Revista INTEGRACIÓN
Universidad Industrial de Santander
Escuela de Matemáticas
Vol. 18, No 1, p. 19–31, enero–junio de 2000

Camadas finas e discos em relatividade geral

Guillermo A. González*

Resumen

Apresentamos um método para a obtenção de modelos relativísticos de discos finitos com suporte de esforço na direção radial, tanto estáticos como estacionários. Tais modelos são construídos a partir de soluções axialmente simétricas às equações de Einstein no vazio, refletindo-as através do plano do disco.

1 Introdução

Soluções axialmente simétricas às equações de Einstein correspondentes a configurações discoidais de matéria têm sido extensamente estudadas ao longo dos anos. Tais soluções podem ser estáticas ou estacionárias e podem levar a modelos de discos com ou sem suporte de esforço radial. Soluções para discos estáticos sem suporte de esforço na direção radial foram estudadas inicialmente por Bonnor e Sackfield [1] e por Morgan e Morgan [2]. Soluções com suporte de pressão na direção radial foram estudadas inicialmente por Morgan e Morgan [3] e, em relação com o problema do colapso gravitacional, por Chamorro, Gregory e Stewart [4]. Soluções para discos estáticos auto-similares foram analizadas por Lemos [5] e a superposição de discos estáticos com buracos negros foi considerada por Lemos e Letelier [6 - 8]. Bičák, Lynden-Bell e Katz [9] estudaram discos estáticos como fontes para soluções conhecidas das equações de Einstein no vazio e Bičák, Lynden-Bell e Pichon [10] encontraram um número infinito de novas soluções estáticas.

*Escuela de Física, Universidad Industrial de Santander, A.A. 678, Bucaramanga, Colombia, Email: guillego@uis.edu.co

Os modelos relativísticos de discos possuem um papel importante na astrofísica, pois podem servir para modelar galaxias ou discos de acresção [9 - 13]. Embora os campos gravitacionais de discos galácticos possam ser modelados através da teoria Newtoniana do potencial [14, 15], existem situações nas quais a gravidade é suficientemente forte, exigindo assim o uso da teoria da Relatividade Geral. Uma situação típica na qual a teoria de Einstein pode contribuir apresenta-se quando se consideram discos de acresção ao redor dos buracos negros centrais presentes em quasares [6 - 8]. Discos podem ser usados também para modelar estruturas laminares, e assim o seu estudo pode contribuir à compreensão das inhomogeneidades de grande escala presentes no universo [16-19].

A construção de modelos de discos finos em relatividade geral pode ser feita partindo de soluções axialmente simétricas das equações de Einstein no vazio e introduzindo uma descontinuidade finita nas primeiras derivadas do tensor métrico através do plano $z = 0$. Tal descontinuidade pode ser obtida, por exemplo, refletindo a solução através do plano. A descontinuidade nas primeiras derivadas do tensor métrico pode-se representar por uma função de Heaviside de modo que, como conseqüência do fato de que o tensor de curvatura é linear nas segundas derivadas do tensor métrico e quadrático nas primeiras derivadas, o tensor de curvatura conterá termos proporcionais a funções delta de Dirac com suporte no plano $z = 0$.

O plano geral do trabalho é o seguinte. O formalismo de Lichnerowicz necéssario para o tratamento de campos tensoriais como distribuições é brevemente resumido na seção 2, seguindo a apresentação de Taub [20]. Na seção 3 tal formalismo é utilizado para a formulação das equações de Einstein no caso em que existe uma camada fina de matéria no espaço-tempo M, de tal forma que as primeiras derivadas do tensor métrico possuem uma descontinuidade finita através de uma hipersuperfície Σ. Restringindo o formalismo anterior ao caso de um disco fino axialmente simétrico, na seção 4 é obtida a expressão geral para o tensor de energia-momento superficial do disco. Finalmente, na seção 5 o conteúdo físico do tensor de energia-momento do disco é analisado levando-o à forma canônica a fim de encontrar a densidade de energia e os esforços principais sobre o disco.

2 Campos tensoriais como distribuições

Se T, U são dois campos tensoriais definidos sobre o espaço-tempo M, denotaremos como (T, U) seu produto escalar no ponto $x \in M$. Seja $\mathcal{D}(M)$ o espaço de campos tensoriais com suporte compacto e uma classe de diferenciabilidade determinada. Uma distribuição tensorial T é um funcional linear sobre $\mathcal{D}(M)$ definido como [20]

$$< T, U > = \int_M (T, U)\ \sqrt{-g}\ d^4x, \tag{2.1}$$

onde $U \in \mathcal{D}(M)$ e T é um campo tensorial localmente somável.

Seja Σ uma hipersuperfície em M descrita pela equação

$$\phi(x^a) = 0, \tag{2.2}$$

onde ϕ é uma função suave das coordenadas x^a, e pelo vetor normal

$$n_a \ = \ \phi_{,a}\,, \tag{2.3}$$

onde $(\ )_{,a} = \partial/\partial x^a$. A hipersuperfície Σ divide o espaço-tempo M em duas partes $M^+ = \{x^a : \phi > 0\}$ e $M^- = \{x^a : \phi < 0\}$, de tal forma que pode-se introduzir a função θ de Heaviside, definida como

$$\theta(\phi) = \begin{cases} 1, & \phi > 0\,, \\ \frac{1}{2}, & \phi = 0\,, \\ 0, & \phi < 0\,, \end{cases} \tag{2.4}$$

e tal que

$$\theta_{,a} \ = \ n_a \delta(\phi), \tag{2.5}$$

onde $\delta(\phi)$ é a função delta de Dirac com suporte sobre a hipersuperfície Σ. Assim, para toda função F com suporte compacto,

$$\int_M F\delta(\phi)\sqrt{-g}\ d^4x = \int_\Sigma F dV, \tag{2.6}$$

onde dV é o elemento de volume invariante induzido sobre a hipersuperfície Σ.

Da definição de θ segue que, para todo campo tensorial $U(x)$ definido sobre M [21, 22],

$$\begin{aligned} < \theta(1-\theta), U(x) > \ &= \ \int_M U(x)\theta(1-\theta)\sqrt{-g}\ d^4x \\ &= \ \int_{M^+} U(x)(1-\theta)\sqrt{-g}\ d^4x \\ &= \ 0, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
< \theta^2, U(x) > &= \int_M U(x)\theta^2\sqrt{-g}\ d^4x \\
&= \int_{M+} U(x)\theta\sqrt{-g}\ d^4x \\
&= \int_{M+} U(x)\sqrt{-g}\ d^4x, \\
< (1-\theta)^2, U(x) > &= \int_M U(x)(1-\theta)^2\sqrt{-g}\ d^4x \\
&= \int_{M-} U(x)(1-\theta)\sqrt{-g}\ d^4x \\
&= \int_{M-} U(x)\sqrt{-g}\ d^4x, \\
< \theta\delta(\phi), U(x) > &= \int_M U(x)\theta\delta(\phi)\sqrt{-g}\ d^4x \\
&= U(x)\theta|_\Sigma \\
&= \tfrac{1}{2}U(x)|_\Sigma, \\
< (1-\theta)\delta(\phi), U(x) > &= \int_M U(x)(1-\theta)\delta(\phi)\sqrt{-g}\ d^4x \\
&= U(x)(1-\theta)|_\Sigma \\
&= \tfrac{1}{2}U(x)|_\Sigma,
\end{aligned}
$$

o que prova as identidades

$$
\begin{aligned}
\theta(1-\theta) &= 0, \\
\theta^2 &= \theta, \\
(1-\theta)^2 &= (1-\theta), \\
(1-\theta)\ \delta(\phi) &= \theta\ \delta(\phi)\ =\ \tfrac{1}{2}\delta(\phi),
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

no sentido de distribuições.

Se T é um campo tensorial definido em M tal que T e suas derivadas possuem descontinuidades finitas através de Σ, podem ser definidas distribuições em termos de T na forma

$$(T)^D \;=\; T^+\theta \;+\; T^-(1-\theta), \tag{2.8}$$

$$(T_{,a})^D \;=\; T_{,a}^+\,\theta \;+\; T_{,a}^-\,(1-\theta), \tag{2.9}$$

onde os índices $\pm$ sobre o campo tensorial o restringem às regiões $M^{\pm}$, respectivamente. Assim, $T = T^+$ em M^+, $T = T^-$ em M^- e $T = T_{\Sigma} = \frac{1}{2}(T^+ + T^-)$ em Σ. Usando as identidades (2.7) pode-se provar facilmente que

$$(T)^D{}_{,a} \;=\; (T_{,a})^D \;+\; [T]\; n_a\delta(\phi), \tag{2.10}$$

$$(TU)^D \;=\; (T)^D(U)^D, \tag{2.11}$$

$$[TU] \;=\; U_{\Sigma}[T] \;+\; [U]T_{\Sigma}, \tag{2.12}$$

onde $[T]$ é o salto de T através de Σ, definido como

$$[T] \;=\; T^+|_{\Sigma} \;-\; T^-|_{\Sigma}, \tag{2.13}$$

o qual mede a descontinuidade de T através de Σ.

3 Equações de Einstein para camadas finas

Vamos formular as equações de Einstein para o caso em que existe uma camada fina de matéria no espaço-tempo M, de tal forma que as primeiras derivadas do tensor métrico possuem uma descontinuidade finita através de uma hipersuperfície Σ. O tensor métrico g_{ab} é suposto contínuo através de Σ, ou seja

$$[g_{ab}] \;=\; g_{ab}^+|_{\Sigma} \;-\; g_{ab}^-|_{\Sigma} \;=\; 0, \tag{3.1}$$

de modo que, na vizinhança de Σ, pode-se escrever

$$g_{ab}^{\pm} \;=\; g_{ab}^0 \;+\; \phi g_{ab}^{\prime\pm} \;+\; \frac{1}{2}\phi^2 g_{ab}^{\prime\prime\pm} \;+\; ..., \tag{3.2}$$

onde a linha denota a derivada parcial a respeito de ϕ.

Usando a continuidade de g_{ab}, pode-se escrever

$$g_{ab} = (g_{ab})^D, \tag{3.3}$$

$$g_{ab,c} = (g_{ab,c})^D, \tag{3.4}$$

$$\Gamma^a_{bc} = (\Gamma^a_{bc})^D, \tag{3.5}$$

$$\Gamma^a_{bc,d} = (\Gamma^a_{bc,d})^D + [\Gamma^a_{bc}]\ n_d\ \delta(\phi), \tag{3.6}$$

onde

$$\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2} g^{ae}(g_{eb,c} + g_{ce,b} - g_{bc,e}), \tag{3.7}$$

são os símbolos de Christoffel.

Usando os resultados anteriores na definição do tensor de curvatura de Riemann,

$$R^a_{bcd} = \Gamma^a_{bd,c} - \Gamma^a_{bc,d} + \Gamma^e_{bd}\Gamma^a_{ec} - \Gamma^e_{bc}\Gamma^a_{ed}, \tag{3.8}$$

e supondo que o tensor métrico g_{ab} é, no mínimo, C^3 nas regiões $M^{\pm}$, obtém-se para o tensor de Riemann a expressão [19]

$$R^a_{bcd} = (R^a_{bcd})^D + H^a_{bcd}\ \delta(\phi), \tag{3.9}$$

onde

$$H^a_{bcd} = [\Gamma^a_{bd}]\ n_c - [\Gamma^a_{bc}]\ n_d, \tag{3.10}$$

e os $(R^a_{bcd})^{\pm}$ são os tensores de Riemann usuais definidos em $M^{\pm}$.

As descontinuidades nas primeiras derivadas do tensor métrico podem ser obtidas de (3.2) e estão caracterizadas pelo tensor b_{ab}, definido através das relações

$$[g_{ab,c}] = b_{ab}\ n_c, \tag{3.11}$$

de tal forma que

$$[\Gamma^a_{bc}] = \frac{1}{2}\ (b^a_b\ n_c + b^a_c\ n_b - g^{ae} b_{bc}\ n_e), \tag{3.12}$$

$$H^a_{bcd} = \frac{1}{2}\ (b^a_d n_b n_c - b^a_c n_b n_d + b_{bc} n^a n_d - b_{bd} n^a n_c), \tag{3.13}$$

onde todas as quantidades são avaliadas na hipersuperfície Σ.

Supondo que o tensor de energia-momento T_{ab} pode ser expresso na forma

$$T_{ab} \ = \ (T_{ab})^D \ + \ Q_{ab}\ \delta(\phi), \tag{3.14}$$

onde Q_{ab} é o tensor de energia-momento associado com a hipersuperfície Σ e os $T^{\pm}_{ab}$ são os tensores de energia-momento usuais definidos em $M^{\pm}$, pode-se provar facilmente que as equações de Einstein, em unidades geométricas tais que $c = 8\pi G = 1$, são equivalentes ao sistema de equações

$$R^{\pm}_{ab} \ - \frac{1}{2} g_{ab} R^{\pm} \ = \ T^{\pm}_{ab}, \tag{3.15}$$

$$H_{ab} \ - \frac{1}{2} g_{ab} H \ = \ Q_{ab}, \tag{3.16}$$

onde $H_{ab} = H^c_{acb}$ e $H = g^{ab}_{\Sigma} H_{ab}$.

Quando a camada fina de matéria é a única fonte do campo gravitacional, de tal forma que o resto do espaço-tempo é vazio, $T^{\pm}_{ab} \equiv 0$ e as equações (3.15) reduzem-se às equações de Einstein no vazio em $M^{\pm}$,

$$R^{\pm}_{ab} \ = \ 0. \tag{3.17}$$

Assim, havendo resolvido o sistema anterior, a equação (3.16) pode ser usada para obter a expressão do tensor de energia-momento para a camada de matéria,

$$Q^a_b = \frac{1}{2}\{b^a_c n^c n_b - b^a_b n^c n_c + b^c_b n^a n_c - b^c_c n^a n_b - \delta^a_b (b^c_e n^e n_c - b^c_c n^e n_e)\}, \tag{3.18}$$

onde todas as quantidades são avaliadas na hipersuperfície Σ.

4 Discos finos axialmente simétricos

Vamos restringir o formalismo anterior ao caso de um disco fino axialmente simétrico introduzindo no espaço-tempo M as coordenadas quase-cilíndricas $x^a = (t, \varphi, r, z)$ e considerando a hipersuperfície Σ definida pela função $\phi(x^a) = z$, com vetor normal $n_a = \phi_{,a} = \delta^z_a$. A métrica para um espaço-tempo estacionário com simetria axial pode ser escrita como [23, 24]

$$ds^2 = -\ e^{\Phi}(dt + \mathcal{W} d\varphi)^2 \ + \ e^{-\Phi}[\mathcal{R}^2 d\varphi^2 + e^{\Lambda}(dr^2 + dz^2)], \tag{4.1}$$

onde as funções $\mathcal{R}$, $\mathcal{W}$, Φ e Λ dependem só das coordenadas r e z. A natureza quase-cilíndrica das coordenadas [3] significa que $r = 0$ sobre o eixo de simetria e, para z fixo, r cresce monotonamente ao infinito, enquanto que z, para r fixo, cresce monotonamente no intervalo $(-\infty, \infty)$. A coordenada φ varia no intervalo usual $[0, 2\pi)$.

Dada uma solução da forma (4.1) para as equações de Einstein no vazio, $R_{ab} = 0$, o tensor métrico g^+_{ab}, definido para $z \geq 0$, é obtido da relação

$$ds^2\big|_{M^+} = g^+_{ab} dx^a dx^b, \tag{4.2}$$

e o tensor métrico g^-_{ab}, definido para $z \leq 0$, é obtido através da relação

$$g^-_{ab}(r, z) = g^+_{ab}(r, -z), \tag{4.3}$$

de tal forma que $[g_{ab}] = 0$. Isto significa construir modelos com simetria de reflexão com respeito ao plano $z = 0$.

A relação anterior implica que, quando $z \neq 0$,

$$g^-_{ab,z}(r, z) = -\, g^+_{ab,z}(r, -z), \tag{4.4}$$

e assim, tomando apropriadamente o limite quando $z \to 0$, as descontinuidades nas primeiras derivadas do tensor métrico podem ser escritas como

$$b_{ab} = [g_{ab,z}] = 2\, g^+_{ab,z}\big|_{z=0^+}. \tag{4.5}$$

Para a métrica (4.1), as componentes não-nulas do tensor b_{ab} são:

$$b_{tt} = -\, 2e^{\Phi}\Phi_{,z}\,, \tag{4.6}$$

$$b_{t\varphi} = -\, 2e^{\Phi}(\mathcal{W}\Phi_{,z} + \mathcal{W}_{,z}\,), \tag{4.7}$$

$$b_{\varphi\varphi} = 2e^{-\Phi}\{\mathcal{R}(2\mathcal{R}_{,z} - \mathcal{R}\Phi_{,z}\,) - e^{2\Phi}\mathcal{W}(\mathcal{W}\Phi_{,z} + 2\mathcal{W}_{,z}\,)\}, \tag{4.8}$$

$$b_{rr} = e^{\Lambda-\Phi}(\Lambda_{,z} - \Phi_{,z}\,), \tag{4.9}$$

$$b_{zz} = e^{\Lambda-\Phi}(\Lambda_{,z} - \Phi_{,z}\,), \tag{4.10}$$

onde todas as quantidades são avaliadas na hipersuperfície $z = 0^+$.

Usando os resultados anteriores na expressão (3.18), obtém-se para o tensor de energia-momento do disco as componentes não-nulas

$$Q^t_t \;=\; \frac{e^{\Phi-\Lambda}}{\mathcal{R}^2}\{\mathcal{R}^2\Lambda_{,z} - 2\mathcal{R}^2\Phi_{,z} + 2\mathcal{R}\mathcal{R}_{,z} - e^{2\Phi}\mathcal{W}\mathcal{W}_{,z}\}, \tag{4.11}$$

$$Q^t_\varphi \;=\; \frac{e^{\Phi-\Lambda}}{\mathcal{R}^2}\{2\mathcal{R}\mathcal{W}\mathcal{R}_{,z} - 2\mathcal{R}^2\mathcal{W}\Phi_{,z} - \mathcal{R}^2\mathcal{W}_{,z} - e^{2\Phi}\mathcal{W}_{,z}\}, \tag{4.12}$$

$$Q^\varphi_t \;=\; \frac{e^{3\Phi-\Lambda}}{\mathcal{R}^2}\mathcal{W}_{,z}\,, \tag{4.13}$$

$$Q^\varphi_\varphi \;=\; \frac{e^{\Phi-\Lambda}}{\mathcal{R}^2}\{\mathcal{R}^2\Lambda_{,z} + e^{2\Phi}\mathcal{W}\mathcal{W}_{,z}\}, \tag{4.14}$$

$$Q^r_r \;=\; \frac{2e^{\Phi-\Lambda}}{\mathcal{R}}\mathcal{R}_{,z}\,, \tag{4.15}$$

onde, novamente, todas as quantidades são avaliadas na hipersuperfície $z = 0^+$.

O tensor de energia-momento superficial τ_{ab} do disco pode ser obtido através da relação

$$\tau^a_b \;=\; \int T^a_b ds, \tag{4.16}$$

onde $ds \;=\; \sqrt{g_{zz}}\;dz$ é o elemento de comprimento na direção normal ao disco e $T^a_b \;=\; Q^a_b\;\delta(z)$. Usando a métrica (4.1), temos que

$$\tau^a_b \;=\; e^{(\Lambda-\Phi)/2}Q^a_b, \tag{4.17}$$

onde, como nas expresões anteriores, todas as quantidades são avaliadas na hipersuperfície $z = 0^+$.

5 O tensor de energia-momento

Para encontrar a densidade de energia e os esforços principais sobre o disco é preciso escrever o tensor de energia-momento Q^a_b na forma canônica [25, 26], em termos de seus autovalores e seus autovetores. O problema de autovalores para o tensor de energia-momento (4.11) – (4.15),

$$Q^a_b\xi^b \;=\; \lambda\xi^a, \tag{5.1}$$

leva à equação secular

$$(\lambda^2 - \lambda\; Tr(Q^A_B) \;+\; \det(Q^A_B))(\lambda - Q^r_r)\lambda = 0, \tag{5.2}$$

onde os índices A e B tomam os valores t e φ.

A equação anterior tem quatro raízes,

$$\begin{aligned} \lambda_\pm &= \tfrac{1}{2}(Tr(Q^A_B) \ \pm \ \sqrt{D}), \\ \lambda_r &= Q^r_r, \qquad \lambda_z \ = \ 0, \end{aligned} \tag{5.3}$$

onde

$$\begin{aligned} D &= [Tr(Q^A_B)]^2 \ - \ 4\det(Q^A_B) \\ &= (Q^\varphi_\varphi - Q^t_t)^2 \ + \ 4Q^t_\varphi Q^\varphi_t. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Os correspondentes autovetores são

$$\begin{aligned} \xi^a_\pm &= N_\pm(Q^t_\varphi, \lambda_\pm - Q^t_t, 0, 0), \\ X^a &= e^{(\Phi-\Lambda)/2}(0,0,1,0), \\ Y^a &= e^{(\Phi-\Lambda)/2}(0,0,0,1), \end{aligned} \tag{5.5}$$

onde os $N_\pm$ são fatores de normalização.

Dependendo do valor do discriminate D podem-se distinguir três casos: $D > 0$, $D < 0$ e $D = 0$. No primeiro caso, $D > 0$, os dois autovalores $\lambda_\pm$ são reais e diferentes e os dois autovetores $\xi_\pm$ são ortogonais, de tal forma que um deles é temporal e o outro espacial. Para determinar o sinal da norma $\xi^\pm_a \xi^a_\pm$ pode-se usar a relação

$$\lambda_\pm \xi^\pm_a \xi^a_\pm \ = \ Q_{AB}\xi^A_\pm \xi^B_\pm, \tag{5.6}$$

e analisar o comportamento da forma quadrática $Q(\xi) = Q_{AB}\xi^A\xi^B$ e o sinal dos autovalores $\lambda_\pm$. Sejam U^a o autovetor temporal, $U_a U^a = -1$, e V_a o autovetor espacial, $V_a V^a = 1$. O tensor Q_{ab} pode ser escrito como

$$Q_{ab} \ = \ \varepsilon U_a U_b + S_{ab}, \tag{5.7}$$

de modo que pode ser interpretado como o tensor de energia-momento de uma distribuição de matéria com densidade superficial de energia dada por

$$\varepsilon = Q_{ab}U^a U^b, \tag{5.8}$$

e tensor de esforços

$$S_{ab} \ = \ p_\varphi V_a V_b \ + \ p_r X_a X_b, \tag{5.9}$$

onde o autovalor p_φ representa o esforço na direção tangencial e o autovalor $p_r = \lambda_r$ representa o esforço na direção radial [27, 28]. O requerimento de que a densidade de energia não seja negativa impõe a condição $\varepsilon \geq 0$, enquanto que o requerimento de que a densidade Newtoniana de energia, definida como [29]

$$\varrho = \varepsilon + S^a_a, \tag{5.10}$$

não seja negativa impõe a condição $\varepsilon + p_\varphi + p_r \geq 0$.

Para o segundo caso, $D < 0$, os autovalores $\lambda_\pm$ e os autovetores $\xi_\pm$ são complexos conjugados, $\lambda_- = \bar{\lambda}_+$, $\xi^a_- = \bar{\xi}^a_+$. Em uma base de vetores ortonormais reais, $\{U^a, V^a, X^a, Y^a\}$, onde $-U_aU^a = V_aV^a = 1$, os autovetores $\xi^a_\pm$ podem-se expressar como $\xi^a_\pm = V^a \pm iU^a$ e o tensor Q_{ab} pode-se escrever na forma

$$Q_{ab} \;=\; \varepsilon U_aU_b + q_aU_b + U_aq_b + S_{ab}, \tag{5.11}$$

de modo que pode ser interpretado como o tensor de energia-momento de uma distribuição de matéria com propagação de calor na direção tangencial [28]. A densidade de energia superficial está dada por $\varepsilon = -Re\lambda = -\frac{1}{2}Tr(Q^A_B)$, e o vetor fluxo de calor por

$$q_a \;=\; \kappa V_a, \tag{5.12}$$

onde $\kappa = Im\lambda = \frac{1}{2}\sqrt{-D}$. O tensor de esforços é

$$S_{ab} \;=\; -\varepsilon V_aV_b \;+\; p_rX_aX_b. \tag{5.13}$$

O requerimento de que a densidade de energia não seja negativa impõe a condição $\varepsilon \geq 0$, enquanto que o requerimento de que a densidade Newtoniana de energia não seja negativa impõe a condição $p_r \geq 0$. Impondo a condição adicional $\varepsilon \geq |\kappa|$ garante-se que a propagação do calor é causal.

No terceiro caso, $D = 0$, os dois autovalores $\lambda_\pm$ são iguais e o correspondente autovetor é um vetor nulo, $\xi_a\xi^a = 0$. Expresando o autovetor na forma $\sqrt{2}\xi^a = U^a + V^a$, onde $-U_aU^a = V_aV^a = 1$, o tensor Q_{ab} pode-se escrever como

$$Q_{ab} \;=\; 2\omega\xi_a\xi_b + \varepsilon U_aU_b + S_{ab}, \tag{5.14}$$

de tal forma que pode ser interpretado como o tensor de energia-momento da superposição de um campo de radiação nulo [27], com densidade de energia $\omega = -Q_{ab}U^aV^b$, e uma distribuição de matéria com densidade de energia superficial $\varepsilon = -\frac{1}{2}Tr(Q^A_B)$ e tensor de esforços

$$S_{ab} \;=\; -\varepsilon V_aV_b \;+\; p_rX_aX_b. \tag{5.15}$$

A densidade de energia da radiação deve ser positiva, $\omega \geq 0$, assim como a densidade de energia superficial da distribuição de matéria, $\varepsilon \geq 0$. O requerimento de que a densidade Newtoniana de energia não seja negativa impõe a condição adicional $p_r \geq 0$.

Agradecimentos

O autor expressa seu agradecimento à Comissão para o Aperfeiçoamento do Pessoal da Educação Superior, CAPES (Brasil), e ao Instituto Colombiano para el Desarrollo de la Ciencia y la Tecnología, COLCIENCIAS (Colombia).

Referencias

[1] Bonnor, W. B. and Sackfield, A. "The Interpretation of Some Spheroidal Metrics". *Comm. Math. Phys.* 8, 338 (1968).

[2] Morgan, L. and Morgan, T. "Gravitational Field of Shells and Disks in General Relativity". *Phys. Rev. D2*, 2756 (1970).

[3] Morgan, T. and Morgan, L. "The Gravitational Field of a Disk". *Phys. Rev.* 183, 1097 (1969).

[4] Chamorro, A., Gregory, R. and Stewart, J. M. "Static Axially Symmetric Disks and Gravitational Collapse". *Proc. R. Soc. Lond.* A413, 251 (1987).

[5] Lemos, J. P. S. "Self-similar Relativistic Disks with Pressure". Class. *Quantum Grav.* 6, 1219 (1989).

[6] Lemos, J. P. S. and Letelier, P. S. "Superposition of Morgan and Morgan Disks with a Schwarzschild Black Hole". Class. *Quantum Grav.* 10, L75 (1993).

[7] Lemos, J. P. S. and Letelier, P. S. "Exact General Relativistic Thin Disks around Black Holes". *Phys. Rev.* D49, 5135 (1994).

[8] Lemos, J. P. S. and Letelier, P. S. "Two Families of Exact Disks with a Central Black Hole". *Int. J. Mod. Phys. D5*, 53 (1996).

[9] Bičák, J., Lynden-Bell, D. and Katz, J. "Relativistic Disks as Sources of Static Vacuum Spacetimes". *Phys. Rev.* D47, 4334 (1993).

[10] Bičák, J., Lynden-Bell, D. and Pichon, C. "Relativistic Disks and Flat Galaxy Models". *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 265, 126 (1993).

[11] Bičák, J. and Ledvinka, T. "Relativistic Disks as Sources of the Kerr Metric". *Phys. Rev. Lett.* 71, 1669 (1993).

[12] Ledvinka, T., Zofka, M. and Bičák, J. "Relativistic Disks as Sources of the Kerr-Newman Fields". To appear in *Proc. of the MGM8 Meeting*, Jerusalem (1997).

[13] Pichon, C. and Lynden-Bell, D. "New Sources of Kerr and other Metrics: Rotating Relativistic Disks with Pressure Support". *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 280, 1007 (1996).

[14] Binney, J. and Tremaine, S. "Galactic Dynamics". Princeton University Press, 1987.

[15] Friedman, A. and Polyachenco, V. L. *Physics of Gravitating Systems.* Springer Verlag, 1984.

[16] Feinstein, A., Ibáñez, J. and Lazkoz, R. "Disks in Expanding FRW Universes". *Astrophys. J.* 495, 131 (1998).

[17] Lemos, J. P. S. and Ventura, O. "Planar and Axisymmetric Walls in General Relativity". *J. Math. Phys.* 35, 3604 (1994).

[18] Letelier, P. S. "Space-time Defects: Open and Closed Shells". *J. Math. Phys.* 36, 3043 (1995).

[19] Letelier, P. S. and Wang, A. "Space-time Defects". *J. Math. Phys.* 36, 3023 (1995).

[20] Taub, A. H. "Space-times with Distribution Valued Curvature Tensors". *J. Math. Phys.* 21, 1423 (1980).

[21] Wang, A. "Plane Walls Interacting with Gravitational Waves and Matter Fields". *J. Math. Phys.* 32, 2863 (1991).

[22] Wang, A. "Dynamics of Plane Symmetric Thin Walls in General Relativity". *Phys. Rev. D45*, 3534 (1992).

[23] Kramer, D., Stephani, H., Herlt, E. and McCallum, M. *Exact Solutions of Einstein's Field Equations.* Cambridge University Press, 1980.

[24] Wald, R. M. "General Relativity". The University of Chicago Press, 1980.

[25] Doubrovine, B., Novikov, S. and Fomenko, A. *Géométrie Contemporaine*, Première Partie. Éditions MIR, 1985.

[26] Hawking, S. W. and Ellis, G. F. R. "The Large Scale Structure of Space-Time". Cambridge University Press, 1973.

[27] Lichnerowicz, A. *Théories Relativistes de la Gravitation et de L'Électromagnétisme.* Masson, 1955.

[28] Møller, C. *The Theory of Relativity.* Oxford University Press, 1972.

[29] Tolman, R. C. *Relativity, Thermodynamics and Cosmology.* Dover, 1987.