Revista INTEGRACIÓN
Universidad Industrial de Santander
Escuela de Matemáticas
Vol. 18, No 2, p. 79–87, julio–diciembre de 2000

Equivalencia entre soluciones de las ecuaciones de campo de Einstein y de Einstein-Maxwell

GONZALO GARCÍA R.* Y GUILLERMO A. GONZÁLEZ**

Resumen

Se presenta una equivalencia entre los sistemas de ecuaciones de campo de Einstein en el vacío y de Einstein-Maxwell para espacio tiempos axialmente simétricos. Consideramos, en particular, los casos siguientes: el sistema de ecuaciones de Einstein en el vacío para un espacio tiempo estacionario, el sistema de ecuaciones de Einstein-Maxwell para un espacio-tiempo estático con presencia de campo magnético y el sistema de ecuaciones de Einstein-Maxwell para un espacio-tiempo estático con presencia de campo eléctrico. Presentamos dos ejemplos específicos, basados en soluciones simples de las ecuaciones de Einstein-Maxwell: la solución de Reissner-Nordström electrostática, su equivalente magnetostática, y una solución tipo Taub-NUT.

1. Introducción

Un problema importante en la teoría general de la relatividad es el de la obtención de soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein que correspondan a configuraciones de materia físicamente aceptables. Sin embargo, debido a la naturaleza de dichas ecuaciones (un sistema nolineal de ecuaciones diferenciales parciales) la obtención de soluciones exactas es un problema sorprendentemente complicado, el cual sólo ha sido resuelto en casos simples altamente simétricos.

*EMAIL: gogarcia@uis.edu.co Escuela de Física, Universidad Industrial de Santander. A.A. 678, Bucaramanga, Colombia
**EMAIL: guillego@uis.edu.co Escuela de Física, Universidad Industrial de Santander. A.A. 678, Bucaramanga, Colombia

Actualmente el trabajo de investigación en el problema de la obtención de soluciones exactas se concentra básicamente, por un lado, en encontrar nuevas soluciones de las ecuaciones de Einstein y, por otro, en el desarrollo de técnicas de generación de soluciones, las cuales no sólo reproducen importantes resultados ya conocidos, sino que también generan nuevas soluciones [1].

Existen tres casos especialmente importantes de las ecuaciones de Einstein y de Einstein-Maxwell para espacio-tiempos axialmente simétricos: el sistema de ecuaciones de Einstein en el vacío para un espacio-tiempo estacionario, el sistema de ecuaciones de Einstein-Maxwell para un espacio-tiempo estático con presencia de campo magnético y el sistema de ecuaciones de Einstein-Maxwell para un espacio-tiempo estático con presencia de campo eléctrico. El propósito de este trabajo es mostrar que los tres casos anteriores son matemáticamente equivalentes.

El material está organizado de la siguiente manera. En la sección 2 presentamos un resumen de las ecuaciones de campo de Einstein en el vacío y electrovacío. Mostramos entonces, en la sección 3, que los tres casos se pueden escribir en la forma Belinskii-Zakharov [2, 3], lo cual conduce a una equivalencia entre ellos. Luego, en la siguiente sección, dos ejemplos específicos son mostrados basados en soluciones simples de las ecuaciones de Einstein-Maxwell. Las soluciones consideradas son Reissner-Nordström en el caso electrostático, su equivalente magnetostática, y una solución tipo Taub-NUT. Finalmente, en la sección 5, resuminos nuestros principales resultados.

2. Ecuaciones de campo de Einstein-Maxwell

La métrica más simple que describe un espacio-tiempo estacionario axialmente simétrico, en coordenadas cuasicilíndricas (t, φ, r, z), es el elemento de línea propuesto por Weyl-Lewis-Papapetrou [1]

$$ds^2 = -\, e^{2\Phi}(dt + W d\varphi)^2 \; + \; e^{-2\Phi}[r^2 d\varphi^2 + e^{2\Lambda}(dr^2 + dz^2)], \qquad (2.1)$$

donde Φ, W y Λ son funciones sólo de r y z. Para un espacio-tiempo estático la expresión anterior se simplifica tomando $W = 0$, lo cual hace que la métrica sea diagonal.

El sistema de ecuaciones de Einstein-Maxwell, en unidades geometrizadas tales que $8\pi G = c = \mu_0 = \varepsilon_0 = 1$, está dado por

$$G_{ab} = T_{ab}, \tag{2.2a}$$

$$T_{ab} = F_{ac}F_b{}^c - \frac{1}{4}g_{ab}F_{cd}F^{cd}, \tag{2.2b}$$

$$\nabla_a F^{ab} = 0, \tag{2.2c}$$

$$F_{ab} = \partial_a A_b - \partial_b A_a, \tag{2.2d}$$

donde todos los símbolos tienen el significado usual.

Vamos a considerar tres casos particulares del anterior sistema de ecuaciones: un espacio-tiempo estacionario en el vacío, un espacio-tiempo estático con presencia de campo eléctrico y un espacio-tiempo estático con presencia de campo magnético. Denotaremos los potenciales gravitacionales Φ y Λ por Φ_1, Λ_1, Φ_2, Λ_2, Φ_3 y Λ_3, respectivamente. Para un espacio-tiempo estático con presencia de campo eléctrico el potencial se escoge como

$$A_a = \psi\delta_a^t, \tag{2.3}$$

y para un espacio-tiempo estático con campo magnético el potencial se escoge como

$$A_a = A\delta_a^\varphi, \tag{2.4}$$

donde ψ y A son también funciones de r y z.

En el vacío, las ecuaciones de campo de Einstein son equivalentes al sistema de ecuaciones diferenciales

$$\Phi_{1,rr} + \frac{1}{r}\Phi_{1,r} + \Phi_{1,zz} + \frac{e^{4\Phi_1}}{2r^2}(W_{,r}^2 + W_{,z}^2) = 0, \tag{2.5a}$$

$$W_{,rr} - \frac{1}{r}W_{,r} + W_{,zz} + 4(W_{,r}\Phi_{1,r} + W_{,z}\Phi_{1,z}) = 0, \tag{2.5b}$$

$$\Lambda_{1,r} = r(\Phi_{1,r}^2 - \Phi_{1,z}^2) - \frac{e^{4\Phi_1}}{4r}(W_{,r}^2 - W_{,z}^2), \tag{2.5c}$$

$$\Lambda_{1,z} = 2r\Phi_{1,r}\Phi_{1,z} - \frac{1}{2r}W_{,r}W_{,z}e^{4\Phi_1}; \tag{2.5d}$$

por otro lado, para un espacio-tiempo estático con presencia de campo eléctrico, las ecuaciones de Einstein-Maxwell llevan al sistema de ecuaciones diferenciales

$$\Phi_{2,rr} + \frac{1}{r}\Phi_{2,r} + \Phi_{2,zz} - \frac{e^{-2\Phi_2}}{2}(\psi_{,r}^2 + \psi_{,z}^2) = 0, \tag{2.6a}$$

$$\psi_{,rr} + \frac{1}{r}\psi_{,r} + \psi_{,zz} - 2(\Phi_{2,r}\psi_{,r} + \Phi_{2,z}\psi_{,z}) = 0, \tag{2.6b}$$

$$\Lambda_{2,r} = r(\Phi_{2,r}^2 - \Phi_{2,z}^2) - \frac{re^{-2\Phi_2}}{2}(\psi_{,r}^2 - \psi_{,z}^2), \tag{2.6c}$$

$$\Lambda_{2,z} = 2r\Phi_{2,r}\Phi_{2,z} - re^{-2\Phi_2}\psi_{,r}\psi_{,z}. \tag{2.6d}$$

Finalmente, para un espacio-tiempo estático con presencia de campo magnético, las ecuaciones de Einstein-Maxwell son equivalentes al sistema de ecuaciones diferenciales

$$\Phi_{3,rr} + \frac{1}{r}\Phi_{3,r} + \Phi_{3,zz} - \frac{e^{2\Phi_3}}{2r^2}(A_{,r}^2 + A_{,z}^2) = 0, \tag{2.7a}$$

$$A_{,rr} - \frac{1}{r}A_{,r} + A_{,zz} + 2(A_{,r}\Phi_{3,r} + A_{,z}\Phi_{3,z}) = 0, \tag{2.7b}$$

$$\Lambda_{3,r} = r(\Phi_{3,r}^2 - \Phi_{3,z}^2) + \frac{e^{2\Phi_3}}{2r}(A_{,r}^2 - A_{,z}^2), \tag{2.7c}$$

$$\Lambda_{3,z} = 2r\Phi_{3,r}\Phi_{3,z} + \frac{1}{r}e^{2\Phi_3}A_{,r}A_{,z}, \tag{2.7d}$$

donde, en todos los casos, los subíndices indican derivación parcial.

3. Sistema de ecuaciones equivalente

Existen diferentes técnicas para encontrar soluciones exactas de los sistemas de ecuaciones diferenciales parciales (2.5)-(2.7), uno de los cuales se basa en el hecho de que éstos pueden ser escritos en la forma Belinskii-Zakharov [2, 3]. Con el fin de ver esto, es fácil probar que los tres casos anteriores son matemáticamente equivalentes al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales parciales:

$$(rM_{,r}M^{-1})_{,r} + (rM_{,z}M^{-1})_{,z} = 0, \tag{3.1}$$

$$\left.\begin{aligned}\Psi_{,r} &= -\tfrac{1}{r} + \tfrac{1}{4r}\,Tr\{B^2 - C^2\},\\ \Psi_{,z} &= \tfrac{1}{2r}\,Tr\{BC\},\end{aligned}\right. \tag{3.2}$$

donde $\Psi = \bar{\Lambda} - U$, las matrices B y C están definidas a través de las relaciones

$$B = rM_{,r}M^{-1} \quad , \quad C = rM_{,Z}M^{-1}, \tag{3.3}$$

y la matriz M está dada por

$$M = \begin{pmatrix} e^U & Ve^U \\ Ve^U & V^2e^U + \alpha r^2 e^{-U} \end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

Nótese que $M = M^T$ y $\det M = \alpha r^2$.

Para el caso de un espacio-tiempo estacionario en el vacío, podemos hacer las identificaciones $U = 2\Phi_1$, $V = W$, $\bar{\Lambda} = \Lambda_1$ y $\alpha = -1$; así pues, la matriz M toma la forma

$$M = \begin{pmatrix} e^{2\Phi_1} & We^{2\Phi_1} \\ We^{2\Phi_1} & W^2e^{2\Phi_1} - r^2e^{-2\Phi_1} \end{pmatrix}, \tag{3.5}$$

de modo que $\det M = -r^2$.

Para el caso de un espacio-tiempo estático con presencia de campo eléctrico hacemos las identificaciones $U = \ln r - \Phi_2$, $V = \frac{1}{\sqrt{2}}\psi$, $\bar{\Lambda} = \frac{1}{2}(\Lambda_2 + \ln r) - \Phi_2$ y $\alpha = -1$, por lo tanto la matriz M se escribe como

$$M = \begin{pmatrix} re^{-\Phi_2} & \frac{1}{\sqrt{2}}r\psi e^{-\Phi_2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}r\psi e^{-\Phi_2} & \frac{1}{2}r\psi^2e^{-\Phi_2} - re^{\Phi_2} \end{pmatrix}, \tag{3.6}$$

de modo que $\det M = -r^2$. Así, $\Phi_2 = \ln r - U$, $\psi = V\sqrt{2}$ y $\Lambda_2 = 2(\bar{\Lambda} - U) + \ln r$.

Comparando (3.5) y (3.6) claramente se aprecia una equivalencia directa entre los sistemas de ecuaciones (2.5) y (2.6), lo que implica el siguiente resultado:

Teorema 1. *Dada una solución estacionaria axialmente simétrica de las ecuaciones de Einstein en el vacío, podemos generar una solución electrostática de las ecuaciones de Einstein-Maxwell, y viceversa, a través de las relaciones:*

$$\Phi_2 = \ln r - 2\Phi_1, \tag{3.7a}$$

$$\psi = W\sqrt{2}, \tag{3.7b}$$

$$\Lambda_2 = 2(\Lambda_1 - 2\Phi_1) + \ln r. \tag{3.7c}$$

Finalmente, para el caso de un espacio-tiempo estático con presencia de campo magnético, las identificaciones $U = \Phi_3$, $V = \frac{1}{\sqrt{2}}A$, $\bar{\Lambda} = \frac{1}{2}\Lambda_3$ y $\alpha = 1$ permiten escribir la matriz M como

$$M = \begin{pmatrix} e^{\Phi_3} & \frac{1}{\sqrt{2}} A e^{\Phi_3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} A e^{\Phi_3} & \frac{1}{2} A^2 e^{\Phi_3} + r^2 e^{-\Phi_3} \end{pmatrix}, \tag{3.8}$$

de modo que $\det M = r^2$. Así, $\Phi_3 = U$, $A = V\sqrt{2}$ y $\Lambda_3 = 2\bar{\Lambda}$. En términos del potencial A' definido por

$$A_{,r} = r f^{-1} A'_{,z}, \tag{3.9a}$$
$$A_{,z} = -r f^{-1} A'_{,r}, \tag{3.9b}$$

(2.7) toma la forma de (2.6), como se puede ver por sustitución directa de (3.9), lo que implica el siguiente resultado:

Teorema 2. *Hay una correspondencia uno a uno entre las soluciones electrostáticas y magnetóstaticas de las ecuaciones de Einstein-Maxwell, definida a través de las relaciones $\Phi_3 = \Phi_2$, $\Lambda_3 = \Lambda_2$, $A' = \psi$, donde A se obtiene a través de (3.9).*

Así, podemos generar a partir de una solución estacionaria axialmente simétrica de las ecuaciones de Einstein en el vacío una solución electrostática y, a su vez, una magnetostática de las ecuaciones de Einstein-Maxwell, y viceversa.

4. Algunas soluciones simples

4.1. Solución tipo Reissner-Nordström

La solución electrostática más simple del sistema de ecuaciones de Einstein-Maxwell es la solución de Reissner-Nordström [1], la cual puede escribirse como

$$\Phi = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{x^2 - 1}{(x+a)^2} \right], \tag{4.1a}$$

$$\Lambda = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{x^2 - 1}{x^2 - y^2} \right], \tag{4.1b}$$

$$\psi = \frac{\sqrt{2} b}{x + a}, \tag{4.1c}$$

donde $a = m/k$, $b = e/k$, con $k^2 = m^2 - e^2$, de modo que $a^2 = 1 + b^2$.

Aquí m y e son la masa y la carga eléctrica, respectivamente. Las variables (x, y) son las coordenadas esferoidales prolatas, las cuales están relacionadas con las coordenadas de Weyl por

$$2kx = \sqrt{r^2 + (z+k)^2} + \sqrt{r^2 + (z-k)^2}, \tag{4.2a}$$

$$2ky = \sqrt{r^2 + (z+k)^2} - \sqrt{r^2 + (z-k)^2}. \tag{4.2b}$$

Esta solución puede ser generada a partir de la solución de Schwarzschild en estas coordenadas, usando el formalismo del potencial complejo propuesto por Ernst [4, 5]. En efecto, cuando $b = 0$ la expresión (4.1) se reduce a la solución de Schwarzschild. Así, b es el parámetro que regula la intensidad del campo eléctrico.

Una solución magnetostática equivalente a esta puede obtenerse usando la expresión para la ecuación (3.9) en coordenadas esferoidales prolatas

$$A_{,x} = kf^{-1}(1-y^2)\psi_{,y}, \tag{4.3a}$$

$$A_{,y} = -kf^{-1}(x^2-1)\psi_{,x}, \tag{4.3b}$$

cuya solución es

$$A = \sqrt{2}kby, \tag{4.4}$$

de nuevo con $a^2 - b^2 = 1$. En este caso, el parámetro b regula la intensidad del campo magnético.

4.2. Solución tipo Taub-NUT

Una solución tipo Taub-NUT de las ecuaciones de Einstein-Maxwell es

$$\Phi = \ln\left[\frac{x^2-1}{x^2+2ax+1}\right], \tag{4.5a}$$

$$\Lambda = 2\ln\left[\frac{x^2-1}{x^2-y^2}\right], \tag{4.5b}$$

$$\psi = \frac{2\sqrt{2}bx}{x^2+2ax+1}, \tag{4.5c}$$

con $a^2 - b^2 = 1$, y donde (x, y) son, de nuevo, las coordenadas esferoidales prolatas dadas por (4.2a) y (4.2b).

Esta solución puede también ser generada, en estas coordenadas, usando el formalismo del potencial complejo propuesto por Ernst [4, 5] a partir de la solución $\delta = 2$ de Weyl o la solución de Darmois [1]. En efecto, cuando $b = 0$, la expresión (4.5) se reduce a la solución de Darmois. Así, de nuevo, b es el parámetro que regula la intensidad del campo eléctrico. La solución magnetostática equivalente, obtenida a través de (4.3), está dada por

$$A = 2\sqrt{2}kby, \tag{4.6}$$

de nuevo con $a^2 - b^2 = 1$ y, como en el caso anterior, b regula ahora la intensidad del campo magnético.

5. Discusión

En el presente trabajo se presentó una equivalencia matemática entre los sistemas de ecuaciones de campo de Einstein y Einstein-Maxwell para espacio-tiempos axialmente simétricos en los siguientes casos particulares: espacio-tiempos estacionarios en el vacío, espacio-tiempos estáticos con presencia de campo eléctrico y espacio-tiempos estáticos con presencia de campo magnético.

La equivalencia presentada permite generar, a partir de soluciones estacionarias axialmente simétricas de las ecuaciones de Einstein en el vacío, soluciones electrostáticas y magnetostáticas de las ecuaciones de Einstein-Maxwell, y viceversa. Dos ejemplos específicos fueron considerados basados en soluciones simples de las ecuaciones de Einstein-Maxwell que se pueden obtener por técnicas convencionales de generación de soluciones [1].

Agradecimientos

Gonzalo García R. desea agradecer el apoyo recibido de la Vicerrectoría Académica de la Universidad Industrial de Santander a través de una Beca de Posgrado.

Referencias

[1] D. Kramer, H. Stephani, E. Herlt, and M. McCallum. *Exact Solutions of Einsteins's Field Equations* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1980).

[2] V. A. Belinskii and V. E. Zakharov. "Integration of the Einstein Equations by means of the Inverse Scattering Technique and Construction of Exact Soliton Solutions". *Zh. Eksp. Teor. Fis.* 75, 1955 (1978). [*Sov. Phys. JETP* 48, 985 (1978).]

[3] V. A. Belinskii and V. E. Zakharov. "Stationary Gravitational Solitons with Axial Symmetry". *Zh. Eksp. Teor. Fis.* *77*, 3 (1979). [*Sov. Phys. JETP* *50*, 1 (1979).]

[4] F. J. Ernst. "New Formulation of the Axially Symmetric Gravitational Field Problem". *Phys. Rev.* D 167, 1175 (1968).

[5] F. J. Ernst. "New Formulation of the Axially Symmetric Gravitational Field Problem. II". *Phys. Rev.* D 168, 1415 (1968).