# Elementos ordinables en el retículo de topologías

**Néstor Raúl Pachón**[1]

*Departamento de Matemáticas*
*Escuela Colombiana de Ingeniería*

*Departamento de Matemáticas*
*Universidad Nacional de Colombia*

Se muestran algunas propiedades de los elementos ordinables en el retículo de topologías, que tienen que ver fundamentalmente con la estructura y el tamaño del conjunto de sucesores de un elemento ordinable. Estas propiedades contribuyen, no sólo a ampliar el conocimiento de este retículo, sino que también proponen una línea de investigación en el tema, por cuanto hay muchas preguntas para las que aún no se tiene respuesta.

Palabras claves: conjuntos ordenados, retículos, retículos relativamente complementados, retículos booleanos, ultratopologías, números ordinales.

We exhibit some properties of the ordinable elements in the topology lattice which are related with the structure and size of the set of succesors in an ordinable set. These properties contribute, not only to expand the knowledge of this lattice, but they also offer a research line in this subject, for which there are still many questions waiting for an answer.

Keywords: ordered sets, lattices, relatively complemented lattices, Boolean lattices, ultratopologies, ordinal numbers.

MSC: 06A11, 54A10.

[1] `nestor.pachon@escuelaing.edu.co, nrpachonr@unal.edu.co`

# 1 Introducción

El concepto de *elemento ordinable en un conjunto ordenado* fue introducido por el autor en su tesis doctoral [7], y su estudio se concentró allí en un caso particular, en el que el conjunto subyacente es el conjunto de topologías sobre un conjunto infinito, dotado de un orden que está contenido en la relación de inclusión. No parecía natural en ese momento considerar aquel orden, teniendo a la mano el orden de la inclusión, y sobre el cual, al respecto, no se había dicho mayor cosa. En este artículo se presentan algunas propiedades de los elementos ordinables en el retículo de topologías sobre un mismo conjunto base como una invitación a que el estudio sea ampliado y a que un estudio similar se haga en otros conjuntos ordenados de interés y de uso frecuente en matemáticas.

En este artículo nos ocuparemos de dar respuestas parciales a preguntas naturales como: si $\Omega$ es una topología ordinable en el retículo de topologías sobre el conjunto $X$, ¿cuántos sucesores tiene $\Omega$?, ¿qué estructura tiene el conjunto ordenado de los sucesores de $\Omega$?, ¿qué información se puede dar acerca del número ordinal asociado con $\Omega$?

# 2 Elementos ordinables en un conjunto ordenado

Los conceptos básicos acerca de conjuntos ordenados que serán usados en este trabajo se suponen conocidos por el lector, el cual puede encontrar material suficiente en las referencias [2] y [5].

En esta sección definimos lo que entendemos por elemento ordinable en un conjunto ordenado y mencionamos algunas de sus propiedades básicas.

Sea $(A, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Mediante el proceso de derivación de Cantor, asociamos a cada número ordinal $\alpha$ un subconjunto $(A, \leq)_\alpha$ de $A$, de manera tal que $(A, \leq)_0$ es el conjunto de elementos maximales de $(A, \leq)$.

Si $\alpha > 0$, entonces $(A, \leq)_\alpha$ es el conjunto de elementos maximales del conjunto $A \setminus \bigcup\limits_{\beta<\alpha} (A, \leq)_\beta$, con el orden inducido por $\leq$. Por simplicidad, al conjunto $(A, \leq)_\alpha$ lo llamaremos *el nivel* $\alpha$ de $(A, \leq)$. Un elemento $a \in A$ será llamado *ordinable* si existe un ordinal $\alpha$ (necesariamente único) tal que $a \in (A, \leq)_\alpha$. En este caso escribiremos $O(A) = \alpha$. Al menor número ordinal $\alpha$ para el cual $(A, \leq)_\alpha = \varnothing$, lo denotaremos por $O(A, \leq)$.

Se verifica muy fácilmente que si $a$ es ordinable en $(A, \leq)$ y $a \leq b$, entonces $b$ es ordinable. Más aun, si $a \in (A, \leq)_\alpha$ y si $b \in (A, \leq)_\beta$, entonces se tiene que $\beta$ es menor o igual a $\alpha$. Por otra parte, si $a \in (A, \leq)_\alpha$ y $\delta$ es un ordinal menor o igual a $\alpha$, entonces existe $c \in (A, \leq)_\delta$ tal que $a \leq c$. Este último resultado se puede demostrar mediante inducción transfinita sobre $\alpha$.

También se tiene que $O(A, \leq) < \mathrm{card}(\mathcal{P}(A))$, donde $\mathcal{P}(A)$ es el conjunto de todos los subconjuntos de $A$. En efecto, supongamos que $\mathrm{card}(\mathcal{P}(A)) \leq O(A, \leq)$. Para cada ordinal $u < \mathrm{card}(\mathcal{P}(A))$ existe $a_u \in (A, \leq)_u$. Es claro que si $u$ y $v$ son ordinales diferentes y menores que $\mathrm{card}(\mathcal{P}(A))$, entonces $a_u \neq a_v$. Como

$$\{a_u : u < \mathrm{card}(\mathcal{P}(A))\} \subseteq A\,,$$

se tiene que $\mathrm{card}\,\{a_u : u < \mathrm{card}(\mathcal{P}(A))\} \leq \mathrm{card}(A) < \mathrm{card}(\mathcal{P}(A)) = \mathrm{card}\,\{a_u : u < \mathrm{card}(\mathcal{P}(A))\}$; contradicción.

**Ejemplos**:

**1.** Si en el conjunto $\mathbb{Z}^+$ de los enteros positivos consideramos el orden $\leq$ de la divisibilidad, es claro que para todo ordinal $\alpha$, $(\mathbb{Z}^+, \leq)_\alpha = \varnothing$, con lo que no se tienen elementos ordinables. Por otra parte, si en el conjunto $\mathbb{Z}^+$ se considera el orden $\preceq$, el inverso del orden de la divisibilidad, entonces $O\left(\mathbb{Z}^+, \preceq\right) = \omega$, donde $\omega$ es el primer ordinal infinito. Además, $\left(\mathbb{Z}^+, \preceq\right)_0 = \{1\}$, y si $n \in \mathbb{Z}^+$, entonces

$$\left(\mathbb{Z}^+, \preceq\right)_n = \left\{m \in \mathbb{Z}^+ : m \,\text{es el producto de}\, n \,\text{números primos}\right\}\,.$$

**2.** Sea $\leq = \{(n, m) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ : n \,\text{divide a}\, m\}$. Sobre el conjunto $A = \mathbb{Z}^+ \cup \left\{\sqrt{2}, \sqrt{3}\right\}$ consideramos el orden parcial $\preceq$ definido como la unión de $\leq$ y $\left\{\left(1, \sqrt{2}\right), \left(1, \sqrt{3}\right), \left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right), \left(\sqrt{3}, \sqrt{3}\right)\right\}$. Se tiene que $(A, \preceq)_0 = \left\{\sqrt{2}, \sqrt{3}\right\}$ y $(A, \preceq)_\alpha = \varnothing$, para todo ordinal $\alpha > 0$. Nótese que en el conjunto ordenado $(A, \preceq)$, el extremo inferior de $\left\{\sqrt{2}, \sqrt{3}\right\}$ es 1.

**3.** Si $X$ es un conjunto infinito y si sobre el conjunto $\mathcal{P}(X)$ de los subconjuntos de $X$ consideramos el orden $\subseteq$ de la inclusión, entonces para cada entero $n \geq 0$, se tiene que

$$(\mathcal{P}(X), \subseteq)_n = \{Y \subseteq X : X \backslash Y \,\text{tiene cardinal}\, n\}\,.$$

Ahora, si $Y \subseteq X$ es tal que $X \backslash Y$ es infinito, y si $a \in X \backslash Y$, entonces se tiene que $Y \subseteq Y \cup \{a\}$ y $Y \cup \{a\} \in \mathcal{P}(X) \backslash \bigcup_{\beta<\omega} (\mathcal{P}(X), \subseteq)_\beta$, con lo que $Y$ no es maximal en el conjunto ordenado

$$\left\{ \mathcal{P}(X) \backslash \left( \bigcup_{\beta<\omega} (\mathcal{P}(X), \subseteq)_\beta \right), \subseteq \right\},$$

donde $\omega$ es el menor ordinal transfinito. Por lo tanto $(\mathcal{P}(X), \subseteq)_\omega = \varnothing$, con lo cual tenemos que $(\mathcal{P}(X), \subseteq)_\alpha = \varnothing$, para todo ordinal $\alpha \geq \omega$. En consecuencia, $O(\mathcal{P}(X), \subseteq) = \omega$.

**4.** Sea $(A, \leq)$ un conjunto ordenado y sea $a$ un elemento ordinable de $(A, \leq)$, digamos $a \in (A, \leq)_\alpha$, para algún ordinal $\alpha$. Supongamos que $X$ es un conjunto que contiene a $A$ y que $u, v \in X \backslash A$, con $u \neq v$. Sobre el conjunto $B = A \cup \{u, v\}$ consideremos la relación de orden $\lesssim$, definida como la unión de $\leq$ y $\{(a, u), (a, v), (u, u), (v, v)\}$. Entonces, $u, v \in (B, \lesssim)_0$, el extremo inferior de $\{u, v\}$ en $(B, \lesssim)$ es $a$ y, además, $a \in (B, \lesssim)_1$ si $\alpha = 0$ y $a \in (B, \lesssim)_\alpha$ si $\alpha > 0$.

**5.** Sea $\alpha > 0$ un número ordinal y sea $A$ el conjunto de los números ordinales que son menores que $\alpha$. En $A$ consideremos el orden usual $\leq$ entre números ordinales. Si $\alpha$ es un ordinal límite, entonces se tiene que $O(A, \leq) = 0$. Si $\alpha$ no es un ordinal límite, entonces existe un ordinal límite $\lambda$ y un número natural $n > 0$ (únicos) tales que $\alpha = \lambda + n$. Entonces $O(A, \leq) = n$.

**6.** En el conjunto $A = \{u : u \text{ es ordinal y } u < \omega + 1\}$ consideremos el orden $\preceq$, que es el inverso del orden usual entre números ordinales. Entonces $O(A, \preceq) = \omega + 1 > \omega = \operatorname{card}(A)$.

**7.** (El ejemplo inspirador.) Sea $X$ un conjunto infinito. Sobre el conjunto $\operatorname{Top}(X)$ de topologías sobre $X$ consideremos la relación de orden parcial $\preceq$ dada por $\tau \preceq \beta$ si y sólo si $\tau \subseteq \beta$ y el morfismo $j : (\tau, \subseteq) \to (\beta, \subseteq)$, dado por $j(U) = U$, para todo $U \in \tau$, admite adjunto a la izquierda.

En [7] se demuestran, entre otros, los siguientes resultados:

**i.** $(\operatorname{Top}(X), \preceq)_0$ está constituido por las topologías $T_1$ en $X$.

**ii.** $2^{\operatorname{card}(X)} \leq O(\operatorname{Top}(X), \preceq) \leq 2^{2^{\operatorname{card}(X)}}$.

**iii.** Para todo ordinal $\alpha < O(\mathrm{Top}(X), \preceq)$, se tiene que

$$\mathrm{card}((\mathrm{Top}(X), \preceq)_\alpha) \geq \mathrm{card}(X)\,.$$

**iv.** Si $\tau \in \mathrm{Top}(X)$ es ordinable entonces el conjunto

$$\{\beta \in \mathrm{Top}(X) : \tau \preceq \beta\}\,,$$

es un retículo completo, con el orden inducido por $\preceq$, y

$$\mathrm{card}\{\beta \in \mathrm{Top}(X) : \tau \preceq \beta\} \leq 2^{\mathrm{card}(X)}\,.$$

**v.** $\tau \in \bigcup\limits_{n<\omega} (\mathrm{Top}(X), \preceq)_n$ si y sólo si el conjunto

$$Pol(\tau) = \{x \in X : \{x\} \,\text{no es cerrado en}\, (X, \tau)\}\,,$$

es finito y, para todo $x \in \mathrm{Pol}(\tau)$, la adherencia del conjunto $\{x\}$ en $(X, \tau)$ es un conjunto finito.

Del ejemplo **2** se sigue que en un conjunto ordenado es posible que dos elementos sean ordinables y que exista el extremo inferior entre ellos, pero que éste no sea ordinable. En el ejemplo **4** se evidencia que si en un conjunto ordenado dos elementos son ordinables, al igual que el extremo inferior entre ellos, entonces puede no haber ninguna relación entre los niveles en los que se encuentran estos tres elementos.

En la siguiente proposición se presenta una condición suficiente para que un elemento de un conjunto ordenado sea ordinable.

**Proposición 2.1.** Si $(A, \leq)$ es un conjunto ordenado y si $a \in A$ es tal que el conjunto $[a)_\leq = \{b \in A : a \leq b\}$ es un conjunto finito, entonces $a$ es ordinable y $O(a) < \omega$, siendo $\omega$ el primer ordinal infinito.

**Demostración.** Supongamos que $a$ no es ordinable, es decir que $a$ no es maximal en el conjunto $A \setminus \bigcup\limits_{\alpha<O(A,\leq)} (A, \leq)_\alpha$. Entonces existe

$$b \in A \setminus \bigcup_{\alpha<O(A,\leq)} (A, \leq)_\alpha\,,$$

con $a < b$. Esto significa que existe $b \in A$, no ordinable, con $a < b$. Esto conduce a que el conjunto $[a)_\leq$ es infinito, lo que va en contra de la hipótesis. Ahora, para cada ordinal $\delta < O(a)$ existe $h_\delta \in A$ con $a < h_\delta$ y $h_\delta \in (A, \leq)_\delta$. Esto implica que $O(a) < \omega$, puesto que $[a)_\leq$ es finito. $\square$

# 3 Elementos ordinables en el retículo de topologías

El propósito de esta sección es mostrar propiedades importantes de los elementos ordinables en el retículo de topologías sobre un mismo conjunto base. Los principales resultados son los que se enuncian en los teoremas 3.3, 3.5, 3.6 y el corolario 3.10.

Si $X$ es un conjunto, en el retículo $(\mathrm{Top}(X), \subseteq)$ se tiene que

$$(\mathrm{Top}(X), \subseteq)_0 = \{\mathcal{P}(X)\},$$

donde $\mathcal{P}(X)$ es la topología discreta y, de acuerdo con un resultado de Fröhlich [4], se deduce que $(\mathrm{Top}(X), \subseteq)_1$ está constituido por las ultratopologías en $X$, las cuales tienen la forma $\mathcal{P}(X\backslash\{a\}) \cup \mathcal{U}$, donde $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro sobre $X$, con $\{a\} \notin \mathcal{U}$. No se conoce ninguna otra información con respecto a otros elementos ordinables en este retículo.

En esta sección se encuentran características de los elementos ordinables y se demuestra que si $X$ es infinito, entonces para todo ordinal $\alpha < \omega$ el conjunto $(\mathrm{Top}(X), \subseteq)_\alpha$ es no–vacío. Para ordinales mayores aún no tenemos respuesta.

El punto de vista desde el cual analizamos este retículo enriquece en buena medida el conocimiento que se tiene acerca del mismo, sobre el que se han hecho investigaciones importantes, como se puede apreciar en los trabajos [1, 3, 6, 8, 9, 10].

En la siguiente nota se resaltan algunas propiedades "internas" de las ultratopologías. Estas propiedades se generalizarán más adelante para otras topologías ordinables.

**Nota 3.1.** Sea $X$ un conjunto no–vacío. Supongamos que $a \in X$ y que $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro sobre $X$, con $\{a\} \notin \mathcal{U}$. Sean $\beta = \mathcal{P}(X\backslash\{a\}) \cup \mathcal{U}$ y $\mathcal{C} = \{V \in \beta : a \in V\} = \{V \in \mathcal{U} : a \in V\}$.

Se tiene que:

**1.** $\{a\} \notin \beta$ y para todo $b \in X\backslash\{a\}$, $\{b\} \in \beta$.

**2.** La cardinalidad del conjunto $\bigcap\limits_{V\in\mathcal{C}} V$ es a lo sumo 2.

**3.** Si $\mathcal{U}$ es principal, la cardinalidad del conjunto $\bigcap\limits_{V\in\mathcal{C}} V$ es 2. Además, si $\mathcal{U}$ es generado por $b \in X$, entonces, en el espacio $(X, \beta)$,

$$\overline{\{d\}} = \begin{cases} \{d\} & , \quad \text{si } d \neq b, \\ \{a,\, d\} & , \quad \text{si } d = b. \end{cases} .$$

**4.** Si $\mathcal{U}$ no es principal, entonces el espacio $(X, \beta)$ es $T_1$ y $\mathcal{U}$ no tiene elementos finitos.

**5.** Si $\mathcal{U}$ no es principal, entonces el conjunto $\mathcal{C}$ no tiene elemento mínimo y $\bigcap_{V \in \mathcal{C}} V = \{a\}$.

En la siguiente proposición se empiezan a encontrar caraterísticas de los elementos ordinables en $(\mathrm{Top}(X), \subseteq)$ y se generaliza la propiedad mencionada en la parte 1 de la nota 3.1.

**Proposición 3.2.** Si $\beta$ es ordinable en $(\mathrm{Top}(X), \subseteq)$, entonces el conjunto

$$A_\beta = \{x \in X : \{x\} \notin \beta\}\,,$$

es finito.

**Demostración**: Por inducción sobre $O(\beta)$. Para $O(\beta) = 0$ el resultado se tiene ya que en ese caso $\beta = \mathcal{P}(X)$.

Supongamos que la afirmación es cierta para toda topología ordinable $\lambda \in \mathrm{Top}(X)$ con $O(\lambda) = \theta$, donde $0 \leq \theta < \alpha$, y que $\beta \in (\mathrm{Top}(X), \subseteq)_\alpha$. Sea $a \in X$ con $\{a\} \notin \beta$. El conjunto $\beta \cup \{\{a\}\}$ es base para una topología $\beta_a$ de $X$. Ya que $\beta_a$ contiene propiamente a $\beta$, existe un ordinal $\sigma < \alpha$ tal que $\beta_a \in (\mathrm{Top}(X), \subseteq)_\sigma$. Por la hipótesis inductiva, $\{x \in X : \{x\} \notin \beta_a\}$ es finito, y ya que $\{x \in X : \{x\} \notin \beta\} = \{x \in X : \{x\} \notin \beta_a\} \cup \{a\}$, se sigue que $\{x \in X : \{x\} \notin \beta\}$ es finito. $\square$

Un corolario evidente de la proposición 3.2 es que si $X$ es infinito, entonces en $(\mathrm{Top}(X), \subseteq)$ no toda topología es ordinable. Por otra parte, el recíproco de esta proposición no se tiene, como se concluirá de la proposición 3.4.

Vamos a mostrar ahora una primera colección de elementos ordinables en el retículo de topologías. Todas las topologías que exhibe el teorema 3.3 son de Alexandroff, es decir, topologías en las cuales la intersección de abiertos es un abierto.

**Notación.** Sea $X$ un conjunto no–vacío y $a \in B \subseteq X$. Con $X(a, B)$ denotaremos la topología $\mathcal{P}(X \backslash \{a\}) \cup \{D \subseteq X : B \subseteq D\}$.

**Teorema 3.3.** Sea $X$ un conjunto no–vacío y $a \in B \subseteq X$, con $B$ finito. Se tiene que $X(a, B) \in (\text{Top}(X), \subseteq)_{\text{card}(B)-1}$. Si $X$ es infinito, entonces, para todo ordinal $\alpha < \omega$, el conjunto $(\text{Top}(X), \subseteq)_\alpha$ no es vacío.

**Demostración.** Por inducción sobre card$(B)$. Es claro que $X(a, \{a\}) = \mathcal{P}(X) \in (\text{Top}(X), \subseteq)_0$.

Supongamos que la afirmación es cierta para todo $B \subseteq X$ con $1 \leq \text{card}(B) \leq n$, y $n$ entero positivo. Sea $B \subseteq X$, con $a \in B$ y $\text{card}(B) = n + 1$. Si $B = \{a, a_1, \cdots, a_n\}$ y $B_1 = \{a, a_1, \cdots, a_{n-1}\}$, entonces se tiene que $X(a, B_1)$ contiene propiamente a $X(a, B)$. Por la hipótesis inductiva, $X(a, B_1) \in (\text{Top}(X), \subseteq)_{\text{card}(B_1)-1}$, con lo que $X(a, B) \notin \bigcup_{j=0}^{n-1} (\text{Top}(X), \subseteq)_j$.

Supongamos ahora que $X(a, B) \subseteq \psi$, con

$$\psi \in \text{Top}(X) \backslash \bigcup_{j=0}^{n-1} (\text{Top}(X), \subseteq)_j \, ,$$

y que existe $V \in \psi \backslash X(a, B)$. En ese caso $a \in V$ y $B \nsubseteq V$. Sea $B^\star = B \cap V$. Ya que $1 \leq \text{card}(B^\star) < \text{card}(B)$, la hipótesis de inducción implica que $X(a, B^\star) \in (\text{Top}(X), \subseteq)_{\text{card}(B^\star)-1}$.

Ahora, si $B^\star \subseteq W \subseteq X$, entonces $W = B^\star \cup (W \backslash B^\star) \in \psi$, por lo que $X(a, B^\star) \subseteq \psi$, y así $\psi \in \bigcup_{j=0}^{n-1} (\text{Top}(X), \subseteq)_j$; contradicción. En consecuencia $X(a, B) = \psi$, con lo cual $X(a, B) \in (\text{Top}(X), \subseteq)_n$. $\square$

Nótese que en el espacio topológico $(X, X(a, B))$ se tiene que $\overline{\{b\}} = \{a, b\}$, para todo $b \in B \backslash \{a\}$, y $\overline{\{a\}} = \{a\}$. Además, si $c \notin B$, entonces $\overline{\{c\}} = \{c\}$ ya que $B \subseteq X \backslash \{c\}$.

**Notación.** Si $(X, \tau)$ es un espacio topológico y si $A \subseteq X$, denotaremos por $\mathcal{N}_\tau(A)$ la intersección de todos los elementos de $\tau$ que contienen a $A$, es decir, $\mathcal{N}_\tau(A) = \bigcap\{V \in \tau : A \subseteq V\}$. Cuando $A = \{a\}$ escribiremos $\mathcal{N}_\tau(a)$ en vez de $\mathcal{N}_\tau(\{a\})$. El conjunto $\mathcal{N}_\tau(A)$ se denomina usualmente *el núcleo de* $A$ en el espacio $(X, \tau)$.

La siguiente proposición muestra otra característica de los elementos ordinables en $(\text{Top}(X), \subseteq)$, que complementa la encontrada en la proposición 3.2. Este resultado generaliza la propiedad mencionada en la parte 2 de la nota 3.1.

**Proposición 3.4.** Si $\beta$ es ordinable en $(\mathrm{Top}(X), \subseteq)$ y si

$$A_\beta = \{x \in X : \{x\} \notin \beta\},$$

entonces, para cada $x \in A_\beta$, el conjunto $\mathcal{N}_\beta(x)$ es finito.

**Demostración.** Por inducción sobre $O(\beta)$. Para $O(\beta) = 0$ el resultado es inmediato ya que, en ese caso, $A_\beta = \varnothing$.

Supongamos que la afirmación es cierta para toda topología ordinable $\mu \in \mathrm{Top}(X)$ con $O(\mu) < \alpha$, y supongamos que $\beta \in (\mathrm{Top}(X), \subseteq)_\alpha$ y que $b \in A_\beta$.

Si $\mathcal{N}_\beta(b) = \{b\}$, entonces el resultado es inmediato.

Si $\mathcal{N}_\beta(b) \neq \{b\}$, entonces elegimos $c \in \mathcal{N}_\beta(b) \backslash \{b\}$ y hacemos $W = \mathcal{N}_\beta(b) \backslash \{c\}$. El conjunto $\beta \cup \{U \cap W : U \in \beta\}$ es base para una topología $\mu$ de $X$, que contiene propiamente a $\beta$, puesto que $W \in \mu \backslash \beta$. Entonces $O(\mu) < O(\beta) = \alpha$. Ya que $W \in \mu$ y $b \in W$, se tiene que $\mathcal{N}_\mu(b) \subseteq W$. Sea $d \in W$. Si $Z \in \mu$ y $b \in Z$, entonces existe $B \in \beta \cup \{U \cap W : U \in \beta\}$, tal que $b \in B \subseteq Z$. Si $B \in \beta$, como $d \in \mathcal{N}_\beta(b)$, entonces se tiene que $d \in B \subseteq Z$. Si $B = U \cap W$, para algún $U \in \beta$, entonces $d \in U$ y así $d \in U \cap W = B \subseteq Z$.

En consecuencia, $W \subseteq \mathcal{N}_\mu(b)$, y así se concluye que $\mathcal{N}_\mu(b) = W$. Pero por la hipótesis inductiva $\mathcal{N}_\mu(b)$ es finito, luego $\mathcal{N}_\beta(b)$ es finito. $\square$

Un corolario inmediato de la proposición 3.4 es que no se tiene el recíproco de la proposición 3.2, ya que si $X$ es infinito y $J$ es un subconjunto infinito de $X$ y $a \in J$, entonces la topología $\beta = X(a, J)$ no es ordinable pues $A_\beta = \{a\}$ y $\mathcal{N}_\beta(a) = J$.

**Notación.** Sea $X$ un conjunto no–vacío, $a \in X$ y $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre $X$ tal que $\{a\} \notin \mathcal{U}$. Si $B \subseteq X$ y $a \in B$, con el símbolo $\mathcal{U}_a(B)$ denotaremos la topología $\mathcal{P}(X \backslash \{a\}) \cup \{D \in \mathcal{U} : B \subseteq D\}$.

**Teorema 3.5.** Sea $X$ un conjunto no–vacío, $\mathcal{U}$ un ultrafiltro no principal sobre $X$, $a \in X$ y $B$ un subconjunto finito de $X$ con $a \in B$. Se tiene que $\mathcal{U}_a(B) \in (\mathrm{Top}(X), \subseteq)_{\mathrm{card}(B)}$.

**Demostración.** Por inducción sobre $\mathrm{card}(B)$. Si $B = \{a\}$, entonces $\mathcal{U}_a(B)$ es una ultratopología para $X$, con lo que $\mathcal{U}_a(B) \in (\mathrm{Top}(X), \subseteq)_1$.

Supongamos que el resultado se tiene para todo $B \subseteq X$, finito, con $a \in B$, $\mathrm{card}(B) \leq k$ y $k \geq 1$. Sea $B \subseteq X$ con $a \in B$ y $\mathrm{card}(B) = k + 1$. Sean $b \in B \backslash \{a\}$ y $B^\star = B \backslash \{b\}$. Es claro que $\mathcal{U}_a(B) \subseteq \mathcal{U}_a(B^\star)$. Ya que $\mathcal{U}$

no es principal, $\{b\} \notin \mathcal{U}$ y así $X\backslash\{b\} \in \mathcal{U}_a(B^\star)\backslash\mathcal{U}_a(B)$. Por la hipótesis inductiva $\mathcal{U}_a(B^\star) \in (\mathrm{Top}(X), \subseteq)_k$, con lo que $\mathcal{U}_a(B) \notin \bigcup_{j\leq k} (\mathrm{Top}(X), \subseteq)_j$.

Supongamos ahora que $\mathcal{U}_a(B) \subseteq \beta$, que

$$\beta \in \mathrm{Top}(X)\backslash \bigcup_{j\leq k}(\mathrm{Top}(X), \subseteq)_j\,,$$

y que existe $A \in \beta\backslash\mathcal{U}_a(B)$. Se tiene que $a \in A$ y que, $A \notin \mathcal{U}$ o $B \nsubseteq A$. Entonces:

**i.** Si $A \in \mathcal{U}$ y $B \nsubseteq A$, entonces $\mathcal{U}_a(A \cap B)$ contiene propiamente a $\mathcal{U}_a(B)$, ya que $A \in \mathcal{U}_a(A\cap B)\backslash\mathcal{U}_a(B)$. Además $\mathcal{U}_a(A \cap B) \subseteq \beta$, ya que si $V \in \mathcal{U}$ y $A \cap B \subseteq V$, entonces $V = (V\backslash A) \cup [A \cap (V \cup B)]$, con $V\backslash A \in \beta$, $V \cup B \in \beta$ y $A \in \beta$. Esto implica que $\beta \in \bigcup_{j\leq k} (\mathrm{Top}(X), \subseteq)_j$, ya que por la hipótesis de inducción $\mathcal{U}_a(A \cap B) \in \bigcup_{j\leq k} (\mathrm{Top}(X), \subseteq)_j$. Aquí se tendría una contradicción.

**ii.** Si $A \notin \mathcal{U}$ y $B \nsubseteq A$, entonces $A^c \in \mathcal{U}$, y así $A^c \cup B \in \mathcal{U}_a(B) \subseteq \beta$. Como $(A^c \cup B) \cap A = A \cap B$, vemos que $A \cap B \in \beta$, con lo que se tiene que $X(a, A \cap B) \subseteq \beta$. Esto no es posible, ya que, según el teorema 3.3, $X(a, A \cap B) \in \bigcup_{j\leq k} (\mathrm{Top}(X), \subseteq)_j$.

**iii.** Si $A \notin \mathcal{U}$ y $B \subseteq A$ entonces $B = (A^c \cup B) \cap A \in \beta$, puesto que $A^c \cup B \in \mathcal{U}_a(B) \subseteq \beta$ y $A \in \beta$. Por lo tanto, $X(a, B) \subseteq \beta$, lo que no es posible, ya que, por el teorema 3.3, $X(a, B) \in (\mathrm{Top}(X), \subseteq)_{\mathrm{card}(B)-1}$, y esto implicaría que $\beta \in \bigcup_{j\leq k} (\mathrm{Top}(X), \subseteq)_j$; contradicción.

En definitiva $\mathcal{U}_a(B) = \beta$, con lo cual $\mathcal{U}_a(B) \in (\mathrm{Top}(X), \subseteq)_{k+1}$, como se pretendía. *square*

En el siguiente teorema se obtendrán más elementos ordinables del retículo de topologías. Sobre estas topologías, los teoremas 4.2 y 4.3 proporcionarán características de sus conjuntos de sucesores, relacionadas con sus estructuras y sus cardinales.

**Teorema 3.6.** Supongamos que $X$ es un conjunto y que $b, a_1, \cdots, a_n$ son elementos diferentes de $X$. Entonces

$$\bigcap_{i=1}^{n} X\left(a_i,\, \{a_i,\, b\}\right) \;\in\; (\mathrm{Top}(X),\, \subseteq)_n \,.$$

**Demostración.** Por inducción sobre $n$. El caso $n = 1$ se sigue del teorema 3.3.

Supongamos que el resultado se tiene para $n = k$. Sean

$$b, a_1, \cdots, a_k, a_{k+1}\,,$$

elementos diferentes de $X$, y sean

$$\begin{aligned} \tau &= \bigcap_{i=1}^{k+1} X\left(a_i,\, \{a_i,\, b\}\right)\,, \\ \beta &= \bigcap_{i=1}^{k} X\left(a_i,\, \{a_i,\, b\}\right)\,. \end{aligned}$$

Ya que $\{a_{k+1}\} \in \beta\backslash\tau$ y $\beta \in (\mathrm{Top}(X), \subseteq)_k$, se tiene que

$$\tau \notin \bigcup_{j\leq k} (\mathrm{Top}(X),\, \subseteq)_j \,.$$

Supongamos ahora que $\tau \subseteq \mu$, con $\mu \in \mathrm{Top}(X)\backslash \bigcup\limits_{j\leq k} (\mathrm{Top}(X), \subseteq)_j$, y que existe $A \in \mu\backslash\tau$. Existe $\ell \in \{1, \cdots, k, k+1\}$ tal que $A \cap \{a_\ell, b\} = \{a_\ell\}$. Sea $\{a_1^\star, \cdots, a_k^\star\} = \{a_1, \cdots, a_{k+1}\} \setminus \{a_\ell\}$. Como $\{a_\ell, b\} \in \tau \subseteq \mu$ se tiene que $\{a_\ell\} = A \cap \{a_\ell, b\} \in \mu$, de donde se sigue que $\bigcap\limits_{i=1}^{k} X\left(a_i^\star, \{a_i^\star, b\}\right) \subseteq \mu$. Esto no es posible ya que según la hipótesis inductiva $\bigcap\limits_{i=1}^{k} X\left(a_i^\star, \{a_i^\star, b\}\right) \in (\mathrm{Top}(X), \subseteq)_k$, lo que implicaría que $\mu \in \bigcup\limits_{j\leq k} (\mathrm{Top}(X), \subseteq)_j$.

En consecuencia $\tau = \mu$, con lo cual $\tau \in (\mathrm{Top}(X), \subseteq)_{k+1}$. $\square$

Nótese que si en el teorema anterior hacemos $\tau = \bigcap\limits_{i=1}^{n} X\left(a_i, \{a_i, b\}\right)$, entonces $A_\tau = \{a_1, \cdots, a_n\}$ y $\mathcal{N}_\tau\left(a_i\right) = \{a_i, b\}$, para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$. Además, $\tau = P\left(X \setminus \{a_1, \cdots, a_n\}\right) \cup \langle b\rangle$, donde $\langle b\rangle = \{U \subseteq X : b \in U\}$.

Las topologías ordinables que se muestran en los teoremas 3.3 y 3.6 son de Alexandroff. La siguiente proposición nos ayuda a caracterizar aquellas topologías de Alexandroff que son ordinables, lo cual quedará establecido en el corolario 3.10.

**Proposición 3.7.** Si $\beta \in \mathrm{Top}(X)$, entonces $\beta \subseteq \bigcap_{a\in A_\beta} X(a,\mathcal{N}_\beta(a))$. La igualdad se presenta si y sólo si $\mathcal{N}_\beta(a) \in \beta$, para todo $a \in A_\beta$.

**Demostración.** Sean $V \in \beta$ y $a \in A_\beta$, arbitrarios. Si $a \notin V$, entonces se tiene que $V \in \mathcal{P}(X\backslash\{a\}) \subseteq X(a,\mathcal{N}_\beta(a))$. Si $a \in V$, entonces se tiene que $\mathcal{N}_\beta(a) \subseteq V$, con lo cual $V \in X(a,\mathcal{N}_\beta(a))$. Luego $\beta \subseteq \bigcap_{a\in A_\beta} X(a,\mathcal{N}_\beta(a))$.

Supongamos ahora que $\mathcal{N}_\beta(a) \in \beta$, para todo $a \in A_\beta$. Sea $W \in \bigcap_{a\in A_\beta} X\left(a,\mathcal{N}_\beta(a)\right)$. Como

$$W = \left(\bigcup_{a\in W\cap A_\beta} \mathcal{N}_\beta(a)\right) \cup \left[W\backslash \bigcup_{a\in W\cap A_\beta} \mathcal{N}_\beta(a)\right],$$

y ya que $\bigcup_{a\in W\cap A_\beta} \mathcal{N}_\beta(a)$ y $W\backslash \bigcup_{a\in W\cap A_\beta} \mathcal{N}_\beta(a)$ son elementos de $\beta$, se concluye que $W \in \beta$. Luego $\bigcap_{a\in A_\beta} X\left(a,\mathcal{N}_\beta(a)\right) \subseteq \beta$.

Por último, supongamos que $\beta = \bigcap_{a\in A_\beta} X\left(a,\mathcal{N}_\beta(a)\right)$. Sea $d \in A_\beta$, arbitrario. Veamos que $\mathcal{N}_\beta(d) \in \bigcap_{a\in A_\beta} X\left(a,\mathcal{N}_\beta(a)\right)$. Sea $a \in A_\beta$. Si $a \notin \mathcal{N}_\beta(d)$, entonces se tiene que $\mathcal{N}_\beta(d) \in \mathcal{P}(X\backslash\{a\}) \subseteq X\left(a,\mathcal{N}_\beta(a)\right)$. Si $a \in \mathcal{N}_\beta(d)$, entonces $\mathcal{N}_\beta(a) \subseteq \mathcal{N}_\beta(d)$ y así, $\mathcal{N}_\beta(d) \in X\left(a,\mathcal{N}_\beta(a)\right)$. $\square$

**Corolario 3.8.** Si $\beta \in \mathrm{Top}(X)$, con $A_\beta = \{a\}$ y $\mathcal{N}_\beta(a) \in \beta$, entonces $\beta = X\left(a,\mathcal{N}_\beta(a)\right)$. Si, además, $\mathcal{N}_\beta(a)$ es finito, entonces $\beta$ es ordinable y $O(\beta) = \mathrm{card}(\mathcal{N}_\beta(a)) - 1$.

**Demostración.** Esto es consecuencia del teorema 3.3 y de la proposición 3.7. $\square$

La proposición que sigue, y su corolario, caracterizan aquellas topologías de Alexandroff que son ordinables y dan una cota superior para los niveles en los cuales éstas pueden estar.

**Proposición 3.9.** Sea $X$ un conjunto y sea $\tau \in \mathrm{Top}(X)$ tal que:

**1.** $\tau$ es cerrada para intersecciones;

**2.** $A_\tau$ es finito y, para cada $a \in A_\tau$, el conjunto $\mathcal{N}_\tau(a)$ es finito.

Entonces el intervalo $[\tau, \mathcal{P}(X)] = \{\beta \in \mathrm{Top}(X) : \tau \subseteq \beta\}$ es finito.

**Demostración.** Si $A_\tau = \varnothing$, entonces el resultado es directo.

Supongamos que $A_\tau \neq \varnothing$ y que $A_\tau = \{a_1, \cdots, a_n\}$. Como $\tau$ es cerrada para intersecciones, $\mathcal{N}_\tau(a_i) \in \tau$, para cada $i \in \{1, 2, \cdots n\}$. Si $\beta \in [\tau, \mathcal{P}(X)]$, entonces $A_\beta \subseteq A_\tau$ y $\mathcal{N}_\beta(b) \subseteq \mathcal{N}_\tau(b)$, para cada $b \in A_\beta$.

Ahora, si $b \in A_\beta$, entonces se tiene que $\mathcal{N}_\tau(b) \in \beta$, con $\mathcal{N}_\tau(b)$ finito, por lo que existe el menor elemento de $\beta$ que contiene a $b$, el cual debe ser finito e igual a $\mathcal{N}_\beta(b)$. De acuerdo con la proposición 3.7, $\beta = \bigcap\limits_{b \in A_\beta} X\,(b, \mathcal{N}_\beta(b))$.

Sea $\Delta_\tau$ el conjunto de todas aquellas $n$–uplas $(B_1, \cdots, B_n)$ tales que:

**i.** para cada $j \in \{1, \cdots, n\}$, $a_j \in B_j \subseteq \mathcal{N}_\tau(a_j)$;

**ii.** para $i, j \in \{1, \cdots, n\}$, si $a_i \in B_j$, entonces $B_i \subseteq B_j$.

La función $\Phi : [\tau, \mathcal{P}(X)] \to \Delta_\tau$, dada por $\Phi(\gamma) = (\mathcal{N}_\gamma(a_1), \cdots, \mathcal{N}_\gamma(a_n))$, es inyectiva. Si $(B_1, \cdots, B_n) \in \Delta_\tau$ y $\beta = \bigcap\limits_{i=1}^{n} X\,(a_i, B_i)$, entonces $\Phi(\beta) = (B_1, \cdots, B_n)$, con lo cual $\Phi$ es sobreyectiva. Entonces $[\tau, \mathcal{P}(X)]$ tiene a lo sumo $2^{(d_1 + \cdots + d_n) - n}$ elementos, donde $d_i = \mathrm{card}(\mathcal{N}_\gamma(a_i))$. □

**Corolario 3.10.** Sea $X$ un conjunto y supongamos que $\tau \in \mathrm{Top}(X)$ es tal que:

**1.** $\tau$ es cerrada para intersecciones;

**2.** $A_\tau$ es finito y, para cada $a \in A_\tau$, el conjunto $\mathcal{N}_\tau(a)$ es finito.

Entonces $\tau$ es ordinable y $O(\tau) < \omega$.

**Demostración.** Esto es consecuencia de las proposiciones 2.1 y 3.9. □

# 4 Generalizando a Fröhlich

Con la idea en mente de encontrar más elementos ordinables en el retículo de topologías sobre un conjunto $X$, procederemos a considerar topologías parecidas a las ultratopologías de Fröhlich que tienen la forma $\mathcal{P}(X \backslash \{a\}) \cup \mathcal{U}$, donde $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro sobre $X$ y $a \in X$, con $\{a\} \notin \mathcal{U}$.

Una posibilidad es considerar topologías de la forma

$$\mathcal{P}(X\backslash F) \cup \mathcal{U}\,,$$

donde $F$ es cualquier subconjunto finito y no–vacío de $X$, con $F \notin \mathcal{U}$. La razón de tomar $F$ finito es la proposición 3.10.

Una segunda opción es considerar topologías de la forma

$$\mathcal{P}(X\backslash\{a\}) \cup \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{U}_i\,,$$

donde $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \cdots, \mathcal{U}_n$ son ultrafiltros diferentes sobre $X$, y $\{a\} \notin \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{U}_i$.

Una tercera posibilidad, más general, es considerar topologías de la forma

$$\mathcal{P}(X\backslash F) \cup \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{U}_i\,,$$

donde $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \cdots, \mathcal{U}_n$ son ultrafiltros diferentes sobre $X$; $F$ es un subconjunto finito y no–vacío de $X$ y $F \notin \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{U}_i$.

Los teoremas 4.1, 4.2 y 4.3 darán información para el primer caso y el teorema 4.6 lo hará para el segundo. Para el tercer caso aún no tenemos respuesta.

**Notación.** Sea $X$ un conjunto, $F$ un subconjunto no–vacío de $X$ y $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre $X$ tal que $F \notin \mathcal{U}$. Con el símbolo $\mathcal{U}_F$ denotaremos la topología $\mathcal{P}(X\backslash F) \cup \mathcal{U}$.

El siguiente teorema generaliza el resultado obtenido en el teorema 3.6, así como el de Fröhlich mencionado al comienzo de la sección 3.

**Teorema 4.1.** Sea $X$ un conjunto, $F$ un subconjunto finito no–vacío de $X$ y $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre $X$ tal que $F \notin \mathcal{U}$. Entonces, $\mathcal{U}_F \in (\mathrm{Top}(X), \subseteq)_{\mathrm{card}(F)}$.

**Demostración.** Por inducción sobre card$(F)$. Si card$(F) = 1$, entonces se tiene el resultado, pues en ese caso $\mathcal{U}_F$ es una ultratopología para $X$.

Supongamos que el resultado se tiene cuando card$(F) = k$. Sea $G$ un subconjunto de $X$ con cardinalidad $k+1$, tal que para todo $a \in G$,

$\{a\} \notin \mathcal{U}$. Sean $b \in G$ y $F = G \backslash \{b\}$. Como $\mathcal{U}_G \subseteq \mathcal{U}_F$ y $\{b\} \in \mathcal{U}_F \backslash \mathcal{U}_G$, se tiene que $\mathcal{U}_G$ es un subconjunto propio de $\mathcal{U}_F$ y, ya que por hipótesis $\mathcal{U}_F \in (\mathrm{Top}(X), \subseteq)_{\mathrm{card}(F)}$, se sigue que $\mathcal{U}_G \in \mathrm{Top}(X) \backslash \bigcup_{j=0}^{k} (\mathrm{Top}(X), \subseteq)_j$.

Supongamos que $\mathcal{U}_G \subseteq \mu$, que $\mu \in \mathrm{Top}(X) \backslash \bigcup_{j=0}^{k} (\mathrm{Top}(X), \subseteq)_j$ y que existe $A \in \mu \backslash \mathcal{U}_G$. Entonces $G \cap A \neq \varnothing$ y $A \notin \mathcal{U}$. Sea $u \in G \cap A$ y $H = G \backslash \{u\}$. Como $A^c \cup \{u\} \in \mathcal{U}_G$ entonces $A \cap [A^c \cup \{u\}] = \{u\} \in \mu$ y así $\mathcal{U}_H \subseteq \mu$. Esto es imposible ya que por hipótesis $\mathcal{U}_H \in (\mathrm{Top}(X), \subseteq)_k$.

En consecuencia $\mathcal{U}_G = \mu$ y así $\mathcal{U}_G \in (\mathrm{Top}(X), \subseteq)_{k+1}$. □

Si $F = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ y $\mathcal{U}$ es el ultrafiltro principal generado por $b \in X$, donde $b \notin F$, entonces $\mathcal{U}_F = \bigcap_{i=1}^{n} X(a_i, \{a_i, b\})$, con lo que se obtiene el resultado del teorema 3.6.

En los dos teoremas que siguen obtenemos información acerca del tamaño y estructura del conjunto de sucesores de un elemento ordinable del retículo de topologías, que tenga la forma $\mathcal{U}_F$, con $F$ finito.

**Teorema 4.2.** Sea $X$ un conjunto, $F$ un subconjunto finito de $X$ y $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre $X$ tal que $F \notin \mathcal{U}$. Entonces $[\mathcal{U}_F, \mathcal{P}(X)] = \{\mathcal{U}_G : G \subseteq F\}$, con lo cual $\mathrm{card}([\mathcal{U}_F, \mathcal{P}(X)]) = 2^{\mathrm{card}(F)}$.

**Demostración.** Por inducción sobre $\mathrm{card}(F)$. Para el caso en el que $\mathrm{card}(F) = 0$ no hay nada que demostrar ya que $\mathcal{U}_\varnothing = \mathcal{P}(X)$.

Supongamos que el resultado es cierto para el caso en el cual $\mathrm{card}(F) = k$. Sea $H \subseteq X$ con $\mathrm{card}(H) = k+1$ y tal que, para todo $b \in H$, $\{b\} \notin \mathcal{U}$. Es claro que $\{\mathcal{U}_G : G \subseteq H\} \subseteq [\mathcal{U}_H, \mathcal{P}(X)]_\subseteq$.

Supongamos que $\mu \in [\mathcal{U}_H, \mathcal{P}(X)]_\subseteq$ y que $\mu \neq \mathcal{U}_H$. Existe $V \in \mu \backslash \mathcal{U}_H$. Como $H \cap V \neq \varnothing$ y $V \notin \mathcal{U}$, si $u \in H \cap V$, entonces $\{u\} = V \cap [V^c \cup \{u\}] \in \mu$, con lo cual $\mathcal{U}_{H \backslash \{u\}} \subseteq \mu$. Por la hipótesis inductiva se concluye que $\mu = \mathcal{U}_G$ para algún $G \subseteq H \backslash \{u\} \subseteq H$. □

En el teorema anterior, si $\beta \in [\mathcal{U}_F, \mathcal{P}(X)]_\subseteq$, entonces $\beta = \mathcal{U}_{A_\beta}$.

Recordemos algunas definiciones de la teoría de retículos que necesitaremos en el teorema 4.3 y en su corolario. Un retículo $(A, \leq)$ es *distributivo* si para todo $a, b, c \in A$ se tiene que $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$. Si $(A, \leq)$ es un retículo que posee elemento mínimo 0 y elemento máximo 1, y si para $a \in A$ existe un elemento $b \in A$ tal que $a \wedge b = 0$ y $a \vee b = 1$, entonces se dice que $b$ es *un complemento* de $a$. Un retículo es *booleano* si es distributivo y si cada uno de sus elementos tiene complemento (necesariamente único).

Si $a$ y $b$ son elementos de un retículo $(A, \leq)$, con $a \leq b$, y si $c$ y $d$ son elementos del intervalo cerrado $[a, b]$, entonces se dice que $d$ es un *complemento relativo* de $c$ en $[a, b]$ si $c \wedge d = a$ y $c \vee d = b$. Un retículo es *relativamente complementado* si cada uno de sus elementos tiene complemento relativo en cualquier intervalo cerrado que lo contenga.

**Teorema 4.3.** Sea $X$ un conjunto, $F$ un subconjunto finito de $X$ y $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre $X$ tal que $F \notin \mathcal{U}$. Entonces, $([\mathcal{U}_F, \mathcal{P}(X)], \subseteq)$ es un retículo booleano.

**Demostración.** Basta con observar que la función biyectiva $\lambda : \mathcal{P}(F) \to [\mathcal{U}_F, \mathcal{P}(X)]$ dada por $\lambda(G) = \mathcal{U}_G$, para todo $G \subseteq F$, es un anti–isomorfismo de conjuntos ordenados por cuanto $G \subseteq H$ si y sólo si $\mathcal{U}_H \subseteq \mathcal{U}_G$. $\square$

El teorema 4.3 tiene un corolario muy interesante, que afirma que a todo ultrafiltro no principal sobre un conjunto $X$ le podemos asociar un retículo distributivo, relativamente complementado y con máximo.

Se sabe que en un retículo distributivo, con elemento mínimo y máximo, si un elemento tiene complemento, entonces éste tiene complemento relativo en todo intervalo cerrado que lo contenga. Para una demostración consultar la referencia [4]. Este hecho se usará en la demostración del corolario.

**Corolario 4.4.** Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro no principal sobre el conjunto $X$. Entonces el conjunto $\Gamma_{\mathcal{U}} = \bigcup_{F \in \mathcal{P}_{fin}(X)} [\mathcal{U}_F, \mathcal{P}(X)]$ es un retículo distributivo, relativamente complementado y con elemento máximo. Aquí $\mathcal{P}_{fin}(X)$ representa la colección de subconjuntos finitos de $X$.

**Demostración.** Si $\beta$ y $\mu$ son elementos de $\Gamma_{\mathcal{U}}$, entonces el teorema 4.2 garantiza que existen $F \subseteq X$ y $G \subseteq X$, finitos, tales que $\beta = \mathcal{U}_F$ y $\mu = \mathcal{U}_G$.

Si se tiene en cuenta que $\beta \wedge \mu = \beta \cap \mu = \mathcal{U}_{F \cup G}$ y que existe $L \subseteq F \cap G$ tal que $\beta \vee \mu = \mathcal{U}_L$, se concluye que $\Gamma_{\mathcal{U}}$ es un retículo distributivo. Obviamente $\mathcal{P}(X)$ es el elemento máximo de $\Gamma_{\mathcal{U}}$.

Ahora, si $\tau$, $\beta$ y $\gamma$ son elementos de $\Gamma_{\mathcal{U}}$, con $\tau \subseteq \beta \subseteq \gamma$, entonces existe $F \subseteq X$, finito, tal que $\tau = \mathcal{U}_F$, y como $[\mathcal{U}_F, \mathcal{P}(X)]$ es un retículo distributivo en el cual todo elemento tiene complemento, se concluye que $\beta$ tiene complemento relativo en el intervalo $[\tau, \gamma]$. $\square$

Para finalizar, procedemos a obtener información en el segundo caso propuesto al comienzo de esta sección. Antes de esto demostramos unas propiedades interesantes de los ultrafiltros, las cuales necesitaremos para demostrar nuestro último teorema.

**Lema 4.5.**

**1.** Si $\{\mathcal{U}_i\}_{i\in I}$ y $\{\mathcal{V}_j\}_{j\in J}$ son colecciones finitas, no–vacías y diferentes de ultrafiltros sobre el conjunto $X$, entonces $\bigcap_{i\in I}\mathcal{U}_i \neq \bigcap_{j\in J}\mathcal{V}_j$. Si, además, $\varnothing \neq F \subseteq X$ y $F \notin \left(\bigcup_{i\in I}\mathcal{U}_i\right) \cup \left(\bigcup_{j\in J}\mathcal{V}_j\right)$, entonces las topologías $\Omega = \mathcal{P}(X\backslash F) \cup \bigcap_{i\in I}\mathcal{U}_i$ y $\Psi = \mathcal{P}(X\backslash F) \cup \bigcap_{j\in J}\mathcal{V}_j$ son diferentes.

**2.** Si $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ son ultrafiltros diferentes sobre el conjunto $X$, y si $F \subseteq X$ es tal que $F \notin \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$, entonces existen $A \in \mathcal{U}\backslash\mathcal{V}$ y $B \in \mathcal{V}\backslash\mathcal{U}$ tales que $A \cap B = F$.

**3.** Si $\{\mathcal{U}_i\}_{i\in I}$ y $\{\mathcal{V}_j\}_{j\in J}$ son colecciones finitas, no–vacías y disjuntas de ultrafiltros sobre el conjunto $X$ y si $F \subseteq X$ es tal que $F \notin \left(\bigcup_{i\in I}\mathcal{U}_i\right) \cup \left(\bigcup_{j\in J}\mathcal{V}_j\right)$, entonces existen $A \in \bigcap_{i\in I}\mathcal{U}_i\backslash \bigcap_{j\in J}\mathcal{V}_j$ y $B \in \bigcap_{j\in J}\mathcal{V}_j\backslash \bigcap_{i\in I}\mathcal{U}_i$ tales que $A \cap B = F$.

**Demostración.**

**1.** Sin pérdida de generalidad, supongamos que existe $\alpha \in I$ tal que $\mathcal{U}_\alpha \notin \{\mathcal{V}_j : j \in J\}$. Para cada $j \in J$ existe $V_j \in \mathcal{V}_j\backslash\mathcal{U}_\alpha$. Se tiene que $\bigcup_{j\in J} V_j \in \bigcap_{j\in J}\mathcal{V}_j$ y que $\bigcap_{j\in J}(X\backslash V_j) = X\backslash\left(\bigcup_{j\in J} V_j\right) \in \mathcal{U}_\alpha$, con lo cual $\bigcup_{j\in J} V_j \notin \mathcal{U}_\alpha$, y así $\bigcup_{j\in J} V_j \notin \bigcap_{i\in I}\mathcal{U}_i$. Ahora, sea $A = \bigcup_{j\in J} V_j$. Si $A \cap F \neq \varnothing$, entonces $A \in \Psi\backslash\Omega$. Por otra parte, si $A \cap F = \varnothing$, entonces $A \cup F \in \bigcap_{j\in J}\mathcal{V}_j \subseteq \Psi$. Como $A \notin \mathcal{U}_\alpha$, entonces $X\backslash A \in \mathcal{U}_\alpha$. Ya que $(X\backslash A) \cap (A \cup F) = F \notin \mathcal{U}_\alpha$, debemos tener que $A \cup F \notin \mathcal{U}_\alpha$ y así $A \cup F \notin \bigcap_{i\in I}\mathcal{U}_i$, con lo cual $A \cup F \notin \Omega$.

**2.** Sean $A_1 \in \mathcal{U}\backslash\mathcal{V}$, $B_1 \in \mathcal{V}\backslash\mathcal{U}$, y sean $A = (A_1\backslash B_1) \cup F$ y $B = (B_1\backslash A_1) \cup F$. Es claro que $A \in \mathcal{U}$, $B \in \mathcal{V}$, y que $A \cap B = F$. Entonces $A \notin \mathcal{V}$ y $B \notin \mathcal{U}$.

**3.** Si $i \in I$ y $j \in J$, entonces, por la parte 2, existen $A_{ij} \in \mathcal{U}_i\backslash\mathcal{V}_j$ y $B_{ij} \in \mathcal{V}_j\backslash\mathcal{U}_i$ tales que $A_{ij} \cap B_{ij} = F$. Para cada $i \in I$ se tiene que $\bigcap\limits_{j\in J} A_{ij} \in \mathcal{U}_i$ y que $\bigcup\limits_{j\in J} B_{ij} \in \bigcap\limits_{j\in J} \mathcal{V}_j$, luego $\bigcup\limits_{i\in I}\bigcap\limits_{j\in J} A_{ij} \in \bigcap\limits_{i\in I} \mathcal{U}_i$ y $\bigcap\limits_{i\in I}\bigcup\limits_{j\in J} B_{ij} \in \bigcap\limits_{j\in J} \mathcal{V}_j$. Sean $A = \bigcup\limits_{i\in I}\bigcap\limits_{j\in J} A_{ij}$ y $B = \bigcap\limits_{i\in I}\bigcup\limits_{j\in J} B_{ij}$. Es claro que $F \subseteq A \cap B$. Supongamos que $u \in A \cap B$. Entonces existe $\alpha \in I$ tal que $u \in \bigcap\limits_{j\in J} A_{\alpha j}$. Como $u \in \bigcup\limits_{j\in J} B_{\alpha j}$, existe $\beta \in J$ tal que $u \in B_{\alpha\beta}$. Pero $u \in A_{\alpha\beta}$, luego $u \in A_{\alpha\beta} \cap B_{\alpha\beta} = F$. En consecuencia $A \cap B = F$, de donde se sigue que $A \notin \bigcap\limits_{j\in J} \mathcal{V}_j$ y $B \notin \bigcap\limits_{i\in I} \mathcal{U}_i$.

□

Con respecto a las topologías de la forma $\mathcal{P}(X\backslash\{a\}) \cup \bigcap\limits_{i=1}^{n} \mathcal{U}_i$, el teorema de cierre del artículo proporciona información relacionada con su ordinabilidad y con sus conjuntos de sucesores.

**Teorema 4.6.** Sean $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \cdots, \mathcal{U}_n$ ultrafiltros diferentes sobre el conjunto $X$, y sea $a \in X$ tal que $\{a\} \notin \bigcup\limits_{i=1}^{n} \mathcal{U}_i$. Si $\Phi$ es la topología $\mathcal{P}(X\backslash\{a\}) \cup \bigcap\limits_{i=1}^{n} \mathcal{U}_i$, entonces:

**1.** $\Phi$ es ordinable y $\Phi \in (\mathrm{Top}(X), \subseteq)_n$;

**2.** el intervalo $[\Phi, \mathcal{P}(X)]$ tiene cardinalidad $2^n$;

**3.** el intervalo $[\Phi, \mathcal{P}(X)]$ es un retículo booleano.

**Demostración.**

**1.** Para $n = 1$ el resultado se tiene ya que en ese caso $\Phi$ es una ultratopología para $X$. Supongamos que el resultado se tiene para $n = k$. Sean $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \cdots, \mathcal{U}_{k+1}$ ultrafiltros diferentes para el conjunto $X$, y sea $a \in X$ tal que $\{a\} \notin \bigcup\limits_{i=1}^{k+1} \mathcal{U}_i$. Sean $\Phi = \mathcal{P}(X\backslash\{a\}) \cup \bigcap\limits_{i=1}^{k+1} \mathcal{U}_i$

y $\Psi = \mathcal{P}(X\backslash\{a\}) \cup \bigcap_{i=1}^{k} \mathcal{U}_i$. Por la hipótesis inductiva, $\Psi \in (\mathrm{Top}(X), \subseteq)_k$. Por la parte 3 del lema 4.4, existe

$$A \in \left(\bigcap_{i=1}^{k} \mathcal{U}_i\right) \backslash \mathcal{U}_{k+1}\,,$$

tal que $a \in A$. Es claro que $A \in \Psi\backslash\Phi$ y, en consecuencia, $\Phi$ es un subconjunto propio de $\Psi$, con lo cual $\Phi \notin \bigcup_{j=0}^{k} (\mathrm{Top}(X), \subseteq)_j$. Supongamos que $\Omega \in \mathrm{Top}(X)$, que $\Phi \subseteq \Omega \notin \bigcup_{j=0}^{k} (\mathrm{Top}(X), \subseteq)_j$ y que existe $B \in \Omega\backslash\Phi$. Se tiene que $a \in B$ y que existe $\ell \in \{1, 2, \cdots, k+1\}$ tal que $B \notin \mathcal{U}_l$. Sean $I = \{1, 2, \cdots, k+1\}$ y $J = I\backslash\{\ell\}$. Si $V \in \left(\bigcap_{j\in J} \mathcal{U}_j\right) \backslash \mathcal{U}_\ell$ es tal que $a \in V$, entonces $V \cup (X\backslash B) \in \bigcap_{i=1}^{k+1} \mathcal{U}_i$, con lo cual $B \cap V = [V \cup (X\backslash B)] \cap B \in \Omega$. Por lo tanto, $V = (V\backslash B) \cup (B \cap V) \in \Omega$. Esto conduce a que $\mathcal{P}(X\backslash\{a\}) \cup \bigcap_{j\in J} \mathcal{U}_j \subseteq \Omega$, lo cual no es posible ya que por la hipótesis inductiva $\mathcal{P}(X\backslash\{a\}) \cup \bigcap_{j\in J} \mathcal{U}_j \in (\mathrm{Top}(X), \subseteq)_k$, y $\Omega \notin \bigcup_{j=0}^{k} (\mathrm{Top}(X), \subseteq)_j$. En conclusión, tal conjunto $B$ no existe, con lo cual $\Phi = \Omega$, y así $\Phi \in (\mathrm{Top}(X), \subseteq)_{k+1}$.

**2.** Según la parte 1 del lema 4.4, basta con demostrar que $[\Phi, \mathcal{P}(X)]$ es igual a

$$\left\{\mathcal{P}(X\backslash\{a\}) \cup \bigcap_{j\in J} \mathcal{U}_j : \varnothing \neq J \subseteq \{1, \cdots n\}\right\} \cup \{\mathcal{P}(X)\}\,,$$

y esto lo haremos por inducción. Para $n = 1$ el resultado se tiene ya que $[\mathcal{P}(X\backslash\{a\}) \cup \mathcal{U}_1, \mathcal{P}(X)] = \{\mathcal{P}(X\backslash\{a\}) \cup \mathcal{U}_1, \mathcal{P}(X)\}$. Supongamos que el resultado se tiene para $n \leq k$. Sean $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \cdots, \mathcal{U}_{k+1}$ ultrafiltros diferentes sobre el conjunto $X$ y sea $a \in X$ tal que $\{a\} \notin \bigcup_{i=1}^{k+1} \mathcal{U}_i$. Sea $\Phi = \mathcal{P}(X\backslash\{a\}) \cup \bigcap_{i=1}^{k+1} \mathcal{U}_i$. Es evidente que

$$\left\{\mathcal{P}(X\backslash\{a\}) \cup \bigcap_{j\in J} \mathcal{U}_j : \varnothing \neq J \subseteq \{1,\cdots,k+1\}\right\} \cup \{\mathcal{P}(X)\},$$

es un subconjunto de $[\Phi, \mathcal{P}(X)]$. Supongamos que $\Psi \in [\Phi, \mathcal{P}(X)]\backslash\{\Phi\}$. Entonces, existe $V \in \Psi\backslash\Phi$. Se tiene que $a \in V$ y que existe $j \in \{1,\cdots,k+1\}$ tal que $V \notin \mathcal{U}_j$.

**i.** Supongamos que $V \notin \bigcup_{i=1}^{k+1} \mathcal{U}_i$. Entonces $X\backslash V \in \bigcap_{i=1}^{k+1} \mathcal{U}_i$, con lo cual $(X\backslash V)\cup\{a\} \in \bigcap_{i=1}^{k+1} \mathcal{U}_i$, y así $\{a\} = V \cap [(X\backslash V)\cup\{a\}] \in \Psi$. Luego $\Psi = \mathcal{P}(X)$.

**ii.** Supongamos que $V \in \bigcup_{i=1}^{k+1} \mathcal{U}_i$. Sean $I = \{1,2,\cdots,k+1\}$ y $J = \{j \in I : V \in \mathcal{U}_j\}$. Es claro que $J \neq \varnothing$ y que $I\backslash J \neq \varnothing$. Sean $\beta = \mathcal{P}(X\backslash\{a\}) \cup \bigcap_{j\in J} \mathcal{U}_j$ y $\lambda = \langle \Phi \cup \{V\}\rangle$ la topología para $X$ generada por el conjunto $\Phi \cup \{V\}$. Evidentemente $\Phi \subseteq \beta$ y $\lambda \subseteq \Psi$. Es fácil ver que $\lambda = \{Z \cup (W \cap V) : Z \in \Phi \,\mathrm{y}\, W \in \Phi\}$. Veamos que $\lambda = \beta$. Es claro que $\lambda \subseteq \beta$ ya que $\Phi \cup \{V\} \subseteq \beta$. Sea $T \in \beta$. Entonces, es suficiente con considerar el caso en el cual $a \in T$ y $T \in \bigcap_{j\in J} \mathcal{U}_j$. Ya que $T = (T\backslash V) \cup [(T \cup (X\backslash V)) \cap V]$, con $T\backslash V \in \mathcal{P}(X\backslash\{a\})$ y $T \cup (X\backslash V) \in \left(\bigcap_{j\in J} \mathcal{U}_j\right) \cap \left(\bigcap_{i\in I\backslash J} \mathcal{U}_i\right) = \bigcap_{i=1}^{k+1} \mathcal{U}_i$, entonces $T \in \lambda$.

Con esto se tiene que $\lambda = \beta = \mathcal{P}(X\backslash\{a\}) \cup \bigcap_{j\in J} \mathcal{U}_j$, y la hipótesis inductiva implica que: o bien $\Psi = \mathcal{P}(X)$, o bien existe $H \subseteq J \subseteq \{1,2,\cdots,k+1\}$, no–vacío, tal que $\Psi = \mathcal{P}(X\backslash\{a\}) \cup \bigcap_{j\in H} \mathcal{U}_j$.

Esto completa la demostración de la segunda parte.

**3.** Basta con observar que la función biyectiva $\lambda : \mathcal{P}(\{1,2,\cdots,n\}) \to [\Phi, \mathcal{P}(X)]$ dada por

$$\lambda(J) = \begin{cases} \mathcal{P}(X) & , \quad \text{si } J = \varnothing, \\ \mathcal{P}(X\backslash\{a\}) \cup \bigcap_{j\in J} \mathcal{U}_j & , \quad \text{si } J \neq \varnothing, \end{cases}$$

es un anti–isomorfismo de conjuntos ordenados, ya que $J \subseteq H$ si y sólo si $\lambda(H) \subseteq \lambda(J)$.

$\square$

El teorema 4.6 tiene un corolario interesante, con el cual cerramos el artículo.

**Notación.** Sea $X$ un conjunto y $a \in X$. Con el símbolo $\mathcal{T}_{a,X}$ denotaremos la colección de todas las topologías sobre $X$ que tengan la forma $\mathcal{P}(X \backslash \{a\}) \cup \bigcap_{j \in J} \mathcal{U}_j$, donde $J$ es un conjunto finito y no–vacío, y $\mathcal{U}_j$ es un ultrafiltro sobre $X$ con $\{a\} \notin \mathcal{U}_j$, para todo $j \in J$.

**Corolario 4.7.** Sea $X$ un conjunto y $a \in X$. El conjunto

$$\bigcup_{\Phi \in \mathcal{T}_{a,X}} [\Phi, \mathcal{P}(X)],$$

es un retículo distributivo, relativamente complementado y con elemento máximo.

# References


[1] M. Benoumhani, *The number of topologies on a finite set*, J. Int. Seq. **9**, 06.2.6 (2006).

[2] B. A. Davey and H. A. Priestley, *Introduction to Lattices and Order* (Cambridge University Press, 1990).

[3] M. Erné and K. Stege, *Counting finite posets and topologies*, Order **8**, 247 (1991).

[4] O. Fröhlich, *Das Halbordnungssystem der topologischen Räume auf einer Menge*, Math. Ann. **156**, 79 (1964).

[5] G. Grätzer, *Lattice theory* (Freeman, San Francisco, 1971).

[6] R. E. Larson and S. J. Andima, *The lattice of topologies: a survey*, Rocky Mountain J. Math. **5**, 177 (1975).

[7] N. R. Pachón, *Un mecanismo de adjunción para comparar topologías*, Tesis de Doctorado en Matemáticas (Universidad Nacional de Colombia, 1999).

[8] P. Renteln, *On the enumeration of finite topologies*, J. Comb. Inf. Sys. Sci. **19**, 201 (1994).

[9] P. S. Schnare, *Infinite complements in the lattice of topologies*, Fund. Math. **64**, 249 (1969).

[10] A. K. Steiner, *The lattice of topologies: structure and complementation*, Trans. Am. Math. Soc. **122**, 379 (1966).