Revista Integración
Escuela de Matemáticas
Universidad Industrial de Santander
Vol. 21, Nos. 1 y 2, 2003, pág. 69–82

Geometría y representaciones del ángulo plano y diedro

Luis Enrique Ruiz Hernández*

Resumen. Se concibe la geometría del ángulo plano y diedro en términos de matrices reales simétricas. Se acuñan así campos escalares sobre $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, siendo dichas figuras justamente sus conjuntos de nivel, respectivamente. Además se construyen campos vectoriales $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ y $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, tales que $F(\mathbb{R})$ es un ángulo plano y $f(\mathbb{R}^2)$ un ángulo diedro, con representaciones vectoriales unificadas.

Introducción

La mayoría de las figuras geométricas más importantes se encuentran en un estado de eterna inercia que les impide un conocimiento allende la imagen y enfoque euclídeo tradicional. El ángulo plano $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ (debe diferenciarse del ángulo derecho, el que tiene sus lados colineales; en inglés *straight angle*, [1, pp. 37] y diedro $\mathcal{D}$ corresponden a ese tipo de lugares geométricos, que no obstante su importancia y ubicuidad en la geometría plana y sólida, están ahí a la espera de una visión matemática contemporánea.

Con el presente trabajo se hacen aportes a un nuevo estado en el conocimiento de dichos ángulos. Se establece que su geometría puede expresarse en términos de matrices reales simétricas involucradas con el producto interior o vectorial, obteniéndose representaciones cartesianas unificadas para ellos, hasta hoy desconocidas (Teorema 1.1 y Teorema 3.1).

Otra ausencia en la geometría actual de esos dos ángulos es la de una representación vectorial, por lo cual otro objetivo aquí es conseguir parametrizaciones unificadas de las citadas figuras. Ellas se logran por medio de vectores sujetos a ciertas condiciones lineales en el espacio euclídeo (Teorema 2.1 y Teorema 4.1).

En un marco conceptual del álgebra lineal se describen así, la geometría y la topología de $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ y $\mathcal{D}$, una metodología expedita para incursionar en otras figuras geométricas.

Palabras y frases claves: geometría del ángulo plano, ángulo diedro.
MSC2000: Primaria: 51M15. Secundaria: 51M20, 51M99.

* Departamento de Matemáticas, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, Duitama, Boyacá, Colombia, *e-mail*: `leruizh@yahoo.es`.

Denotaremos en letra imprenta mayúscula los puntos o vectores (fila) de $\mathbb{R}^n$, y por $\mathcal{Q}^T$ la transpuesta de una matriz $\mathcal{Q}$. En particular el producto matricial AB^T indicará el producto interior $(\cdot)$ usual de dos vectores A y B en $\mathbb{R}^n$. Además, para cada $A = (a_1, a_2)$ en $\mathbb{R}^2$ definimos

$$A^H = (a_2, -a_1),$$

la rotación de A alrededor del ángulo $-\dfrac{\pi}{2}$. Serán utilizadas muy a menudo, sin aducir, las siguientes propiedades

$$\begin{aligned} A \cdot A^H &= 0, & (A^H)^H &= -A, \\ \|A^H\| &= \|A\|, & \det(A, B) &= A \cdot B^H. \end{aligned}$$

Todos los teoremas (1.1, 2.1, 3.1 y 4.1) consignados en la presente investigación constituyen aportes originales, concebidos y demostrados por el autor.

1. Representación cartesina del ángulo en $\mathbb{R}^2$

Teorema 1.1. *Sean dados r un número real, A un vector unitario en $\mathbb{R}^2$ y $\mathcal{Q}$ una matriz real simétrica, no singular de orden dos. Consideremos las semirrectas*

$$L_i = \{rA\mathcal{Q}^{-1} + t[A^H + (-1)^i A]\mathcal{Q}^{-1} \mid (-1)^i t \leq 0\}, \qquad i = 1, 2, \tag{1}$$

de punto inicial $rA\mathcal{Q}^{-1}$.

Si $\Phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es la función representada por

$$\Phi(X) = |A^H \mathcal{Q} X^T| + A\mathcal{Q}X^T \tag{2}$$

para todo $X \in \mathbb{R}^2$, entonces

(i) Las semirrectas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ son no degeneradas y no paralelas.

(ii) El conjunto de nivel

$$\boldsymbol{\mathcal{A}} = \{X \in \mathbb{R}^2 \mid \Phi(X) = r\}, \tag{3}$$

es un ángulo. Específicamente

$$\boldsymbol{\mathcal{A}} = \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2,$$

el ángulo no degenerado de vértice $rA\mathcal{Q}^{-1}$ y lados las semirrectas $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$.

(iii) Si $\mathcal{Q}$ es la matriz unidad, entonces $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ es un ángulo recto que tiene como bisectriz la semirrecta

$$\mathcal{L} = \{tA \mid t \leq r\}.$$

Demostración. Teniendo presente que A es un vector unitario en $\mathbb{R}^2$, si $A^H + (-1)^i A = 0$ entonces el producto interno de ambos miembros por A llevaría al absurdo $(-1)^i = 0$; por tanto

$$A^H + (-1)^i A \neq 0, \qquad i = 1, 2,$$

y dado que $A^H - A \neq A^H + A$, entonces las dos semirrectas en (1) son no degeneradas y no paralelas. Es decir, $\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$ es un ángulo no degenerado. Si hacemos

$$\Delta = \det \mathcal{Q}, \tag{4}$$

más adelante utilizaremos la expresión

$$(X\mathcal{Q}^{-1})^H = \Delta^{-1} X^H \mathcal{Q}, \tag{5}$$

para todo $X \in \mathbb{R}^2$. Ahora, si $(-1)^i t \leq 0$ entonces, según (2),

$$\begin{aligned}
\Phi(rA\mathcal{Q}^{-1} + t\{A^H + (-1)^i A\}\mathcal{Q}^{-1}) =& \\
=&|A^H\mathcal{Q}\{r\mathcal{Q}^{-1}A^T + t\mathcal{Q}^{-1}[A^{H^T} + (-1)^i A^T]\}| + \\
&+ A\mathcal{Q}\{r\mathcal{Q}^{-1}A^T + t\mathcal{Q}^{-1}[A^{H^T} + (-1)^i A^T]\} \\
=&|t| + r + (-1)^i t = |(-1)^i t| + r + (-1)^i t \\
=& -(-1)^i t + r + (-1)^i t = r, \qquad i = 1, 2;
\end{aligned}$$

esto nos permite afirmar que

$$\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2 \subseteq \boldsymbol{\mathcal{A}}, \tag{6}$$

siendo $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ el conjunto de nivel definido en (3).

Recíprocamente, sea $\Phi(X) = r$. Entonces

$$|A^H\mathcal{Q}X^T| = (-1)^i A^H\mathcal{Q}X^T \geq 0 \tag{7}$$

para algún $i \in \{1, 2\}$ que depende de X; así, y según (2), recibimos

$$(-1)^i A^H\mathcal{Q}X^T + A\mathcal{Q}X^T = r. \tag{8}$$

Además,

$$\begin{aligned}
\det(A\mathcal{Q}^{-1}, A^H\mathcal{Q}^{-1}) &= A\mathcal{Q}^{-}1 \cdot (A^H\mathcal{Q}^{-1})^H \\
&= A\mathcal{Q}^{-1} \cdot \Delta^{-1}(A^H)^H\mathcal{Q}, \qquad \text{(por (4) y (5))}, \\
&= \mathcal{Q}^{-1}A\mathcal{Q}^{-1}(-A\mathcal{Q})^T = -\Delta^{-1}\|A\|^2 = -\Delta^{-1} \neq 0;
\end{aligned}$$

entonces $\{A\mathcal{Q}^{-1}, A^H\mathcal{Q}^{-1}\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$, por lo cual existen escalares α y β tales que

$$X = rA\mathcal{Q}^{-1} + \alpha A\mathcal{Q}^{-1} + \beta A^H\mathcal{Q}^{-1}, \tag{9}$$

lo que implica

$$A^H\mathcal{Q}X^T = \beta \qquad \text{y} \qquad A\mathcal{Q}X^T = r + \alpha,$$

valores que sustituidos en (8) nos aportan

$$(-1)^i\beta + r + \alpha = r,$$

esto es, $\beta = (-1)^{i+1}\alpha$, y por (7), $(-1)^i\beta \geq 0$. Reemplazando en (9),

$$X = rA\mathcal{Q}^{-1} + (-1)^{i+1}\alpha\{A^H + (-1)^{i+1}A\}\mathcal{Q}^{-1},$$

o bien,

$$X = rA\mathcal{Q}^{-1} + (-1)^j\alpha\{A^H + (-1)^j A\}\mathcal{Q}^{-1},$$

dado el sutil hecho de que $(-1)^{i+1} = (-1)^j$ para algún $j \in \{1,2\}$, donde

$$(-1)^j \cdot (-1)^j\alpha = \alpha = (-1)^j\beta = -(-1)^i\beta \leq 0.$$

Se infiere que $X \in \mathcal{L}_j$, demostrándose así la contenencia

$$\boldsymbol{\mathcal{A}} \subseteq \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2.$$

De aquí y (6) concluimos que

$$\boldsymbol{\mathcal{A}} = \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2.$$

Percibiendo que $(A^H - A) \cdot (A^H + A) = 0$, si $\mathcal{Q}$ es la matriz unidad entonces $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ en (1) son ortogonales, es decir, A es un ángulo recto. En tal caso probaremos que la semirrecta $\mathcal{L} = \{tA \mid t \leq r\}$ es, en efecto, la bisectriz de $\boldsymbol{\mathcal{A}}$.

Sea $t < r$ y consideremos el punto

$$P_i = rA + \frac{(-1)^i}{2}(t-r)\{A^H + (-1)^i A\} \tag{10}$$

de la semirrecta $\mathcal{L}_i$. Entonces

$$(tA - P_i) \cdot \{A^H + (-1)^i A\} = 0, \qquad i = 1,2,$$

y por ende P_1 y P_2 son la proyecciones ortogonales del punto tA (en la semirrecta $\mathcal{L}$) sobre las semirrectas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$, respectivamente. Además,

$$\|tA - P_i\| = \frac{1}{2}(t-r)^2, \qquad i = 1,2.$$

En consecuencia los triángulos rectángulos

$$(rA)P_1(tA) \qquad \text{y} \qquad (rA)P_2(tA)$$

son congruentes, lo que implica la congruencia de los ángulos $\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}$ y $\mathcal{L}_2 \cup \mathcal{L}$. Esto significa que $\mathcal{L}$ es la bisectriz del ángulo $\boldsymbol{\mathcal{A}}$. ☑

2. *Una representación paramétrica del ángulo en* $\mathbb{R}^n$

Teorema 2.1. *Para $n \geq 2$, sean A, B y C vectores dados en $\mathbb{R}^n$, tales que A y B son unitarios y linealmente independientes. Consideremos las semirrectas*

$$\mathcal{L}_i = \{C + t[(-1)^i A + B] \mid (-1)^i t \geq 0\}, \qquad i = 1,2, \tag{11}$$

y

$$\mathcal{L} = \{C + t[(1 + \|A+B\|\,\|A-B\|^{-1})A + (1 - \|A+B\|\,\|A-B\|^{-1})B] \mid t \geq 0\}, \tag{12}$$

de punto inicial común C.

Si $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es la curva representada por

$$F(t) = |t|A + tB + C, \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{13}$$

entonces:

(i) $\mathcal{L}_1 = F((-\infty, 0])$ *y* $\mathcal{L}_2 = F([0, \infty))$*;*

(ii) la traza de F*, es decir,* $F(\mathbb{R})$*, es un ángulo plano. Explícitamente,*

$$F(\mathbb{R}) = \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2,$$

el ángulo plano no degenerado de vértice $C = F(0)$ *y lados las semirrectas* $\mathcal{L}_1$*,* $\mathcal{L}_2$*;*

(iii) la semirrecta $\mathcal{L}$ *es la bisectriz del ángulo* $F(\mathbb{R})$*;*

(iv) si A *y* B *son ortonormales, entonces* $F(\mathbb{R})$ *es un ángulo recto, caso en el cual tiene como bisectriz la semirrecta*

$$\mathcal{L} = \{C + 2tA \mid t \geq 0\} \tag{14}$$

(ver Figura 1).

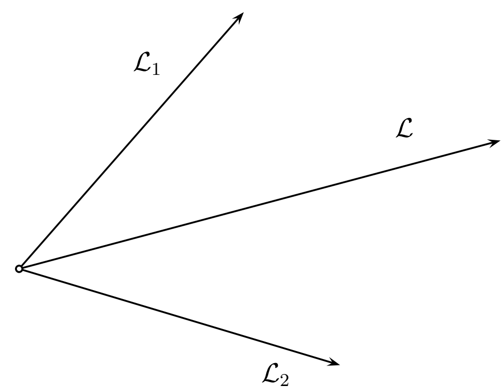

Figura 1. La semirrecta $\mathcal{L}$ es la bisectriz del ángulo $\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$, cuyo lado $\mathcal{L}_1$ tiene vector directo $(-1)^i A + B$.

Demostración. Por ser A y B linealmente independientes, debemos tener

$$(-1)^i A + B \neq 0, \qquad i = 1, 2.$$

Si $A + B = \alpha(-A + B)$ para algún escalar α, entonces

$$(\alpha + 1)A + (1 - \alpha)B = 0,$$

lo que implicaría $\alpha + 1 = 1 - \alpha = 0$, lo cual es imposible. Así que $-A + B$ y $A + B$ son vectores linealmente independientes. Igualmente, si

$$(1 + \|A + B\| \, \|A - B\|^{-1})A + (1 - \|A + B\| \, \|A - B\|^{-1})B = \beta\{(-1)^i A + B\}$$

para algún escalar β , entonces

$$\{1 + \|A + B\| \, \|A - B\|^{-1} - (-1)^i \beta\}A + \{1 - \|A + B\| \, \|A - B\|^{-1} - \beta\}B = 0,$$

de donde

$$\begin{cases} \|A+B\|\,\|A-B\|^{-1} = -1 + (-1)^i\beta, \\ \qquad\qquad \text{y} \\ \|A+B\|\,\|A-B\|^{-1} = 1-\beta, \end{cases} \tag{15}$$

infiriéndose así

$$\beta\{1+(-1)^i\} = 2. \tag{16}$$

Si $i=1$ la expresión (16) conduce a un absurdo. Y si $i=2$ obtenemos de (16) $\beta=1$, resultando (15) $\|A+B\|\,\|A-B\|^{-1}=0$, afirmación sólo posible si $\|A+B\|=0$, esto es, si $A+B=0$, lo cual ya establecimos, es imposible. Se infiere entonces que los vectores

$$(1+\|A+B\|\,\|A-B\|^{-1})A + (1-\|A+B\|\,\|A-B\|^{-1})B,$$
$$-A+B \qquad \text{y} \qquad A+B,$$

son, dos a dos, linealmente independientes, y por ende, las semirrectas $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ y $\mathcal{L}$ son no degeneradas y no paralelas. Y, en particular, el ángulo $\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$, de vértice C y lados $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$, no es degenerado.

Si $(-1)^i t \geq 0$, entonces

$$\begin{aligned} C + t\{(-1)^i A + B\} &= (-1)^i tA + tB + C \\ &= |(-1)^i t|A + tB + C = |t|A + tB + C, \end{aligned}$$

por lo cual, automáticamente, según (13) y (11),

$$\mathcal{L}_1 = F((-\infty,0]) \qquad \text{y} \qquad \mathcal{L}_2 = F([0,+\infty)).$$

Además,

$$F(\mathbb{R}) = F((\infty-,0]\cup[0,+)) = F((\infty-,0]) \cup F([0,+\infty)) = \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2.$$

Si A y B son ortonormales, entonces

$$(-A+B)\cdot(A+B) = -\|A\|^2 + \|B\|^2 = -1+1 = 0,$$

y de este modo los vectores directores de $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ son ortogonales, es decir, $f(\mathbb{R})$ es un ángulo recto.

A partir de este punto de la demostración, las relaciones

$$1+(-1)^i(A\cdot B) = \frac{1}{2}\|A+(-1)^i B\|^2, \qquad i=1,2, \tag{17}$$

serán de uso obligado. Si

$$P_1 = C + t(-A+B), \qquad t \leq 0,$$

es un punto arbitrario de la semirrecta $\mathcal{L}_1$, aplicando (17) puede probarse que

$$P_2 = C + (-t)\|A+B\|^{-1}\,\|A-B\|(A+B)$$

es un punto de la semirrecta $\mathcal{L}_2$, tal que

$$\frac{1}{2}(P_1+P_2)=C+\frac{(-t)}{2}\|A+B\|^{-1}\|A-B\|\{(1+\|A+B\|\,\|A-B\|^{-1})A+ \\ +(1-\|A+B\|\,\|A-B\|^{-1})B\}$$

es un punto de $\mathcal{L}$ y

$$(P_2-P_1)\cdot\{(1+\|A+B\|\,\|A-B\|^{-1})A+(1-\|A+B\|\,\|A-B\|^{-1})B\}=0.$$

Es decir, P_2 es la reflexión de P_1 a través de la semirrecta $\mathcal{L}$ (el espejo de la reflexión).

Recíprocamente, puede verificarse que si

$$\overline{P_2}=C+t(A+B), \qquad t\geq 0,$$

es un punto de $\mathcal{L}_2$, entonces

$$\overline{P_1}=C+(-t)\|A+B\|\,\|A-B\|^{-1}(-A+B)$$

es un punto de la semirrecta $\mathcal{L}_1$, tal que $\overline{P_1}$ es la reflexión de $\overline{P_2}$ en el espejo $\mathcal{L}$. En consecuencia, las semirrectas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ se reflejan mutuamente a través de la semirrecta $\mathcal{L}$, o equivalentemente, $\mathcal{L}$ es la bisectriz del ángulo $F(\mathbb{R})$.

Si A y B son ortonormales, se procede de (17) que

$$\|A+(-1)iB\|=\sqrt{2}, \qquad i=1,2,$$

y por esto (12) se reduce a (14). ☑

3. Geometría y representación cartesiana del ángulo diedro

Teorema 3.1. *Sean A y B vectores ortonormales en $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{Q}$ una matriz real simétrica, no singular de orden tres, y $\varphi:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}$ el campo escalar representado por*

$$\varphi(X)=|A\mathcal{Q}X^T|+B\mathcal{Q}X^T, \tag{18}$$

para todo $X\in\mathbb{R}^3$. Sea r un número real, y consideremos los semiplanos cerrados, no paralelos,

$$\mathcal{H}_i=\{X\in\mathbb{R}^3 \mid (-1)^i\,A\mathcal{Q}X^T\geq 0 \;\; y \;\; [A+(-1)^iB]\mathcal{Q}X^T=(-1)^ir\},\; i=1,2, \tag{19}$$

y la recta, no degenerada,

$$\mathcal{L}=\{rB\mathcal{L}^{-1}+t(A\mathcal{Q})x(B\mathcal{Q}) \mid t\in\mathbb{R}\}. \tag{20}$$

Entonces,

(i) $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2 \neq \emptyset$.

(ii) Los conjuntos de nivel de φ *son ángulos diedros. Más exactamente,*

$$\varphi^{-1}(r) = \mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2 \tag{21}$$

es el ángulo diedro no degenerado, de arista $\mathcal{L}$ *y caras los semiplanos* $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ *(ver Figura 2).*

(iii) Si $\mathcal{Q}$ *es la matriz identidad, entonces* $\varphi^{-1}(r)$ *es un ángulo diedro recto.*

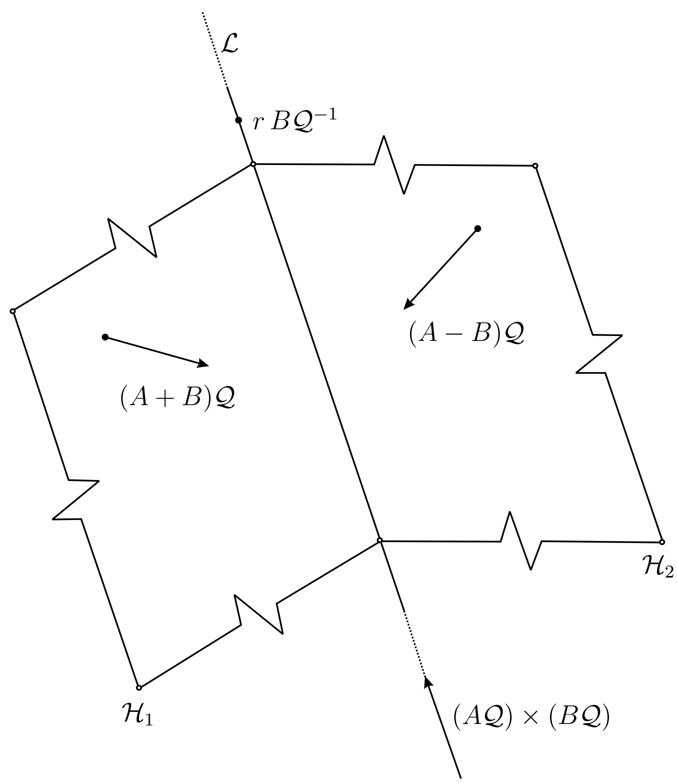

Figura 2. El ángulo diedro no degenerado $\varphi^{-1}(r) = \mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2$ de caras $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ y $\mathcal{L}$.

Demostración. Puesto que A y B son vectores linealmente independientes (por ser ortonormales) en $\mathbb{R}^3$, entonces A, B, $A-B$ y $A+B$ también lo son, dos a dos, y por ende

$$A\mathcal{Q}, \qquad B\mathcal{Q}, \qquad (A-B)\mathcal{Q}, \qquad (A+B)\mathcal{Q},$$

son, igualmente, linealmente independientes, dos a dos, por ser $\mathcal{Q}$ una matriz no singular. Por esto $(A\mathcal{Q}) \times (B\mathcal{Q}) \neq 0$, y los planos

$$\mathcal{G} = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid A\mathcal{Q}X^T = 0\}$$

y

$$\mathcal{G}_i = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid \{A + (-1)^i B\}\mathcal{Q}X^T = (-1)^i r\},$$

son no paralelos y diferentes entre sí, y son tales que, si $\mathcal{L}$ es la recta no degenerada representada en (20), entonces

$$\mathcal{L} \subseteq \mathcal{G} \qquad \text{y} \qquad \mathcal{L} \subseteq \mathcal{G}_i, \qquad i = 1, 2,$$

lo que implica

$$\mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2 = \mathcal{G} \cap \mathcal{G}_i = \mathcal{L}, \qquad i = 1, 2,$$

dado que una recta está en dos planos diferentes sólo si es su intersección. Así, los semiplanos $\mathcal{H}_i$ definidos en (19) (la intersección del plano $\mathcal{G}_i$ con un semiespacio cerrado de $\mathcal{G}$), satisfacen $\mathcal{H}_i \subseteq \mathcal{G}_1$, $i = 1, 2$, y se intersecan en $\mathcal{L}$, por lo cual, si

$$\mathcal{D} = \mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2, \tag{22}$$

entonces $\mathcal{D}$ es el ángulo diedro, no degenerado, de arista $\mathcal{L}$ y caras los semiplanos cerrados $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$.

Teniendo presente (22), la equivalencia

$$X \in \mathcal{D}, \quad \text{si y sólo si,} \quad X \in \mathcal{H}_i \quad \text{para algún} \quad i = 1, 2,$$

implica la condición en (19) que caracteriza a $\mathcal{H}_i$, la cual a su vez, es equivalente a

$$(-1)^i A\mathcal{Q}X^T \geq 0 \qquad \text{y} \qquad (-1)^i A\mathcal{Q}X^T + B\mathcal{Q}X^T = r,$$

lo que implica

$$|(-1)^i A\mathcal{Q}X^T| + B\mathcal{Q}X^T = r,$$

o bien, según (18), $\varphi(X) = r$. Se sigue la contenencia

$$\mathcal{D} \subseteq \varphi^{-1}(r). \tag{23}$$

Recíprocamente, si $X \in \varphi^{-1}(r)$ entonces, según (18),

$$\varphi(X) = |A\mathcal{Q}X^T| + B\mathcal{Q}X^T = r, \tag{24}$$

pero de acuerdo a la noción de valor absoluto,

$$|A\mathcal{Q}X^T| = (-1)^i A\mathcal{Q}X^T \geq 0, \tag{25}$$

para algún i en $\{1, 2\}$ que depende de X. Se infiere de (24) y (25), que

$$(-1)^i A\mathcal{Q}X^T + B\mathcal{Q}X^T = (-1)^i\{A + (-1)^i B\}\mathcal{Q}X^T = r,$$

o equivalentemente,

$$\{A + (-1)^i B\}\mathcal{Q}X^T = (-1)^i r.$$

De esta expresión, (25) y (19), podemos afirmar que $X \in \mathcal{H}_i$. De ahí la contenencia

$$\varphi^{-1}(r) \subseteq \mathcal{D},$$

teniendo en mente (22). De esta inclusión y de (23) concluimos, finalmente, la afirmación en 21.

Si $\mathcal{Q}$ es la matriz identidad, entonces $\{A+(-1)^iB\}\mathcal{Q} = A+(-1)iB$ es un vector normal del plano $\mathcal{G}_i$, donde

$$(A-B)\cdot(A+B) = \|A\|^2 - \|B\|^2 = 1-1 = 0.$$

Es decir, $\mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_2$ son planos perpendiculares y $\varphi^{-1}(r)$ es, en este caso, un ángulo diedro recto. ☑

4. Parametrización y topología del ángulo diedro

Teorema 4.1. *Sean A, B, C y D vectores dados en $\mathbb{R}^3$, tales que*

$$\Delta = \det(A,B,C) \neq 0. \tag{26}$$

Consideremos, en $\mathbb{R}^2$ la recta

$$L = \{(u,v)|u+v=0\}, \tag{27}$$

que es la frontera de los semiplanos cerrados

$$H_i = \{(u,v) \mid (-1)^i(u+v) \geq 0\}; \tag{28}$$

y en $\mathbb{R}^3$ los semiplanos cerrados, no paralelos,

$$\mathcal{H}_i = \{X \mid (X-D)\cdot[(-1)^iA+B]\times[(-1)^iA+C] = 0 \quad y \quad (-1)^{i+j}(X-D)\cdot A\times(B-C) \geq 0\}, \tag{29}$$

para todo $i=1,2$, donde

$$j = \begin{cases} 1, & si\ \Delta < 0 \\ 2, & si\ \Delta > 0, \end{cases} \tag{30}$$

además de la recta, no degenerada

$$\mathcal{L} = \{D + t(B-C) \mid t \in \mathbb{R}\}. \tag{31}$$

Si $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es la función definida por

$$f(u,v) = |u+v|A + uB + vC + D, \tag{32}$$

para todo $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, expresión que representa vectorialmente una superficie en $\mathbb{R}^3$, entonces:

(i) $\mathcal{L} = f(L)$;

(ii) $\mathcal{H}_i = f(H_i)$, $i=1,2$;

(iii) $\mathcal{H}_i \cap \mathcal{H}_2 = \mathcal{L}$, *siendo $\mathcal{L}$ la frontera relativa de ambos semiplanos;*

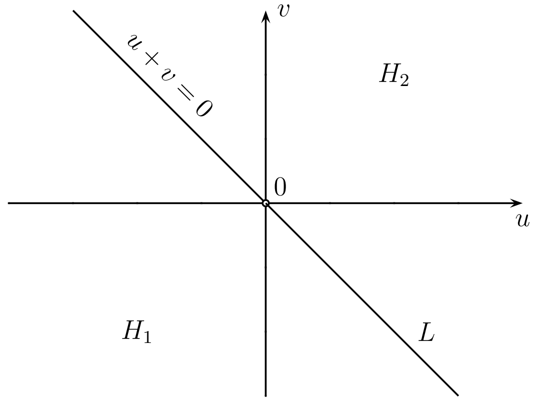

Figura 3. $f(\mathbb{R}^2)$ es el ángulo diedro de arista $f(L)$ y caras $f(H_1)$ y $f(H_2)$.

(iv) la traza de f, es decir, $f(\mathbb{R}^2)$, es un ángulo diedro. Específicamente,

$$f(\mathbb{R}^2) = \mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2$$

es el ángulo diedro no degenerado, de arista $\mathcal{L}$ y caras los semiplanos $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ (ver Figura 3).

Demostración. Se sigue de (26) que los vectores A, B y C son linealmente independientes en $\mathbb{R}^3$, por lo cual $B - C \neq 0$ y la recta $\mathcal{L}$ en (31) es no degenerada.

Además, teniendo presente la identidad vectorial

$$(A \times B) \times (C \times D) = (A \times B \cdot D)C - (A \times B \cdot C)D,$$

obtenemos

$$\begin{aligned}
&\{A\times(B-C)\} \times \{[(-1)^i A + B] \times [(-1)^i A + C]\} \\
&\quad = \det(A, B - C, (-1)^i A + C)\{(-1)^i A + B\} \\
&\qquad - \det(A, B - C, (-1)^i A + B)\{(-1)^i A + C\} \\
&\quad = \det(A, B - C, C)\{(-1)^i A + B\} - \det(A, B - C, B)\{(-1)^i A + C\} \\
&\qquad\qquad \text{(sumando a la tercera fila la primera multiplicada por } (-1)^{i+1}) \\
&\quad = \det(A, B, C)\{(-1)^i A + B\} + \det(A, C, B)\{(-1)^i A + C\} \\
&\quad = \Delta\{(-1)^i A + B\} - \Delta\{(-1)^i A + C\} \qquad \text{(por (26))} \\
&\quad = \Delta(B - C) \neq 0, \qquad i = 1, 2,
\end{aligned}$$

y análogamente se demuestra que

$$\{(-A + B) \times (-A + C)\} \times \{(A + B) \times (A + C)\} = 2\Delta(B - C) \neq 0.$$

Se infiere que los vectores

$$A \times (B - C), \qquad (-A + B) \times (-A + C) \quad \text{y} \quad (A + B) \times (A + C)$$

son, dos a dos, linealmente independientes, y así

$$\mathcal{F} = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid (X - D) \cdot A \times (B - C) = 0\} \tag{33}$$

y

$$\mathcal{G}_i = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid (X - D) \cdot [(-1)^i A + B] \times [(-1)^i A + C] = 0\}, \quad i = 1, 2, \tag{34}$$

son planos no paralelos y diferentes entre sí, tales que

$$\mathcal{L} \subseteq \mathcal{F} \quad \text{y} \quad \mathcal{L} \subseteq \mathcal{G}_i, \qquad i = 1, 2,$$

y por ende,

$$\mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2 = F \cap \mathcal{G}_1 = L, \qquad i = 1, 2, \tag{35}$$

por el hecho de que una recta está en planos diferentes, sólo si es su intersección. Notando que

$$\mathcal{F}_i = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid (-1)^{i+j}(X - D) \cdot A \times (B - C) \geq 0\}, \qquad i = 1, 2, \tag{36}$$

son los semiespacios cerrados del plano $\mathcal{F}$ definido en (33), entonces

$$\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 = \mathcal{F}, \tag{37}$$

por lo cual, según (29) y (34),

$$\mathcal{H}_i = \mathcal{G}_i \cap \mathcal{F}_i, \qquad i = 1, 2, \tag{38}$$

de donde

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2 &= (\mathcal{G}_1 \cap \mathcal{F}_1) \cap (\mathcal{G}_2 \cap \mathcal{F}_2) = (\mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2) \cap (\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2) \\ &= (\mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2) \cap \mathcal{F} && \text{(por (37))} \\ &= (\mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2) \cap (\mathcal{F} \cap \mathcal{G}_i) = \mathcal{L}. && \text{(por (35))} \end{aligned}$$

Ahora, es rutinario verificar que el punto

$$P_i = 2A + (-1)^i (B + C) + D,$$

satisface las relaciones

$$(P_i - D) \cdot \{(-1)^i A + B\} \times \{(-1)^i A + C\} = 0$$

y

$$(-1)^{i+j}(P_i - D) \cdot A \times (B - C) > 0,$$

teniendo presente (30); esto es, P_i es un *punto común* a los interiores relativos de los conjuntos convexos $\mathcal{G}_i$ y $\mathcal{F}_i$. Por esto, y percibiendo además que $\mathcal{H}_i$ es un conjunto cerrado (por (38) es la intersección de dos cerrados), se sigue de [2, pp. 44, 47, Theorem 6.5], que

$$\begin{aligned}
\text{Frontera relativa de } \mathcal{H}_i &= \text{ clausura de } \mathcal{H}_i \sim (\text{interior relativo de } \mathcal{H}_i\ ) \\
&= \mathcal{G}_i \cap \mathcal{F}_i \sim (\text{interior relativo de } \mathcal{G}_i) \cap (\text{interior relativo de } \mathcal{F}_i\ ) \\
&= \mathcal{G}_i \cap \mathcal{F}_i \sim \mathcal{G}_i \cap (\text{interior relativo de } \mathcal{F}_i) \\
&= \mathcal{G}_i \cap \{\mathcal{F}_i \sim (\text{interior relativo de } \mathcal{F}_i)\} \\
&= \mathcal{G}_i \cap (\text{frontera } \mathcal{F}_i) \\
&= \mathcal{G}_i \cap \mathcal{F} = \mathcal{L} \qquad\qquad (\text{por } (35))
\end{aligned}$$

para todo $i = 1, 2$. Esto nos permite afirmar que $\mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2$ es un ángulo diedro no degenerado, de arista $\mathcal{L}$ y caras $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$.

Remitiéndonos a (27), (31) y (32), las expresiones

$$f(u, -u) = D + u(B - C) \in \mathcal{L}$$

y

$$D + t(B - C) = |t + (-t)|A + tB + (-t)C + D = f(t, -t) \in f(L),$$

para todo $(u, t) \in \mathbb{R}^2$, implican

$$f(L) \subseteq \mathcal{L} \qquad \text{y} \qquad \mathcal{L} \subseteq f(L),$$

esto es, $\mathcal{L} = f(L)$.

Si $(u, v) \in H_i$, siendo H_i el semiplano cerrado en (28), entonces

$$\begin{aligned}
f(u, v) &= |u + v|A + uB + vC + D \\
&= |(-1)^i(u + v)|A + uB + vC + D \\
&= (-1)^i(u + v)A + uB + vC + D \\
&= u\{(-1)^i A + B\} + v\{(-1)^i A + C\} + D;
\end{aligned}$$

de este modo, puede comprobarse fácilmente que $f(u, v)$ satisface las dos relaciones que definen a $\mathcal{H}_i$ en (29), de ahí la contenencia

$$f(H_i) \subseteq \mathcal{H}_i. \tag{39}$$

De acuerdo con (26), el conjunto $\{A, B, C\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$, por lo cual, si $X \in \mathcal{H}_i$ entonces existen escalares w, u y v, tales que

$$X - D = wA + uB + vC.$$

Así, a la luz de (39), $X \in \mathcal{H}_i$ si y sólo si

$$\begin{cases}
(wA + uB + vC) \cdot \{(-1)^i A + B\} \times \{(-1)^i A + C\} = 0, \\
\qquad\qquad\qquad \text{y} \\
(-1)^{i+j}(wA + uB + vC) \cdot A \times (B - C) \geq 0,
\end{cases}$$

sí y sólo sí

$$w = (-1)^i(u + v) \quad \text{y} \quad (-1)^i(u + v) \geq 0,$$

lo que implica

$$\begin{aligned} X &= (-1)^i(u+v)A + uB + vC + D \\ &= |u+v|A + uB + vC + D \;=\; f(u,v) \in f(H_i), \end{aligned}$$

arribando a la contenencia

$$\mathcal{H}_i \subseteq f(H_i).$$

De aquí y de (39) concluimos que

$$\mathcal{H}_i = f(H_i), \quad i = 1, 2.$$

Finalmente, la representación $\mathbb{R}^2 = H_1 \cup H_2$ nos aporta

$$f(\mathbb{R}^2) = f(H_1) \cup f(H_2) = \mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2. \qquad ☑$$

Referencias

[1] GANS David. *An Introduction to Non-Euclidean Geometry.* Academic Press New York, San Francisco, London, 1973.

[2] ROCKAFELLAR Ralph T. *Convex Analysis.* Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1972.

LUIS ENRIQUE RUIZ HERNÁNDEZ
Departamento de Matemáticas
Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia
Duitama, Boyacá, Colombia.
e-mail: leruizh@yahoo.es