sigma^{\mathbb{N}}$, entonces la bola de centro x y radio $\frac{1}{(N+1)^k}$ está dada por

$$B\left(x, \frac{1}{(N+1)^k}\right) = \{\ y \in \Sigma^{\mathbb{N}} \mid x_i = y_i,\ \forall i = 1, \ldots k\ \}.$$

Esta bola se puede denotar también por $[w)$, el subespacio de todos los códigos que empiezan por la "palabra" $w = x_1 x_2 \cdots x_k$.

ii) La familia de las bolas descritas en *i*) forma una base para la topología de $\Sigma^{\mathbb{N}}$.

Proposición 3.1. *El espacio de Cantor $\mathcal{C}$ es autosemejante.*

Demostración. Por la Proposición **2.1**, parte (iv), y como $\mathcal{C}$ es homeomorfo al espacio de los códigos $\Sigma^{\mathbb{N}}$, basta demostrar que este último es autosemejante. Sea $B\left(x, \frac{1}{(N+1)^k}\right)$ un abierto básico de $\Sigma^{\mathbb{N}}$. No es difícil probar que la función $h : B\left(x, \frac{1}{(N+1)^k}\right) \longrightarrow \Sigma^{\mathbb{N}}$ definida por $h(y_1 y_2 \cdots) =: y_{k+1} y_{k+2} \cdots$, es un homeomorfismo. ∎

La proposición anterior muestra que no se tiene lo recíproco de la parte (vi), Proposición **2.1**.

En la siguiente definición se precisan cuatro tipos distintos de cocientes del espacio de Cantor. Las nociones (i) y (iv) aparecen en la literatura (ver [11] y [12]), mientras que las nociones (ii) y (iii) se proponen en este trabajo:

Definición 3.1. *Sea X un espacio topológico,*

(i) *X se dirá un* ***espacio autosimilar simbólico*** *si X es homeomorfo a un cociente $\Sigma^{\mathbb{N}}/\sim$ de Cantor que satisface: $\forall x, y \in \Sigma^{\mathbb{N}}$, $\forall i \in \Sigma$, $x \sim y$ implica $ix \sim iy$. A una relación que satisfaga esta propiedad la llamaremos (como en* ***[10]****) una* ***relación de congruencia****.*

(ii) *X se dirá un* ***espacio de cancelación*** *si X es homeomorfo a un cociente $\Sigma^{\mathbb{N}}/\sim$ de Cantor que satisface: $\forall x, y \in \Sigma^{\mathbb{N}}$, $\forall i \in \Sigma$, $ix \sim iy$ implica $x \sim y$. A una relación que satisfaga esta propiedad la llamaremos* ***cancelativa****.*

(iii) *X se dirá un* ***espacio cuasiinvariante*** *si X es homeomorfo a un cociente $\Sigma^{\mathbb{N}}/\sim$ de Cantor que satisface: $\forall x, y \in \Sigma^{\mathbb{N}}$, $\forall i \in \Sigma$, $x \sim y$ si y solo si $ix \sim iy$. A una relación que satisfaga esta propiedad (es decir que sea simultáneamente de congruencia y cancelativa) la llamaremos una relación* ***de invarianza****.*

(iv) *X se dirá un* ***factor o espacio invariante*** *si X es cuasiinvariante y de Hausdorff, o equivalentemente si X es cuasiinvariante y $\sim$ es cerrada (es decir $\sim$ es un cerrado del espacio producto $\Sigma^{\mathbb{N}} \times \Sigma^{\mathbb{N}}$)[2].*

A los factores invariantes los llamaremos también **factores o espacios invariantemente autosemejantes**; este nombre quedará justificado en la proposición 3.3.

[2]véase [7], Proposición V.3.25.

Claramente todo espacio invariante es cuasiinvariante, y a su vez todo espacio cuasiinvariante es autosimilar simbólico y de cancelación. Por otra parte, en el ejemplo 3.8 se muestra que el espacio de Sierpinski es un espacio autosimilar simbólico que no es de cancelación (y por tanto no es invariante, ni cuasiinvariante). En el ejemplo 3.7 se muestra que S^1 es un espacio de cancelación que no es invariante ni cuasiinvariante, y en el ejemplo 3.5 se muestra que el espacio trivial de dos puntos es un espacio cuasiinvariante que no es invariante. El siguiente teorema, tomado de [3], permitirá concluir que todo atractor de un SIF es un cociente del espacio de Cantor, y se usará además en la demostración de la Proposición 3.2.

Teorema 3.1. *Sea (X, d) un espacio métrico completo. Sea $\{X;\ w_1, \ldots, w_N\}$ un SIF. Sean A el atractor del SIF y $\Sigma^{\mathbb{N}}$ el espacio de códigos asociado al SIF (es decir con $\Sigma = \{1, \ldots, N\}$). Para cada código $\sigma = \sigma_1\sigma_2\cdots$ y cada $x \in X$, sea*

$$\Phi(\sigma) =: \lim_{n\to\infty} w_{\sigma_1} \circ \cdots \circ w_{\sigma_n}(x).$$

Entonces $\Phi(\sigma)$ siempre existe, pertenece a A y es independiente de x. La función $\Phi : \Sigma^{\mathbb{N}} \longrightarrow A$ es continua y sobre.

Puesto que $\Sigma^{\mathbb{N}}$ es compacto y A es Hausdorff, entonces Φ es (además de continua y sobre) cerrada, lo cual permite concluir (ver [19], Teorema 9.2) el siguiente corolario:

Corolario 3.1. *El atractor de un SIF es un cociente topológico del espacio de Cantor.*

Observación 3.1. *Un teorema muy conocido (ver* **[19]***, Teorema* **30.7***) afirma que todo espacio métrico compacto es una imagen continua del espacio de Cantor; lo cual, teniendo en cuenta que todo espacio métrico es de Hausdorff, permite concluir que todo espacio métrico compacto es un cociente del espacio de Cantor. Así se obtendría una prueba más directa del corolario anterior. Sin embargo se muestra explícitamente la función Φ, debido a que se usará en la demostración de la siguiente proposición.*

Proposición 3.2. *El atractor de un SIF es un espacio autosimilar simbólico. Además, si las contracciones del SIF son inyectivas entonces el atractor es un factor invariante.*

Demostración. Sean A el atractor de un SIF $\{X; w_1, \ldots, w_N\}$, $\Sigma^{\mathbb{N}}$ el espacio de códigos asociado al SIF y $\Phi : \Sigma^{\mathbb{N}} \longrightarrow A$ la función definida en el teorema

A. Entonces $A \simeq \Sigma^{\mathbb{N}}/\sim$, donde la relación $\sim$ está definida por: $x \sim y$ si y solo si $\Phi(x) = \Phi(y)$. Supóngase entonces que $x \sim y$ y sea $i \in \Sigma$. Se tiene:

$$\begin{aligned}
x \sim y &\Longrightarrow \Phi(x) = \Phi(y) \\
&\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} w_{x_1} \circ \cdots \circ w_{x_n}(p) = \lim_{n\to\infty} w_{y_1} \circ \cdots \circ w_{y_n}(p) \\
&\Longrightarrow w_i(\lim_{n\to\infty} w_{x_1} \circ \cdots \circ w_{x_n}(p)) = w_i(\lim_{n\to\infty} w_{y_1} \circ \cdots \circ w_{y_n}(p)) \\
&\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} w_i \circ w_{x_1} \circ \cdots \circ w_{x_n}(p) = \lim_{n\to\infty} w_i \circ w_{y_1} \circ \cdots \circ w_{y_n}(p) \\
&\Longrightarrow \Phi(ix) = \Phi(iy) \\
&\Longrightarrow ix \sim iy.
\end{aligned}$$

Ahora, si las contracciones son inyectivas, entonces cada una de las implicaciones anteriores es reversible. Obsérvese además que A es de Hausdorff por ser un espacio métrico. ∎

Existen espacios autosimilares simbólicos que no son atractores de SIF's, y tampoco son autosemejantes como el espacio de Sierpinski (ver ejemplo 3.8).

En el siguiente resultado se establecen condiciones suficientes para que un espacio autosimilar simbólico resulte autosemejante. Se recuerda que Σ es un espacio finito discreto y Σ^* denotará el conjunto de todas las palabras finitas sobre el alfabeto Σ.

Proposición 3.3. *Todo factor invariante es autosemejante.*

Demostración. Sea X un factor invariante, es decir $X \simeq \Sigma^{\mathbb{N}}/\sim$, donde $\Sigma^{\mathbb{N}}/\sim$ es de Hausdorff y $\forall x, y \in \Sigma^{\mathbb{N}}$, $\forall i \in \Sigma$, $x \sim y$ si y solo si $ix \sim iy$. Sean $\mathcal{O}$ un abierto no vacío de $\Sigma^{\mathbb{N}}/\sim$ y $j : \Sigma^{\mathbb{N}} \longrightarrow \Sigma^{\mathbb{N}}/\sim$ la función de cociente. Entonces $j^{-1}(\mathcal{O})$ es un abierto no vacío de $\Sigma^{\mathbb{N}}$, y por la autosemejanza de este último sabemos que existe una palabra $w \in \Sigma^*$ tal que el subespacio $[w)$ de todos los códigos que empiezan por la palabra w está contenido en $j^{-1}(\mathcal{O})$ y es homeomorfo a $\Sigma^{\mathbb{N}}$ bajo el homeomorfismo $h : \Sigma^{\mathbb{N}} \longrightarrow [w)$ definido por $h(x) =: wx$. Se tiene que $j([w)) \subseteq \mathcal{O}$, luego basta mostrar que $j([w)) \simeq \Sigma^{\mathbb{N}}/\sim$. Sea $\widetilde{h} : \Sigma^{\mathbb{N}}/\sim \longrightarrow j([w))$ definida por $\widetilde{h}([x]) =: [h(x)]$. Por las propiedades que cumple la relación $\sim$, $\widetilde{h}$ queda bien definida y resulta inyectiva. Claramente $\widetilde{h}$ es sobreyectiva y si $j_|$ denota la restricción de j a $[w)$ entonces se verifica fácilmente que $j_| h = \widetilde{h} j$, con lo cual $\widetilde{h} j$ es continua (pues $j_|$ y h lo son). Puesto que j es una función de cociente, entonces $\widetilde{h}$ es continua (**[19]**, Teorema **9.4**). Finalmente como $\Sigma^{\mathbb{N}}/\sim$ es compacto y $j([w))$ es de Hausdorff, se concluye que $\widetilde{h}$ es un homeomorfismo. ∎

Aunque el resultado que presentamos en el siguiente corolario aparece para un caso un poco más general en [5] (Teorema 3.4.), aquí lo obtenemos como consecuencia directa de las proposiciones 3.2 y 3.3, cuyas demostraciones son distintas de la que se hace en [5], y además, la demostración de la proposición 3.3 se puede generalizar fácilmente en otro sentido para otro cierto tipo de cocientes, como lo hacemos en las proposiciones 3.5 y 3.6.

Corolario 3.2. *El atractor de un SIF cuyas contracciones son inyectivas, es autosemejante.*

Demostración. Como ya se comentó es consecuencia directa de las proposiciones **3.2** y **3.3**.

El siguiente ejemplo muestra la importancia de exigir inyectividad en las contracciones del SIF.

Ejemplo 3.1. *Al considerar el SIF:* $\{\ \mathbb{R};\ w_1(x) = \frac{1}{3}x,\ w_2(x) = 1\ \}$*, su atractor es* $A = \{\ (\frac{1}{3})^n \mid n = 0, 1, \ldots\ \} \cup \{0\}$*, el cual claramente no es autosemejante según la propiedad* (*iii*) *de la Proposición* **2.1***.*

Sin embargo, los ejemplos clásicos de los llamados conjuntos de tipo fractal se pueden obtener mediante contracciones inyectivas, con lo cual también resultan ser autosemejantes en nuestro sentido topológico

Ejemplo 3.2. *En el plano complejo el atractor del SIF*

$$\left\{\ \mathbb{C};\ w_1(z) = \frac{1}{2}z, w_2(z) = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}, w_3(z) = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}i\ \right\}$$

es el llamado ***Triángulo de Sierpinski****, y claramente corresponde a un SIF con contracciones inyectivas en* $\mathbb{C}$*, por lo cual es autosemejante.*

Ejemplo 3.3. *La* ***curva de Koch*** *es el atractor del SIF*

$$\left\{\ \mathbb{C};\ w_1(z) = \frac{1}{3}z,\ w_2(z) = \frac{1}{3}ze^{i\frac{\pi}{3}} + \frac{1}{3}\ ,\right.$$
$$\left. w_3(z) = \frac{1}{3}ze^{-i\frac{\pi}{3}} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}i,\ w_4(z) = \frac{1}{3}z + \frac{2}{3}\ \right\},$$

luego es autosemejante topológicamente.

Ejemplo 3.4. *En el plano complejo el atractor del SIF*

$$\Big\{ \mathbb{C};\ w_1(z) = \frac{1}{3}z,\ w_2(z) = \frac{1}{3}z + \frac{1}{3},\ w_3(z) = \frac{1}{3}z + \frac{2}{3},$$
$$w_4(z) = \frac{1}{3}z + \frac{2}{3} + \frac{1}{3}i\ , w_5(z) = \frac{1}{3}z + \frac{2}{3} + \frac{2}{3}i,\ w_6(z) = \frac{1}{3}z + \frac{1}{3} + \frac{2}{3}i,$$
$$w_7(z) = \frac{1}{3}z + \frac{1}{3}i,\ w_8(z) = \frac{1}{3}z + \frac{2}{3}i \Big\}$$

se llama la ***carpeta de Sierpinski****, y claramente corresponde a un SIF con contracciones inyectivas en $\mathbb{C}$, por lo cual es autosemejante.*

La proposición 3.3 establece que para que un cociente del espacio de Cantor sea autosemejante, es suficiente que sea de Hausdorff y cuasiinvariante. Estas condiciones **no** son necesarias, como lo prueban los ejemplos 3.5 (espacio trivial de dos puntos) y 3.12 (abanico armónico autosemejante); el primero es autosemejante y cuasiinvariante pero no es Hausdorff, mientras que el segundo es autosemejante y de Hausdorff pero no cuasiinvariante.

En el siguiente resultado se establece una condición necesaria para que un espacio sea de cancelación,

Proposición 3.4. *Si X es un espacio de cancelación y tiene al menos dos puntos, entonces es perfecto.*

Demostración. X es homeomorfo a un cociente $\Sigma^{\mathbb{N}}/\sim$ de Cantor que satisface: $ix \sim iy$ implica $x \sim y,\ \forall x, y \in \Sigma^{\mathbb{N}}, \forall i \in \Sigma$. Supongamos que X no es perfecto. Entonces $\Sigma^{\mathbb{N}}/\sim$ tampoco es perfecto. Sean p un punto aislado de $\Sigma^{\mathbb{N}}/\sim$, $q \neq p$ y $j : \Sigma^{\mathbb{N}} \longrightarrow \Sigma^{\mathbb{N}}/\sim$ la función de cociente. Como $\{p\}$ es abierto, $j^{-1}(p)$ es un abierto no vacío de $\Sigma^{\mathbb{N}}$, luego existe una palabra $w \in \Sigma^*$ tal que $[w) \subseteq j^{-1}(p)$. Sea $x \in j^{-1}(q)$ y considérense los códigos $\overline{w}$ ($\overline{w}$ denota el código $www\ldots$) y wx, que claramente pertenecen a $[w)$ y por tanto a $j^{-1}(p)$. Entonces $\overline{w} \sim wx$, lo cual implica, por ser $\sim$ cancelativa, que $\overline{w} \sim x$; pero esto es imposible, porque implicaría a su vez que $p = q$. ∎

A continuación se presentan varios ejemplos que ilustran los conceptos planteados.

Ejemplo 3.5. *Tómese $\Sigma = \{0, 1\}$ y defínase la relación $\sim$ por*

$$x \sim y \Longleftrightarrow (x, y \in C =: \{w\overline{0} \mid w \in \Sigma^{\diamondsuit}\} \cup \{w\overline{1} \mid w \in \Sigma^{\diamondsuit}\}) \vee (x, y \notin C),$$

donde $\Sigma^{\diamondsuit} = \Sigma^* \cup \{\lambda\}$, λ la palabra sin letras. El conjunto C no es cerrado, (por ejemplo $10\overline{1},\ 1010\overline{1},\ 101010\overline{1}, \ldots$ es una sucesión de elementos de C cuyo *límite* $\overline{10}$ *no está en* C*), ni lo es tampoco su complemento* $C' = \Sigma^{\mathbb{N}} - C$ *(por ejemplo* $1\overline{01}$, $11\overline{01}$, $111\overline{01}, \ldots$ *es una sucesión de elementos de* C' *cuyo límite* $\overline{1}$ *no está en* C'*); por lo tanto, ni* C *ni* C' *son abiertos, de tal manera que el cociente obtenido* $\Sigma^{\mathbb{N}}/\sim$ *es el espacio trivial de dos puntos* $(\{a,b\},\{\emptyset,\{a,b\}\})$*. No es difícil verificar que* $\sim$ *es de congruencia y cancelativa. Claramente el espacio trivial de dos puntos es autosemejante pero no es de Hausdorff, luego este espacio es autosimilar simbólico, de cancelación y cuasiinvariante pero no invariante.*

Ejemplo 3.6. *En* $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ *defínase la relación* $\sim$ *por*

$$x \sim y \Longleftrightarrow (x = y) \vee (x, y \in \{\ w0\overline{1},\ w1\overline{0}\ \},\ w \in \Sigma^{\diamondsuit}).$$

El espacio cociente que se obtiene es un intervalo cerrado (véase **[2]***, ejemplo* **3***), digamos* $I = [0,1]$*;* $\sim$ *es cerrada, de congruencia y cancelativa, así* I *es invariantemente autosemejante.*

Ejemplo 3.7. *En* $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ *defínase la relación* $\sim$ *por*

$$x \sim y \Longleftrightarrow (x = y) \vee (x, y \in \{\ w0\overline{1},\ w1\overline{0}\ \},\ w \in \Sigma^{\diamondsuit}\ ) \vee (x, y \in \{\overline{0}, \overline{1}\}).$$

El espacio cociente que se obtiene es la circunferencia S^1*, pues al identificar los códigos* $w0\overline{1}$ *y* $w1\overline{0}$*, para cada palabra* $w \in \Sigma^{\diamondsuit}$ *se obtiene (como en el ejemplo anterior) un intervalo cerrado, y al identificar* $\overline{0}$ *con* $\overline{1}$ *se están identificando los extremos del intervalo de tal manera que en total se obtiene* S^1*.*

La relación $\sim$ *definida no es de congruencia:* $\overline{0} \sim \overline{1}$ *y* $0\overline{0} \nsim 0\overline{1}$*; pero sí es cancelativa: si* $ix \sim iy$ *entonces* $(ix = iy) \vee (ix, iy \in \{\ w0\overline{1},\ w1\overline{0}\ \},\ w \in \Sigma^*\ )$*, y en cualquiera de los dos casos, al "cancelar" la* i *se cumple* $x \sim y$*. Por otra parte, en* [1] *(respondiendo a dos preguntas formuladas por nosotros en el "Topology Atlas", sección Questions in Topology, en la dirección electrónica* `http://www.unipissing.ca/topology/q/a/a/a/08.htm`*), F. G. Arenas y M. A. Sánchez prueban que* S^1 *es un espacio autosimilar simbólico. Claramente* S^1 *es de Hausdorff y no es autosemejante; por tanto, y en virtud de la proposicón* ***3.3****,* S^1 *no es invariantemente autosemejante.*

Ejemplo 3.8. *El espacio de Sierpinski* $\mathcal{S} = (\{a,b\},\{\emptyset,\{a\},\{a,b\}\})$ *se puede obtener como un cociente de* $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ *mediante la relación:* $x \sim y \Longleftrightarrow (x = y = \overline{0}) \vee (x \neq \overline{0}\ \wedge\ y \neq \overline{0})$*. Esta relación es de congruencia (pues en cualquiera de los dos casos:* $(x = y = \overline{0}) \vee (x \neq \overline{0} \wedge y \neq \overline{0})$*, se tiene que los códigos* ix *e* iy *serán ambos iguales a* $\overline{0}$ *ó ambos distintos de* $\overline{0}$*) y no es cancelativa (pues por ejemplo* $1\overline{0} \sim 1\overline{01}$ *pero* $\overline{0} \nsim \overline{01}$*). En realidad, y como consecuencia de la proposición* **3.4***, se puede asegurar que* ***no*** *existe una relación cancelativa* *que genere el espacio de Sierpinski. En resumen, el espacio de Sierpinski es autosimilar simbólico, no es de cancelación, ni cuasiinvariante, no es de Hausdorff, ni es autosemejante.*

Ejemplo 3.9. *Una sucesión convergente (de números reales) junto con su punto límite, se puede obtener como un cociente de* $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ *mediante la relación:* $x \sim y \iff$ *existe* $k \in \mathbb{N}$ *tal que* $x_k = y_k = 0$ *y* $x_i = y_i = 1$ *para todo* $i < k$ *(es decir, dos códigos se identifican si y solo si tienen el mismo número de "unos" antes del primer cero). El cociente obtenido es de Hausdorff y no es autosemejante. No es difícil verificar que* $\sim$ *es de congruencia (luego es autosimilar simbólico) y no es cancelativa. Análogamente al ejemplo anterior, la proposición* **3.4** *garantiza que este espacio* ***no*** *es de cancelación, por tanto tampoco es invariantemente autosemejante, ni cuasiinvariante.*

Ejemplo 3.10. *Todos los ejemplos vistos hasta ahora son espacios autosimilares simbólicos; ¿es todo cociente de Cantor un espacio autosimilar simbólico? En una comunicación personal, via correo electrónico, F. G. Arenas y M. A. Sánchez amablemente nos respondieron que la respuesta a esta pregunta es* ***no****: de* **[11]***, Teorema* **1***, y su corolario se deduce fácilmente que un espacio autosimilar simbólico es conexo si y solo si es localmente conexo; por lo tanto, cualquier espacio métrico compacto, conexo y no localmente conexo, como por ejemplo la curva "seno del topólogo",*

$$S = \{\ (x, 0) \mid x \leq 0\ \} \cup \left\{\ \left(x, \operatorname{sen}\frac{1}{x}\right) \mid x > 0\ \right\},$$

es un cociente del espacio de Cantor pero no es un espacio autosimilar simbólico.

Ejemplo 3.11. $X = [0,1] \cup \{2\}$ *es también un cociente de Haussdorff de Cantor, que* ***no*** *es un espacio autosimilar simbólico, pues* X *es localmente conexo y no conexo.* X *tampoco es de cancelación, dado que no es perfecto y por la misma razón no es autosemejante. El siguiente ejemplo es otro espacio que no es autosimilar simbólico, pero sí es autosemejante.*

Ejemplo 3.12 (tomado de [5]). *Sea* $a_n = (\frac{1}{n}, 0)$ *para* $n \in \{1, 2, \ldots\}$ *y sea* $a_0 = (0, 0)$*. Sea* I_n *el segmento de recta con extremos* a_n *y* t*, donde* $t = (0, 1)$ *y* $n \in \{0, 1, \ldots\}$*. Sea* $X_1 =: \bigcup_{i=0}^{\infty} I_n$ *el llamado abanico armónico (el cono sobre una sucesión armónica). Para cada* $n \in \{1, 2, \ldots\}$ *sea* t_n *el punto medio del arco* ta_n*; se "pega" ahora un abanico armónico con cima* t_n *y con "arco límite"* $t_n a_n$*. Análogamente se pega un abanico armónico con cima* t *y el arco* tt_n *como arco límite. Se obtiene así un segundo continuo* X_2*. Para el siguiente paso se divide cada arco maximal libre (es decir que no es arco límite) de* X_2 *en dos* *partes iguales y se pegan abanicos armónicos a cada uno de ellos de la misma manera que se hizo en el paso anterior. Entonces se define* $X =: \mathrm{cl}(\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n)$ *(la clausura de la unión de los espacios obtenidos* $X_1, X_2, \ldots$*). El espacio* X *obtenido es autosemejante (llamaremos a* X *el* ***abanico armónico autosemejante****). Claramente* X *es un cociente de Hausdorff del espacio de Cantor, pero dado que es conexo y no localmente conexo, entonces no puede ser autosimilar simbólico, y por tanto tampoco puede ser invariantemente autosemejante.*

Es importante anotar que existen muchos espacios autosemejantes que no son atractores de SIF's, como por ejemplo $\mathbb{N}$ con la topología de complementos finitos ó $\mathbb{R}$ con la topología usual.

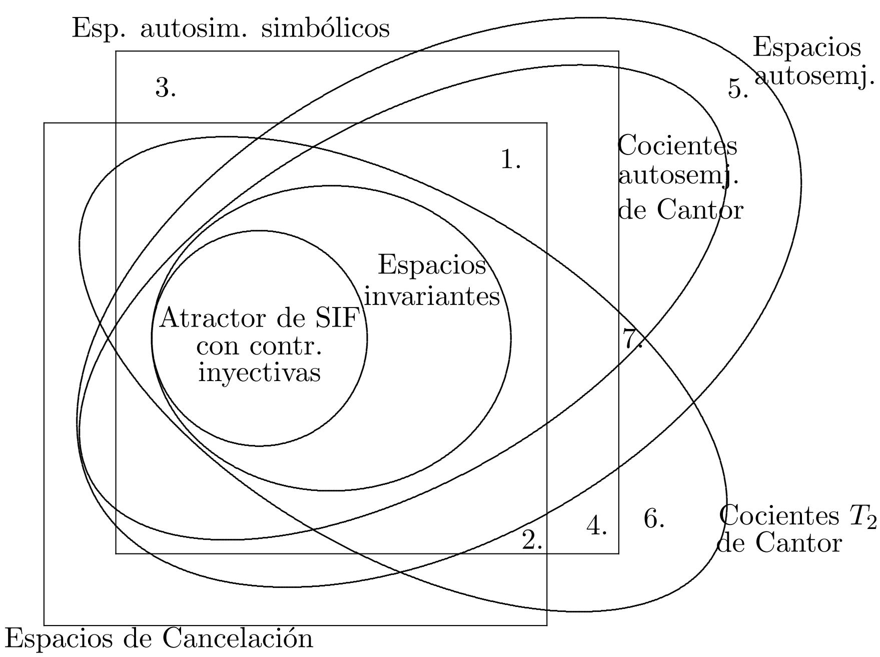

Figura 1

Teniendo como base lo anterior, se propone el diagrama de la Figura 1, el cual resume buena parte de lo expuesto hasta el momento. En esta figura se tiene:

1. Espacio trivial de dos puntos (Ejemplo 3.5).

2. S^1 (Ejemplo 3.7).

3. Espacio de Sierpinski (Ejemplo 3.8).

4. Sucesión convergente con su punto límite (Ejemplo 3.9).

5. $\mathbb{R}$ es autosemejante pero no es cociente de Cantor, porque no es compacto. Otro ejemplo lo constituye $\beta\mathbb{N} - \mathbb{N}$, que tampoco puede ser un cociente de Cantor puesto que $|\beta\mathbb{N} - \mathbb{N}| = |\beta\mathbb{N}| = 2^c$, el cual es estrictamente mayor que c, el cardinal del espacio de Cantor.

6. $X = [0,1] \cup \{2\}$ (Ejemplo 3.11).

7. Abanico armónico autosemejante (Ejemplo 3.12).

La proposición 3.3 se puede generalizar como sigue:

Proposición 3.5. *Sea X un espacio topológico y $X/\sim$ un cociente de X tal que:*

(i) *$X/\sim$ es compacto de Hausdorff;*

(ii) *Para todo O abierto no vacío de X existen $X' \subseteq O$ y $f : X \longrightarrow X'$ continua y sobre tal que: $x \sim y \Longleftrightarrow f(x) \sim f(y)$, $\forall x, y \in X$; entonces $X/\sim$ es autosemejante.*

Demostración. Si $\mathcal{O}$ es un abierto no vacío de $X/\sim$ y $j : X \longrightarrow X/\sim$ es la función de cociente, entonces $j^{-1}(\mathcal{O})$ es un abierto no vacío de X. Sean $X' \subseteq j^{-1}(\mathcal{O})$ y $f : X \longrightarrow X'$ con las características descritas en (ii). Se puede demostrar, análogamente a como se hizo para la proposición **3.3**, que la función $\widetilde{f} : X/\sim \longrightarrow j(X')$ definida por $\widetilde{f}([x]) =: [f(x)]$ es un homeomorfismo. ∎

Ejemplo 3.13. *En $\mathbb{R}^2$ tómese $X =: \{(x, y) \mid 0 < x,\ y < 1\} \cup \{(0,0), (1,1)\}$ e identifíquense los puntos que están sobre la misma vertical, es decir: $(x, y) \sim (x', y') \Longleftrightarrow x = x'$. Entonces se satisfacen las condiciones (i) y (ii). El cociente $X/\sim$ que se obtiene es un intervalo cerrado.*

Para finalizar esta sección veamos otro ejemplo de la proposición 3.5, pero que a su vez constituye una generalización de la proposición 3.3.

Proposición 3.6. *Sea X compacto de Hausdorff y $\sim$ una relación de equivalencia en el espacio producto $X^{\mathbb{N}}$, cerrada y que además satisface $\forall x, y \in X^{\mathbb{N}}$, $\forall i \in X$, $x \sim y$ si y solo si $ix \sim iy$. Entonces el cociente $X^{\mathbb{N}}/\sim$ es autosemejante.*

Demostración. Como X es compacto de Hausdorff entonces $X^{\mathbb{N}}$ es compacto de Hausdorff y $X^{\mathbb{N}}/\sim$ es compacto. Como $\sim$ es cerrada en $X^{\mathbb{N}}$, entonces $X^{\mathbb{N}}/\sim$ es Hausdorff. Sea $O = O_{n_1} \times \cdots \times O_{n_k} \times X^{\mathbb{N}}$ abierto (básico) no vacío de $X^{\mathbb{N}}$, (cada O_{n_i} es un abierto de X). Sean $a = a_1 a_2 \cdots \in O$ y $X' = \{a_{n_1}\} \times \cdots \times \{a_{n_k}\} \times X^{\mathbb{N}}$. Claramente $X' \subseteq O$ y la función $f : X^{\mathbb{N}} \longrightarrow X'$ definida por $f(x) =: a_{n_1} \cdots a_{n_k} x_1 x_2 \cdots$ (donde $x = x_1 x_2 \cdots$) es continua y sobre. Además para cualesquier $x, y \in X^{\mathbb{N}}$ se tiene que

$$\begin{aligned} x \sim y &\Longleftrightarrow a_{n_1} \cdots a_{n_k} x \sim a_{n_1} \cdots a_{n_k} y \\ &\Longleftrightarrow f(x) \sim f(y). \end{aligned}$$

Basta entonces aplicar la proposición **3.3**.

Observación 3.2. *Nótese que los cocientes descritos en la proposición anterior, constituyen una ampliación de la familia de los espacios invariantemente autosemejantes.*

Referencias

[1] F.G.Arenas y M.A. Sánchez, "S^1 is a self–similar symbolic space", *Topology Atlas Preprint*, No. 283, *URL*: `http://at.yorku.ca /p/a/a/m/06.htm`.

[2] C. Bandt and K. Keller, "Self–Similar Sets 2. A Simple Approach to the Topological Structure of Fractals", *Math. Nachr.*, **154** (1991), 27–39.

[3] M. Barnsley, *Fractals Everywhere*, Academic Press, Inc., San Diego, 1988.

[4] M. Barnsley y S. Demko, "Iterated function systems and the global construction of fractals", *Proc. Roy. Soc. London*, Ser. **A 399** (1985), 243–275.

[5] W. J. Charatonik y A. Dilks, "On self–homeomorphic spaces", *Topol. and its Appl.*, **55** (1994), 215–238.

[6] K. J. Falconer, *The Geometry of Fractal Sets*, Cambridge University Press, Cambridge, Gran Bretaña, 1985.

[7] M. García, J. Margalef, C. Olano de L. y E. Outerelo, *Topología* $*$, Editorial Alhambra, S. A., 1975.

[8] M. Hata, "On the Structure of Self–Similar Sets", *Japan J. Appl. Math.*, **2** (1985), 381–414.

[9] J. E. Hutchinson, “Fractals and Self–similarity”, *Indiana Univ. Math. J.*, **30** (1981), 713–747.

[10] R. F. Isaacs, “Las Palabras en el espacio de Cantor”, *Memorias del Primer Congreso Nacional de Neurocomputación*, Santa fé de Bogotá, Junio de 1995, 65–79.

[11] A. Kameyama, “Self–similar Sets from the Topological Point of View”, *Japan J. Indust. Appl. Math.*, **10** (1993), 85–95.

[12] A. Kameyama, “Julia sets and self–similar sets”, *Topology and its Applications*, **54** (1993), 241–251.

[13] N. Levine, “Semi–open sets and semi–continuity in Topological Spaces”, *Amer. Math. Month.*, **70** (1963), 36–41.

[14] G. B. Lewellen, “Self–Similarity”, *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, **23** (1993), 1023–1040.

[15] B. Mandelbrot, *Los Objetos Fractales. Forma, hazar y dimensión*, Tusquets Editores, S.A., Barcelona, España, 1993.

[16] G. Sarton, *Historia de la Ciencia (La ciencia antigua durante la edad de oro griega)*, Editorial Universitaria de Buenos Aires, Buenos Aires, 1965.

[17] F. Takeo, “Self–Similar Sets and Quotient Sets of Infinite Sequences”, *National Science Report*, Ochanomizu University **43**, **No. 2** (1992), 61–74.

[18] R. C. Walker, *The Stone–Čech compactification*, Addison–Wesley Publishing Company, 1970

[19] S. Willard, *General Topology*, Addison–Wesley Publishing Company, 1970.