

Torneos y estructuras parabólicas sobre variedades bandera maximales*

MARLIO PAREDES G.[†]

Resumen

Usando la equivalencia entre estructuras cuasicomplejas sobre variedades bandera maximales y torneos, encontramos una condición necesaria para que una estructura cuasicompleja sea parabólica.

2000 Mathematics Subject Classification. Primary 53C15; Secondary 14M15, 05C20.

1 Introducción

Si queremos estudiar la geometría de las variedades bandera maximales $F(n) = \frac{U(n)}{U(1) \times \dots \times U(1)}$, es natural comenzar estudiando sus estructuras cuasicomplejas. Borel y Hirzebruch [BH] probaron que existen $2^{\binom{n}{2}}$ estructuras cuasicomplejas $U(n)$ -invariantes sobre $F(n)$, y este también es el número de torneos con n vértices. Un torneo es un grafo dirigido en el cual cualquier par de vértices está unido por exactamente un arco orientado (ver [M] o [BS]). Existe una identificación natural entre torneos con n vértices y estructuras cuasicomplejas sobre $F(n)$, la cual usaremos fuertemente aquí (ver [MN] o [BS]).

Los torneos pueden ser clasificados en clases de isomorfismos. En dicha clasificación una de las clases corresponde a las estructuras integrables, y las otras corresponden a estructuras no integrables. Entre las no integrables una de ellas corresponde a las llamadas estructuras parabólicas. En este artículo probamos

*Este trabajo fue financiado parcialmente por CAPES–Brasil y COLCIENCIAS–Colombia.

[†]Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander, A.A. 678, Bucaramanga, Santander, COLOMBIA. (*E-Mail*: mparedes@uis.edu.co)

que si una estructura cuasicompleja J sobre $F(n)$ es parabólica, entonces el vector resultado del torneo asociado $\mathcal{T}(J)$ tiene la forma

$$\begin{cases} (n-k, \dots, n-k), & \text{si } n = 2k-1, \\ (n-(k+1), \dots, n-(k+1), n-k, \dots, n-k), & \text{si } n = 2k. \end{cases}$$

Además probamos que $\mathcal{T}(J)$ siempre contiene como subtorneos torneos correspondientes a estructuras parabólicas en dimensiones más bajas.

Este trabajo contiene resultados obtenidos durante el desarrollo de la tesis de doctorado del autor [P]. Quiero agradecer a mi orientador de doctorado, profesor Caio José C. Negreiros, por su acertada orientación.

2 Torneos y estructuras cuasicomplejas

Una variedad bandera maximal compleja está definida por

$$F(n) = \{(L_1, \dots, L_n) : L_i \text{ es subespacio de } \mathbb{C}^n, \dim_{\mathbb{C}} L_i = 1, L_i \perp L_j\}. \quad (2.1)$$

Podemos definir naturalmente una acción del grupo unitario

$$U(n) = \{A \in \text{Mat}(n, \mathbb{C}) : A\bar{A}^t = I\} \quad (2.2)$$

sobre $F(n)$ así:

$$\begin{aligned} U(n) \times F(n) &: \longrightarrow F(n) \\ (A, (L_1, \dots, L_n)) &\longmapsto (AL_1, \dots, AL_n). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Calculamos el grupo de isotropía de esta acción y obtenemos el toro $T = \underbrace{U(1) \times \dots \times U(1)}_{n\text{-veces}}$, lo cual nos da la descripción algebraica

$$F(n) = \frac{U(n)}{T}. \quad (2.4)$$

En todo este trabajo llamaremos a $F(n)$ simplemente variedad bandera, y tomaremos $n \geq 3$.

Sea $\mathfrak{p} = T_{(T)}F(n)$ el espacio tangente a $F(n)$ en el punto (T) . Sabemos que el álgebra de Lie $\mathfrak{u}(n)$, del grupo de Lie $U(n)$, es tal que (ver [ChE])

$$\begin{aligned} \mathfrak{u}(n) &= \{X \in \text{Mat}(n, \mathbb{C}) : X + \bar{X}^t = 0\} \\ &= \mathfrak{p} \oplus \underbrace{\mathfrak{u}(1) \oplus \dots \oplus \mathfrak{u}(1)}_{n\text{-veces}}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Definición 2.1. Una estructura cuasicompleja sobre $F(n)$ es una transformación lineal $J: \mathfrak{p} \rightarrow \mathfrak{p}$ tal que $J^2 = -I$.

Ejemplo 2.1. Consideremos la variedad

$$F(3) = \frac{U(3)}{U(1) \times U(1) \times U(1)} = \frac{U(3)}{T}.$$

En este caso,

$$\mathfrak{p} = T(F(3))_{(T)} = \left\{ \left(\begin{array}{ccc} 0 & a & b \\ -\bar{a} & 0 & c \\ -\bar{b} & -\bar{c} & 0 \end{array} \right) : a, b, c, \in \mathbb{C} \right\}.$$

La aplicación $J: \mathfrak{p} \rightarrow \mathfrak{p}$ dada por

$$\left(\begin{array}{ccc} 0 & a & b \\ -\bar{a} & 0 & c \\ -\bar{b} & -\bar{c} & 0 \end{array} \right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc} 0 & (-\sqrt{-1})a & (-\sqrt{-1})b \\ (-\sqrt{-1})\bar{a} & 0 & (\sqrt{-1})c \\ (-\sqrt{-1})\bar{b} & (\sqrt{-1})\bar{c} & 0 \end{array} \right)$$

es una estructura cuasicompleja sobre $F(3)$.

Como ya mencionamos en la introducción, Borel y Hirzebruch probaron que sobre $F(n)$ existen $2^{\binom{n}{2}}$ estructuras cuasicomplejas, y este es el mismo número de torneos con n jugadores. Veamos ahora qué es un torneo y qué relación existe entre torneos y estructuras cuasicomplejas.

Definición 2.2. Un torneo o n -torneo \mathcal{T} consiste de un conjunto finito p_1, p_2, \dots, p_n de vértices o jugadores distintos tal que cada par de vértices está unido por exactamente un arco $p_i \rightarrow p_j$ ó $p_j \rightarrow p_i$. En otras palabras un torneo es un grafo dirigido. Si $p_i \rightarrow p_j$, entonces decimos que p_i le gana a p_j .

Definición 2.3. Sea \mathcal{T}_1 un torneo con n jugadores $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ y \mathcal{T}_2 un torneo con m jugadores $\{1, 2, 3, \dots, m\}$. Un homomorfismo entre \mathcal{T}_1 y \mathcal{T}_2 es una aplicación $\phi: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, m\}$ tal que

$$s \xrightarrow{\mathcal{T}_1} t \implies \phi(s) \xrightarrow{\mathcal{T}_2} \phi(t) \text{ ó } \phi(s) = \phi(t).$$

Cuando ϕ es biyectiva se dice que \mathcal{T}_1 y \mathcal{T}_2 son isomorfos.

Cada torneo determina una n -upla (s_1, s_2, \dots, s_n) cuyas entradas son el número de juegos que gana cada jugador. Tales entradas las podemos ordenar de forma

Figure 2.1: Clases de isomorfismos de torneos para $n = 2, 3, 4$.

tal que $0 \leq s_1 \leq \dots \leq s_n$, y además tenemos que $\sum_{i=1}^n s_i = \binom{n}{2}$. Esta n -upla es llamada vector resultado o vector marcador del torneo (en inglés *score vector*). Claramente torneos isomorfos tienen el mismo vector resultado; lo contrario no es cierto, pues existen 5-torneos que tienen el mismo vector resultado y no son isomorfos (ver Figura 2.2). El conjunto de n -torneos puede ser particionado en clases de isomorfismos; las Figuras 2.1 y 2.2 contienen las clases de isomorfismos de n -torneos para $n = 2, 3, 4, 5$.

El torneo con n jugadores $\{1, 2, \dots, n\}$ definido por

$$i \rightarrow j \quad \iff \quad i < j$$

es llamado el torneo canónico, y su vector marcador es $(0, 1, 2, \dots, n-1)$.

Dada una estructura cuasicompleja invariante J sobre $F(n)$, podemos hacerle corresponder naturalmente un torneo $\mathcal{T}(J)$ con n jugadores $\{1, 2, \dots, n\}$ de la siguiente manera: si $J(a_{ij}) = (a'_{ij})$ entonces $\mathcal{T}(J)$ es tal que para $i < j$

$$i \rightarrow j \quad \iff \quad a'_{ij} = \sqrt{-1} a_{ij}$$

ó

$$i \leftarrow j \quad \iff \quad a'_{ij} = -\sqrt{-1} a_{ij}.$$

(ver [MN]).

Ejemplo 2.2. Consideremos la estructura cuasicompleja definida en el ejemplo anterior, y veamos cuál es el torneo asociado a ella. Como la entrada 12

Figure 2.2: Clases de isomorfismos de 5-torneos.

Figure 2.3: Torneo del Ejemplo 2.2.

de la matriz fue multiplicada por $-\sqrt{-1}$, entonces el torneo asociado (Figura 2.3) tiene una flecha de 2 hacia 1; lo mismo sucede con la entrada 13, y por eso el torneo tiene una flecha de 3 hacia 1. La entrada 23 fue multiplicada por $\sqrt{-1}$, entonces el torneo tiene una flecha de 2 hacia 3.

Definición 2.4. Se dice que una estructura cuasicompleja J sobre $F(n)$ es integrable si la variedad $(F(n), J)$ es una variedad compleja, esto es, admite sistemas de coordenadas locales complejas con cambios holomorfos de coordenadas. Una condición equivalente es la famosa ecuación de Newlander–Nirenberg [NN]

$$[JX, JY] = J[X, JY] + J[JX, Y] + [X, Y],$$

para cualesquiera X, Y campos vectoriales sobre $F(n)$.

El siguiente bonito resultado es debido a Burstall y Salamon [BS]

Teorema 2.1. Una estructura cuasicompleja J sobre $F(n)$ es integrable si y solamente si el torneo asociado $\mathcal{T}(J)$ es isomorfo al torneo canónico.

Un resultado bien conocido en la teoría de torneos dice que un torneo es isomorfo al torneo canónico si y solo si no contiene 3–ciclos (ver Moon [M]). Por tanto, si $\mathcal{T}(J)$ contiene un 3–ciclo entonces J no es integrable, y viceversa. Por ejemplo, la estructura cuasicompleja del Ejemplo 2.1 es integrable.

3 Estructuras cuasicomplejas parabólicas

En este trabajo estamos particularmente interesados en la clase de las estructuras cuasicomplejas parabólicas. Una característica importante de las estructuras parabólicas que probamos aquí es que ellas son no integrables.

Definición 3.1. Se dice que una estructura cuasicompleja invariante J sobre $F(n)$ es parabólica si existe una permutación $\tau \in \Sigma_n$ tal que el torneo asociado $\mathcal{T}(J)$ es, para $i < j$, dado por

$$\begin{cases} \tau(j) \rightarrow \tau(i), & \text{si } j - i \text{ es par,} \\ \tau(i) \rightarrow \tau(j), & \text{si } j - i \text{ es impar.} \end{cases} \quad (3.1)$$

Los torneos en la Figura 3.1 representan las clases de estructuras parabólicas sobre $F(3)$, $F(4)$, $F(5)$ y $F(6)$ respectivamente.

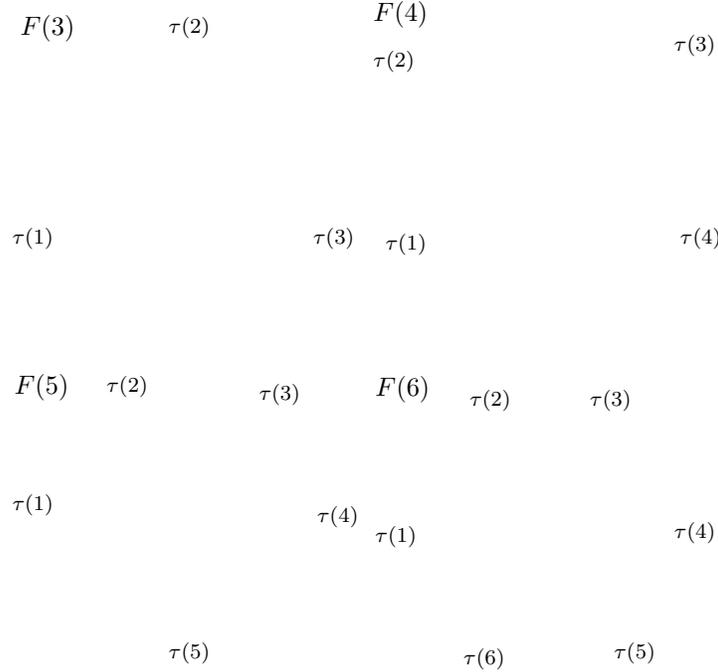


Figure 3.1: Clases de torneos parabólicos y vector resultado correspondiente

Teorema 3.1. *Si J es una estructura cuasicompleja parabólica sobre $F(n)$, $n \geq 4$, entonces $\mathcal{T}(J)$ contiene, como subtorneos, k -torneos correspondientes a estructuras parabólicas sobre $F(k)$, para $k = 3, 4, \dots, n - 1$.*

Demostración. Hacemos inducción sobre n comenzando en $n = 4$. Claramente el 4-torneo parabólico contiene un 3-torneo parabólico, ya que este es un 3-ciclo.

Supongamos que la afirmación es verdadera para n y probemos que también lo es para $n + 1$. Como por hipótesis de inducción el n -torneo parabólico contiene k -subtorneos parabólicos para $k = 3, 4, \dots, n - 1$, solo necesitamos probar que el $(n + 1)$ -torneo parabólico contiene un n -torneo parabólico.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que hemos enumerado los vértices del $(n + 1)$ -torneo parabólico con los números $1, 2, \dots, n + 1$ de tal forma que cada subtorneo con vértices $1, 2, \dots, k$, el cual denotaremos por $(1, 2, \dots, k)$, sea parabólico para $k = 1, 2, \dots, n - 1$. Probemos entonces que el subtorneo

$(1, 2, \dots, n)$ es parabólico.

Supongamos que $(1, 2, \dots, n)$ no es parabólico; entonces puede suceder una de las siguientes posibilidades: que $i \rightarrow n$ y $n-i$ sea par, para algún $i = 1, 2, \dots, n-1$; pero esto no es posible, pues en el $(n+1)$ -torneo parabólico $n \rightarrow i$. O que $n \rightarrow i$ y $n-i$ sea impar para algún $i = 1, 2, \dots, n-1$; pero esto no es posible porque en el $(n+1)$ -torneo parabólico $i \rightarrow n$. ■

Este teorema implica que el torneo $\mathcal{T}(\mathcal{J})$ correspondiente a una estructura parabólica siempre contiene un 3-ciclo. Entonces tenemos el siguiente resultado:

Corolario 3.1. *Todas las estructuras cuasicomplejas parabólicas sobre $F(n)$ son no integrables.*

Ahora probamos el resultado principal de este trabajo

Teorema 3.2. *Si J es una estructura cuasicompleja parabólica sobre $F(n)$, entonces el vector resultado del torneo asociado $\mathcal{T}(J)$ tiene la forma*

$$\begin{cases} (n-k, \dots, n-k), & \text{si } n = 2k-1, \\ (n-(k+1), \dots, n-(k+1), n-k, \dots, n-k), & \text{si } n = 2k. \end{cases}$$

Demostración. Para facilitar los cálculos, tengamos en cuenta el orden de los vértices del torneo. Así, el vector resultado toma la forma

$$\begin{cases} (n-k, \dots, n-k), & \text{si } n = 2k-1, \\ (n-k, n-(k+1), \dots, n-k, n-(k+1)), & \text{si } n = 2k. \end{cases}$$

Como en el teorema anterior, usamos inducción para hacer la demostración.

- (i) Por la Figura 3.1 el resultado es verdadero para $n = 3, 4, 5$.
- (ii) Supongamos que la afirmación es verdadera para n , y probemos que también lo es para $n+1$. Si $n = 2k-1$ entonces el vector resultado de $\mathcal{T}(J)$ es

$$(n-k, \dots, n-k).$$

Como $n+1 = 2k$, entonces por la definición de estructura parabólica

(definición 3.1) tenemos que

$$\begin{aligned}
(n+1) - n = 1 &\implies \tau(n) \rightarrow \tau(n+1), \\
(n+1) - (n-1) = 2 &\implies \tau(n+1) \rightarrow \tau(n-1), \\
&\vdots \\
(n+1) - 2 = n-1 = 2k-2 &\implies \tau(n+1) \rightarrow \tau(2), \\
(n+1) - 1 = n = 2k-1 &\implies \tau(1) \rightarrow \tau(n+1).
\end{aligned}$$

De donde se sigue que $\tau(n+1)$ gana $k-1 = n-k$ juegos y pierde k juegos. También tenemos que $\tau(n+1)$ pierde con $\tau(i)$ si i es impar, y le gana a $\tau(i)$ si i es par. Así, el vector resultado para $n+1$ es

$$\begin{aligned}
(n-k+1, n-k, \dots, n-k+1, n-k) &= \\
&= ((n+1)-k, (n+1)-(k+1), \dots, (n+1)-k, (n+1)-(k+1));
\end{aligned}$$

en otras palabras, la afirmación es verdadera para $n+1$.

Ahora, si $n = 2k$ entonces el vector resultado de $\mathcal{T}(J)$ es

$$(n-k, n-(k+1), \dots, n-k, n-(k+1)).$$

Argumentamos de forma similar al caso anterior. Como $n+1 = 2k+1 = 2(k+1)-1$, entonces por la definición de estructura parabólica tenemos

$$\begin{aligned}
(n+1) - n = 1 &\implies \tau(n) \rightarrow \tau(n+1), \\
(n+1) - (n-1) = 2 &\implies \tau(n+1) \rightarrow \tau(n-1), \\
&\vdots \\
(n+1) - 2 = n-1 = 2k-1 &\implies \tau(2) \rightarrow \tau(n+1), \\
(n+1) - 1 = n = 2k &\implies \tau(n+1) \rightarrow \tau(1).
\end{aligned}$$

En este caso tenemos que $\tau(n+1)$ gana $k = n-k$ juegos y pierde k juegos. También se tiene que $\tau(n+1)$ pierde con $\tau(i)$ si i es par y le gana si i es impar. Así el vector resultado para $n+1$ es

$$(n-k, n-(k+1)+1, \dots, n-k, n-(k+1)+1, n-k) = (n-k, \dots, n-k).$$

■

La recíproca del teorema anterior es falsa porque, por ejemplo para $n = 6$, existen torneos distintos del parabólico que tienen el mismo vector resultado.

Referencias

- [BH] A. BOREL & F. HIRZEBRUCH, “Characteristic Classes and Homogeneous Spaces I”, *Amer. J. Math.* **80** (1958), 458–538.
- [BS] F. E. BURSTALL & S. SALAMON, “Tournaments, Flags and Harmonic Maps”, *Math. Ann.* **277** (1987), 249–265.
- [ChE] J. CHEEGER & D. G. EBIN, *Comparison Theorems in Riemannian Geometry*, North-Holland, Amsterdam, 1975.
- [M] J. W. MOON, *Topics on Tournaments*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1968.
- [MN] X. MO & C. J. C. NEGREIROS, “Tournaments and Geometry of Full Flag Manifolds”, *Proceedings of the XI Brazilian Topology Meeting*, Rio Claro, Brazil, World Scientific (1999).
- [NN] A. NEULANDER & L. NIRENBERG, “Complex Analytic Coordinates in Almost Complex Manifolds”, *Ann. of Math.* **65** (1957), 391–404.
- [P] M. PAREDES, *Aspectos da Geometria Complexa das Variedades Bandeira*, Tesis de Doctorado, Universidade Estadual de Campinas, Brasil, 2000.