Lecturas Matemáticas
Volumen **39** (1) (2018), páginas 49-66
ISSN 0120-1980

Introducción a la topología no conmutativa

Introduction to noncommutative topology

John R. Skukalek

Universidad San Francisco de Quito, Ecuador

Resumen. En estas notas introducimos la idea de estudiar espacios topológicos por medio del estudio de álgebras de funciones continuas definidas en tales espacios. Esto nos lleva naturalmente al estudio de álgebras de Banach conmutativas y la transformada de Gelfand, seguido por C^*-álgebras conmutativas y el teorema de Gelfand-Naimark. Esto sirve como la base para el estudio de espacios topológicos no conmutativos a través de C^*-álgebras no conmutativas.

***Palabras clave*:** Topología no conmutativa, C^*-álgebras, teorema de Gelfand-Naimark.

Abstract. In these notes we introduce the idea of studying topological spaces by studying algebras of continuous functions on such spaces. This leads us naturally to the study of commutative Banach algebras and the Gelfand transform, followed by commutative C^*-algebras and the Gelfand-Naimark theorem. This serves as the foundation for the study of noncommutative topological spaces through noncommutative C^*-algebras.

***Key words*:** Noncommutative topology, C^*-algebras, Gelfand-Naimark theorem.

2010 AMS Mathematics Subject Classification. 46L85; 46J10; 46L05.

Estas notas resultaron del mini-curso de 4 horas dado por el autor como parte de la escuela EMALCA de Topología y Geometría no Conmutativa en la Universidad San Francisco de Quito en Ecuador en Agosto 2017. El autor desea agradecer a Juan Carlos Bustamante de la Université de Sherbrooke, a Bernardo Uribe Jongbloed de la Universidad del Norte, así como al revisor externo anónimo por sus valiosos comentarios y correcciones.

1. Funciones continuas en espacios topológicos

La idea detrás de la topología o geometría no conmutativa es generalizar el estudio de espacios topológicos y geométricos ordinarios a través del estudio de objetos algebraicos que codifican información topológica y geométrica. Para entender cómo se hace esto, debemos poder asociar a un espacio ordinario un objeto algebraico que captura todas sus propiedades importantes. Consideremos la siguiente pregunta.

1.1 Pregunta. *¿Qué nos pueden decir las funciones continuas respecto a los espacios topológicos sobre los cuales están definidas?*

Por una *función continua f en un espacio topológico X* queremos decir una aplicación continua

$$f : X \to \mathbb{C}$$

donde el conjunto de los números complejos $\mathbb{C}$ tiene dada la topología usual (euclideana) definida por la norma

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

donde $\bar{z} = x - iy$ es el conjugado complejo de $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$. Es decir, para cada disco abierto

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - w| < r\},$$

la imagen inversa

$$f^{-1}(D) = \{p \in X \mid f(p) \in D\}$$

es un conjunto abierto en X.

¡Recuerde la igualdad $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$! Estará de vuelta. Referimos al lector a [3] para todas las cuestiones de la topología general.

1.2 Definición. Una función continua $f : X \to \mathbb{C}$ *se anula en el infinito* si para cada $\epsilon > 0$ existe un conjunto compacto $K \subseteq X$ tal que $|f(p)| < \epsilon$ cuando $p \in X \backslash K$ ($p \in X$ y $p \notin K$).

1.3 Ejemplos. (a) Si X es compacto, entonces una función continua en X debe ser acotada y además se anula en infinito. En general, cualquier función continua que se anula en infinito debe ser acotada.

(b) Si $X = \mathbb{R}$ (con la topología usual), entonces en el idioma de límites, f se anula en el infinito si y solo si

$$\lim_{p \to \infty} f(p) = \lim_{p \to -\infty} f(p) = 0.$$

(c) Si $X = \mathbb{C}$ (con la topología usual) y $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\} \cong \mathbb{S}^2$ denota la esfera de Riemann, entonces f se anula en el infinito si y solo si f se puede extender a una función continua $f^* : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ tal que $f(\infty) = 0$.

(d) El ejemplo anterior se puede generalizar del siguiente modo. Dado un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ ($\mathcal{T}$ es la topología en X), podemos definir

$$X^* = X \cup \{\infty\},\ \infty \notin X,$$

$$\mathcal{T}^* = \mathcal{T} \cup \{(X \backslash K) \cup \{\infty\} \mid K \subseteq X \text{ y } K \text{ es compacto}\}.$$

El punto ∞ se llama *el punto en el infinito en* X^*. La inclusión $X \to X^*$ es una aplicación continua y abierta, y X es denso en X^* si y solo si X no es compacto (∞ es un punto aislado de X^* si X es compacto). El espacio $(X^*, \mathcal{T}^*)$ es un espacio topológico compacto, se llama la *compactificación de un punto (o compactificación de Alexandroff) de* $(X, \mathcal{T})$. Una función continua en X se anula en el infinito si y solo si f se puede extender a una función continua f^* en X^* tal que $f^*(\infty) = 0$.

1.4 Problema. Sea X un espacio topológico. Demuestre que:

(a) Cada función constante en X es continua.

(b) X es compacto si y solo si cada función constante en X se anula en infinito.

(c) X es conexo si y solo si cada función continua no constante en X tiene rango infinito.

A fin de usar las funciones para estudiar los espacios topológicos, aprovechamos el hecho de que las funciones poseen una estructura algebraica que es inducida por la estructura algebraica de los números complejos.

1.5 Definición. Dadas funciones f y g en X, $p \in X$, y $\alpha \in \mathbb{C}$, definimos:

$i.$ $(f + g)(p) = f(p) + g(p)$.

$ii.$ $(fg)(p) = f(p)g(p)$.

$iii.$ $(\alpha f)(p) = \alpha f(p)$

1.6 Problema. Demuestre que

(a) Si f y g son continuas, entonces también lo son $f + g$, fg, y αf.

(b) Si f y g son acotadas, entonces también lo son $f + g$, fg, y αf.

(c) Si f y g se anulan en infinito, entonces también lo hacen $f + g$, fg, y αf.

Tenemos la siguiente reformulación algebraica del problema 1.4.

1.7 Problema. Demuestre que:

(a) X es compacto si y solo si existe una función continua f en X que se anula en infinito tal que $fg = g$ para todas funciones g definidas en X.

(b) X es conexo si y solo si no existe una función no constante continua f en X tal que $f^2 = f$ (donde f^2 significa ff).

El problema 1.6 describe conjuntos de funciones en X que son estables con respecto a ciertas operaciones algebraicas. Además, queremos que estos conjuntos de funciones estén cerrados bajo de operaciones analíticas tal como la convergencia de sucesiones. Si (f_n), $n \in \mathbb{N}$, es una sucesión de funciones en X, solo saber que (f_n) converge puntualmente en X, es decir la sucesión de los números complejos $(f_n(p))$ converge para todo $p \in X$, no sirve mucho. Por ejemplo, no es cierto que si (f_n) es una sucesión de funciones continuas que converge puntualmente a f, ésta última es continua a su vez. Necesitamos una forma de convergencia más fuerte.

1.8 Definición. Una sucesión de funciones (f_n), $n \in \mathbb{N}$, en X *converge uniformemente* a una función f en X (escribimos $f_n \to f$ uniformemente) si para cada $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(p) - f(p)| < \epsilon$ para cada $p \in X$ cuando $n > n_0$.

1.9 Problema. Suponga que $f_n \to f$ uniformemente.

(a) Si f_n es acotada para todo n, entonces f es acotada.
(b) Si f_n es continua para todo n, entonces f es continua.
(c) Si f_n se anula en infinito para todo n, entonces f se anula en infinito.

Los conjuntos de funciones que nos interesan poseen estructura, en el sentido algebraico del término. Esto motiva la definición a continuación.

1.10 Definición. Un *álgebra* (compleja y asociativa) es un espacio vectorial complejo con un producto asociativo y bilineal

$$A \times A \to A,$$
$$(x, y) \mapsto xy$$

Note que en particular, A es un anillo. El álgebra A es *conmutativa* si el producto es conmutativo, es decir $xy = yx$ para todos $x, y \in A$. A es *unitaria* si existe $1 \in A$ (1_A si es necesario ser más preciso), $1 \neq 0$, tal que $1x = x1$ para todo $x \in A$. Un elemento $x \in A$ es *invertible (en A)* si existe $y \in A$ tal que $xy = yx = 1$. En este caso y es único y sólo depende de x, usualmente lo denotamos por x^{-1}. Un elemento $x \in A$ es (un) *idempotente* si $x^2 = x$ (donde x^2 significa xx). Por ejemplo, 0 y 1 son idempotentes en cualquier álgebra unitaria, se llaman *idempotentes triviales*.

1.11 Ejemplos.

(a) El álgebra $M_n(\mathbb{C})$ consiste de todas las matrices complejas $n \times n$. Es conmutativa si y solo si $n = 1$. Identificamos a $M_1(\mathbb{C})$ con $\mathbb{C}$. Es unitaria y contiene idempotentes no triviales si y solo si $n > 1$.
(b) El álgebra $L(V)$ que consiste de todas las aplicaciones lineales $V \to V$ donde V es un espacio vectorial complejo. El producto es la composición de aplicaciones y no es conmutativa a menos que V sea de dimensión 1.

1.12 Definición. Sean A y B álgebras. Una aplicación $\phi : A \to B$ es un *homomorfismo (de álgebras)* si ϕ es lineal y $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$ para todos $x, y \in A$. Si A y B son unitarias, pedimos además que $\phi(1_A) = 1_B$. Si ϕ es biyectiva, ϕ es un *isomorfismo (de álgebras)*. Si existe tal isomorfismo, decimos que A y B son *isomorfas (como álgebras)*, y escribimos $A \cong B$. Esta es una relación de equivalencia entre álgebras.

1.13 Ejemplo. V es un espacio vectorial complejo de dimensión $n \in \mathbb{N}$ si y solo si $L(V) \cong M_n(\mathbb{C})$.

1.14 Definición. Sea A un álgebra. Un subespacio $B \subseteq A$ tal que $xy \in B$ cuando $x, y \in B$ es una *subálgebra de* A. Si adicionalmente $xy, yx \in B$ cuando $x \in A$ y $y \in B$, B es un *ideal (bilátero) de* A.

Una subálgebra es en sí misma un álgebra. El subespacio trivial $\{0\}$ y A son ideales de A. Si éstos son los únicos ideales de A entonces decimos que A es *simple*.

1.15 Problema. $L(V)$ es simple si y solo si dim(V) es finita.

Ahora llegamos al tipo de álgebra que es el más importante para nuestros propósitos.

1.16 Ejemplo. El álgebra $\mathbb{C}^X$ que consiste de todas las funciones (no necesariamente continuas) $X \to \mathbb{C}$ donde X es cualquier conjunto no vacío. Es conmutativa y unitaria. Si X es un espacio topológico, el álgebra $C(X)$ que consiste de todas las funciones continuas en X es un subálgebra unitaria de $\mathbb{C}^X$, y $C_b(X)$, que consiste de todas las funciones continuas y acotadas en X, es una subálgebra unitaria de $C(X)$. El conjunto $C_0(X)$ que consiste de todas las funciones continuas que se anulan en infinito es una subálgebra y un ideal de $C(X)$. Según el problema 1.7, tenemos que:

1. $C_0(X)$ es unitaria si y solo si X es compacto.
2. $C(X)$ (o $C_b(X)$) tiene idempotentes no triviales si y solo si X es conexo.

De esta manera la estructura de tales álgebras nos puede decir algo sobre la topología de X. Terminamos esta sección con una reformulación de la pregunta 1.1.

1.17 Pregunta. *¿Bajo qué circunstancias tales álgebras nos pueden decir todo sobre la topología de X? Por ejemplo, ¿cuándo tenemos que $C_0(X)$ es isomorfo a $C_0(Y)$ si y solo si X es homeomorfo a Y?*

La dirección "si" es verdad en general, pero la dirección "solo si" no lo es, como lo muestra el siguiente ejemplo.

1.18 Ejemplo. Si X es cualquier conjunto con la topología trivial donde solo X y el conjunto vacío son abiertos, entonces $C(X) = C_0(X) \cong \mathbb{C}$.

2. Álgebras de Banach

Recordemos que un *espacio de Banach* es un espacio vectorial normado, en el cual $||x||$ denota la norma de x, que es un espacio métrico completo con respecto a la métrica d definida por
$$d(x, y) = ||x - y||.$$

2.1 Definición. Un *álgebra de Banach* es un espacio de Banach A que también es un álgebra tal que

$$||xy|| \leq ||x|| \cdot ||y||$$

para todo $x, y \in A$. Si A es unitaria, suponemos que $||1_A|| = 1$. (Si $||1_A|| \neq 1$, entonces existe una norma equivalente en A con la propiedad deseada). Una subálgebra cerrada de un álgebra de Banach se llama una *subálgebra de Banach de* A y es un álgebra de Banach.

Muchos de los ejemplos de álgebras que ya vimos en la sección anterior son ejemplos de álgebras de Banach.

2.2 Ejemplos.

(a) $M_n(\mathbb{C})$ es un álgebra de Banach con la norma de matriz

$$||M||_{mat} = \text{máx}\{||Mx|| \mid x \in \mathbb{C}^n, ||x|| = 1\}.$$

(b) Si V y W son espacios vectoriales normados, entonces un operador lineal $T : V \to W$ es continuo si y solo si T es acotado, es decir la imagen de cualquier conjunto acotado en V es a su vez un conjunto acotado en W. Tenemos la norma operador de T dada por

$$||T||_{op} = \sup\{||T(x)|| \mid x \in V, ||x|| = 1\} = \text{ínf}\{c \in \mathbb{R} \mid ||T(x)|| \leq c||x|| \, \forall x \in V\}.$$

Los conjuntos descritos son espacios de Banach. Si V es un espacio de Banach, el álgebra $B(V)$ que consiste de todos los operadores lineales y acotados $V \to V$ es un álgebra de Banach (el producto es la composición de aplicaciones). Si la dimensión de V es $n \in \mathbb{N}$, entonces existe un isomorfismo de álgebras $\phi : B(V) \to M_n(\mathbb{C})$ que también es una isometría, es decir $||\phi(T)||_{mat} = ||T||_{op}$ para todo $T \in B(V)$.

(c) El espacio vectorial $l^1(\mathbb{Z})$ consiste de todas las funciones (o sucesiones) $x : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, $n \mapsto x_n$, tal que la suma $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|$ es finita. En este caso definimos la norma l^1 $||x||_1$ como esta suma, y definimos el *producto de convolución* $x * y$ como

$$(x * y)_k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n y_{k-n}.$$

Esta operación define un producto en $l^1(\mathbb{Z})$ (la suma de arriba converge absolutamente), que hace de $l^1(\mathbb{Z})$ un álgebra de Banach.

(d) De manera similar definimos $L^1(\mathbb{R})$ reemplazando $\mathbb{Z}$ por $\mathbb{R}$, la sucesión x por una función Lebesgue medible $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, y la suma $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|$ por la integral (de Lebesgue) $\int_{\mathbb{R}} |f|$. El producto de convolución toma la forma

$$(f * g)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(s)g(t-s)\, ds.$$

$L^1(\mathbb{R})$ es un álgebra de Banach conmutativa y no unitaria.

2.3 Problema. Verifique que $l^1(\mathbb{Z})$ y $L^1(\mathbb{R})$ son álgebras de Banach conmutativas, $l^1(\mathbb{Z})$ es unitaria, mientras $L^1(\mathbb{R})$ no es unitaria.

2.4 Comentario. Los dos ejemplos anteriores se pueden generalizar a cualquier grupo topológico G que es Hausdorff y localmente compacto. Obtenemos así un álgebra de Banach $L^1(G)$, la cual es conmutativa si y solo si G es abeliano y unitaria si y solo si G es discreto.

2.5 Ejemplos.

(a) Si X es cualquier conjunto no vacío, el conjunto $\mathbb{C}_b^X$ que consiste de todas la funciones acotadas $X \to \mathbb{C}$ es un álgebra de Banach conmutativa y unitaria con la norma
$$||f|| = \sup\{|f(p)| \mid p \in X\}.$$
Observamos que una sucesión de funciones acotadas en X converge uniformemente si y solo si converge con respecto a esta norma. La demostración de que $\mathbb{C}_b^X$ es completo utiliza el problema 1.9 (a).

(b) Si X es cualquier espacio de medida, $L^\infty(X)$ consiste de todas las clases de equivalencia de funciones (dos funciones son equivalentes cuando son iguales en un conjunto cuyo complemento tiene medida cero) esencialmente acotadas en X (el conjunto de números M descrito abajo no es vacío) con la norma
$$||[f]|| = \text{ínf}\{M \in \mathbb{R} \mid |f(p)| \leq M \text{ para todo } p \text{ en un subconjunto de } X$$
$$\text{cuyo complemento en } X \text{ tiene medida cero}\}.$$
$L^\infty(X)$ es un álgebra de Banach conmutativa y unitaria (y se identifica con $\mathbb{C}_b^X$ cuando X tiene la medida de conteo, es decir la medida que indica el número de elementos que contiene un conjunto).

(c) Si X es cualquier espacio topológico, el conjunto $C_b(X)$ que consiste de todas las funciones continuas y acotadas en X es un subálgebra de Banach unitaria de $\mathbb{C}_b^X$. El conjunto $C_0(X)$ que consiste de todas las funciones continuas que se anulan en infinito es un subálgebra de Banach de $C_b(X)$ y, como hemos visto, es unitaria si y solo si X es compacto, en cuyo caso $C_0(X)$ es el álgebra $C(X)$ de todas las funciones continuas en X. Las álgebras están topológicamente cerradas en $\mathbb{C}_b^X$ (y por lo tanto completas) por el problema 1.9 (b) y (c).

2.6 Definición. Sea A un álgebra de Banach unitaria. Si $\lambda \in \mathbb{C}$, denotamos $\lambda 1_A \in A$ simplemente por λ. Dado $x \in A$, definimos el *espectro de* x como
$$\sigma(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid x - \lambda \text{ no es invertible en } A\}.$$

2.7 Ejemplos.

(a) Para $x \in M_n(\mathbb{C})$, $\sigma(x)$ consiste de todos los valores propios de x. Esto no es necesariamente verdad para $x \in B(V)$ cuando $\dim(V)$ es infinito.

(b) Para $f \in C_0(X)$ (y más generalmente en $C_b(X)$ o $\mathbb{C}_b^X$), f es invertible si y solo si $f(p) \neq 0$ para todo $p \in X$, y por lo tanto

$$\sigma(f) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid f(p) = \lambda \text{ para algún } p \in X\},$$

es decir el espectro de f es su rango.

En este punto requerimos algunos resultados fundamentales del análisis funcional. Si V es un espacio vectorial normado, tenemos el espacio vectorial dual V^* que consiste de todas las funcionales lineales acotadas (o continuas) $V \to \mathbb{C}$, que en sí mismo es un espacio vectorial normado.

2.8 Teorema (Hahn-Banach)**.** *[5, Teorema 1.4.2] Si V es un espacio vectorial normado, entonces V^* separa los puntos de V, en el sentido de que si $v, w \in V$, $v \neq w$, entonces existe $\phi \in V^*$ tal que $\phi(v) \neq \phi(w)$.*

2.9 Teorema (Principio de acotación uniforme)**.** *[Teorema 1.5.16][5] Sean V y W espacios de Banach y C una colección de operadores lineales acotados $V \to W$. Si el conjunto $\{||T(v)|| \mid T \in C\}$ es acotado en $\mathbb{R}$ para todo $v \in V$, entonces también lo es el conjunto $\{||T|| \mid T \in C\}$. ($||T||$ denota la norma operador de T [Ejemplos 2.2 (b)].)*

2.10 Problema. Sea A un álgebra de Banach unitaria y sea $x \in A$.

(a) Demuestre que si $||x - 1|| < 1$, entonces x es invertible en A. Sugerencia: Use lo que sabe del caso $A = \mathbb{C}$ para encontrar una serie de potencias que converge a x^{-1}.

(b) Demuestre que $\sigma(x)$ es un subconjunto cerrado de $\mathbb{C}$ contenido en el disco cerrado con radio $||x||$ centrado en el origen, con lo que queda demostrado que $\sigma(x)$ es compacto. Sugerencia: Use la parte (a).

(c) Demuestre que $\sigma(x)$ es no vacío. Sugerencia: Suponga que $\sigma(x)$ es vacío, sea $\phi \in A^*$, y considere la función

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$
$$f(z) = \phi((x - z)^{-1}).$$

Demuestre que f es acotada y analítica en $\mathbb{C}$, y por lo tanto constante por el teorema de Liouville. Ahora aplique el teorema 2.8.

2.11 Definición. El *radio espectral* de $x \in A$ es

$$r(x) = \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(x)\}.$$

2.12 Problema (Teorema de aplicación espectral)**.** Si A es un álgebra unitaria, $x \in A$, y $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es una función polinómica, definimos $p(x) \in A$ por evaluar $p(z)$ en $z = x$. Demuestre que

$$\sigma(p(x)) = p(\sigma(x)).$$

Sugerencia: Factorizar $p(z)$ con $z \in \mathbb{C}$ para obtener una factorización de $p(x)$.

2.13 Problema (Fórmula del radio espectral)**.** Demuestre que

$$r(x) = \lim_{n\to\infty} ||x^n||^{\frac{1}{n}}.$$

Sugerencia: Sea $\phi \in A^*$ y considera la función

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

$$f(z) = \phi((1 - zx)^{-1}).$$

Encuentre una serie de potencias que converge a f en el disco centrado en 0 con radio $r(x)^{-1}$. Aplique el teorema 2.9 a los coeficientes de la serie y también problema 2.12.

Ahora nos enfocaremos en álgebras de Banach conmutativas. Necesitaremos el concepto del espectro de tal álgebra de Banach, no solo de algún elemento del álgebra. Esta noción existe para álgebras no conmutativas también, pero es más compleja a ese nivel de generalidad.

2.14 Definición. Sea A un álgebra de Banach conmutativa. El *espectro de* A es el conjunto $\hat{A}$ que consiste de todos los homomorfismos (de álgebras) no nulos (es decir no constantemente cero) $A \to \mathbb{C}$.

2.15 Ejemplos.

(a) El espectro de $l^1(\mathbb{Z})$ [Ejemplos 2.2 (c)] se puede identificar con el círculo unitario $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{C}$ por la aplicación

$$\mathbb{T} \to \widehat{l^1(\mathbb{Z})},$$

$$e^{it} \mapsto \phi_t,$$

donde

$$\phi_t(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{int}.$$

(b) El espectro de $L^1(\mathbb{R})$ [Ejemplos 2.2 (d)] se puede identificar con $\mathbb{R}$ por la aplicación

$$\mathbb{R} \to \widehat{L^1(\mathbb{R})},$$

$$t \mapsto \phi_t,$$

donde

$$\phi_t([f]) = \int_{\mathbb{R}} f(s)e^{ist}\, ds.$$

2.16 Comentario. Si G es un grupo localmente compacto abeliano, el espectro de $L^1(G)$ [Comentario 2.4] se puede identificar con el *grupo dual* $\widehat{G}$ de G, que consiste de todos los homomorfismos continuos $G \to \mathbb{T}$. A estos homomorfismos se los conoce como los *caracteres de* G.

2.17 Proposición. *Sea* A *un álgebra de Banach conmutativa y unitaria. Entonces:*

(a) *Para todo* $x \in A$,
$$\sigma(x) = \{\phi(x) \mid \phi \in \hat{A}\}.$$

(b) *Para todo* $\phi \in \hat{A}$, ϕ *es acotado con* $||\phi|| = 1$.

Demostración. Sea $\phi \in \hat{A}$ y $x \in A$. Dado que $\phi \neq 0$, tenemos que $\phi(1) = 1$, de modo que

$$\begin{aligned} \phi(x - \phi(x)) &= \phi(x) - \phi(\phi(x)1) \\ &= \phi(x) - \phi(x)\phi(1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Como la imagen por ϕ de un elemento invertible de A es invertible en $\mathbb{C}$ (es decir no nula), tenemos que $x - \phi(x)$ no es invertible, así que $\phi(x) \in \sigma(x)$. Esto muestra que $\{\phi(x) \mid \phi \in \hat{A}\} \subseteq \sigma(x)$.

Ahora supongamos que $\lambda \in \sigma(x)$, así que $x - \lambda$ no es invertible. Se sigue del lema de Zorn que existe un ideal máximo I de A que contiene $x - \lambda$. El cociente A/I es un cuerpo, de modo que cada elemento no nulo de A/I debe ser invertible. Ya que el espectro de cada elemento de A/I deber ser no vacío [problema 2.15 (3)], para todo $y \in A$, existe $\mu \in \mathbb{C}$ tal que $(y + I) - \mu$ no es invertible, así que $(y + I) - \mu = 0$, o $y + I = \mu$ $(= \mu(1_A + I))$. (Se sigue que $A/I \cong \mathbb{C}$). Definamos $\phi : A \to \mathbb{C}$ definido por $\phi(y) = \mu$ según el proceso que hemos descrito. Entonces tenemos $\phi \in \hat{A}$ y $\ker(\phi) = I$. Lo que tenemos es una biyección entre $\hat{A}$ y los ideales máximos de A. En particular, $x - \lambda \in \ker(\phi)$, es decir $\phi(x) = \lambda$. Entonces $\sigma(x) \subseteq \{\phi(x) \mid \phi \in \hat{A}\}$ y por lo tanto $\sigma(x) = \{\phi(x) \mid \phi \in \hat{A}\}$.

Ahora observamos que, ya que $\phi(x) \in \sigma(x)$, por [problema 2.10 (b)] tenemos $|\phi(x)| \leq ||x||$. Ya que $||1|| = 1$ y $\phi(1) = 1$, tenemos $||\phi|| = 1$. □

Para extender resultados de álgebras de Banach unitarias a álgebras de Banach no unitarias, tenemos la siguiente construcción útil.

2.18 Problema. Sea A un álgebra de Banach y sea A^+ el espacio vectorial suma directa $A \oplus \mathbb{C}$. Suponga que definimos en A^+ el producto

$$(x, \alpha)(y, \beta) = (xy + \beta x + \alpha y, \alpha\beta), \quad x, y \in A, \alpha, \beta \in \mathbb{C},$$

y la aplicación
$$||(x, \alpha)|| = ||x|| + |\alpha|.$$

(a) Demuestre que con estas definiciones A^+ es un álgebra de Banach unitaria. Se llama la *unitización* (de álgebra de Banach) de A.

(b) Demuestre que si A es un álgebra de Banach no unitaria y $\phi \in \hat{A}$, entonces ϕ es acotado y $||\phi|| \leq 1$. Sugerencia: Defina $\phi^+ : A^+ \to \mathbb{C}$ por $\phi^+(x, \alpha) = \phi(x) + \alpha$. Demuestre que $\phi^+ \in \widehat{A^+}$.

2.19 Ejemplo. La unitización de $C_0(X)$ es isomorfa a $C(X^*)$ donde X^* es la compactificación de un punto de X [Ejemplos 1.3(d)].

3. La transformada de Gelfand

Sea V un espacio vectorial normado y sea V^* su espacio dual. La *topología débil* en V es la topología más débil en V tal que cada $\phi \in V^*$ es continua, es decir cualquier otra topología verificando esta condición contiene a la topología débil. En particular, la topología débil es más débil que la topología definida por la norma (y de hecho es estrictamente más débil si y solo si la dimensión de V es infinita), pero todavía es Hausdorff. La *topología débil-** en V^* es la topología más débil en V^* tal que cada funcional (lineal) $\epsilon_x : V^* \to \mathbb{C}$, $\epsilon_x(\phi) = \phi(x)$, donde $x \in V$, es continua. Otra vez esta topología débil-* es más débil que la topología definida por la norma pero todavía Hausdorff. Sea

$$\mathcal{B}_{V^*} = \{\phi \in V^* \mid ||\phi|| \leq 1\},$$

la bola unitaria cerrada en V^*. Cuando $\dim(V)$ es finita, sabemos del teorema de Heine-Borel que $\mathcal{B}_V$ es compacto en la topología definida por la norma. Sin embargo cuando $\dim(V)$ es infinita, $\mathcal{B}_V$ no es compacto en la topología definida por la norma.

Necesitamos otro teorema fundamental del análisis funcional.

3.1 Teorema (Banach-Alaoglu)**.** *[5, Teorema 1.6.9] Si V es un espacio de Banach, entonces $\mathcal{B}_{V^*}$ es compacto respecto a la topología débil-*.*

Según la proposición 2.17 y el problema 2.18, si A es un álgebra de Banach conmutativa, el espectro $\hat{A}$ de A está contenido en la bola unitaria cerrada $\mathcal{B}_{A^*}$ en A^* y contenido en la esfera unitaria cuando A es unitaria.

Recordemos que un espacio topológico X se llama *localmente compacto* si para cada punto $p \in X$ existe un conjunto abierto $U \subseteq X$ y un conjunto compacto $K \subseteq X$ tales que $p \in U \subseteq K$.

3.2 Problema. Demuestre que un conjunto abierto de un espacio de Hausdorff localmente compacto es localmente compacto en la topología inducida.

3.3 Proposición. *Con la topología inducida por la topología débil-* en $\mathcal{B}_{A^*}$, $\hat{A}$ es un espacio de Hausdorff localmente compacto. Además, $\hat{A}$ es compacto si y solo si A es unitaria.*

Demostración. Sean $x, y \in A$ y consideremos el conjunto

$$K_{x,y} = \{\phi \in \mathcal{B}_{A^*} \mid \phi(xy) = \phi(x)\phi(y)\}.$$

Es cerrado en $\mathcal{B}_{A^*}$ respecto a la topología débil-*, y por lo tanto compacto, ya que $\mathcal{B}_{A^*}$ es compacto en la topología débil-* [teorema 3.1]. La intersección

$$K = \bigcap_{x,y \in A} K_{x,y}$$

también es cerrada y por lo tanto compacta. El conjunto $\{0\}$ con un elemento, donde 0 significa la funciona $A \to \mathbb{C}$ que es constantemente cero, es cerrado, así que

$$\hat{A} = K \cap (\mathcal{B}_{A^*} \backslash \{0\})$$

es un subconjunto abierto del espacio topológico compacto K. Por lo tanto [problema 3.2] $\hat{A}$ es un espacio de Hausdorff localmente compacto en la topología inducida por la topología débil-* en $\mathcal{B}_{A^*}$. □

3.4 Definición. Sea A un álgebra de Banach conmutativa y $x \in A$. Definimos

$$\hat{x} : \hat{A} \to \mathbb{C}$$

$$\hat{x}(\phi) = \phi(x).$$

La funcional lineal $\epsilon_x : A^* \to \mathbb{C}$, $\epsilon_x(\phi) = \phi(x)$ es continua respecto a la topología débil-* por definición, así que su restricción $\hat{x}$ a $\hat{A}$ también lo es. Cuando A es unitaria, $\hat{A}$ es compacto respecto a esta topología [proposición 3.3] y cada función continua se anula en el infinito. En este caso el rango de $\hat{x}$ es precisamente el espectro de x [proposición 2.17 (1)], y por lo tanto la norma de $\hat{x}$ en $C(\hat{A})$ es el radio espectral $r(x)$.

3.5 Problema. Si A es un álgebra de Banach conmutativa y no unitaria, utilice la unitización de A [problema 2.18] para demostrar que $\hat{x}$ se anula en infinito.

3.6 Definición. Sea A un álgebra de Banach conmutativa. La aplicación

$$\Gamma : A \to C_0(\hat{A})$$

$$\Gamma(x) = \hat{x}$$

se llama la *transformada de Gelfand de* A.

3.7 Proposición. Γ *es un homomorfismo de álgebras de Banach tal que* $||\Gamma|| \leq 1$ *(es decir* Γ *es una contracción).*

Demostración. Es un cálculo rutinario verificar que Γ es un homomorfismo de álgebras. Observamos que si $x \in A$, tenemos

$$||\Gamma(x)|| = ||\hat{x}|| = \sup\{|\hat{x}(\phi)| \mid \phi \in \widehat{A}\}.$$

Tenemos $\hat{x}(\phi) = \phi(x)$ y $|\phi(x)| \leq ||x||$ ya que $||\phi|| \leq 1$ [proposición 2.17 y problema 2.18]. Entonces $||\Gamma(x)|| \leq ||x||$. □

3.8 Ejemplos.

(a) Con el espectro de $l^1(\mathbb{Z})$ identificado con $\mathbb{T}$ [Ejemplos 2.15 (a)], la transformada de Gelfand de $l^1(\mathbb{Z})$ tiene la forma $\Gamma : l^1(\mathbb{Z}) \to C_0(\mathbb{T})$, $x \mapsto \hat{x}$

donde

$$\hat{x}(e^{it}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{int}.$$

(b) Con el espectro de $L^1(\mathbb{R})$ identificado con $\mathbb{R}$ [Ejemplos 2.15 (b)], la transformada de Gelfand de $L^1(\mathbb{R})$ tiene la forma

$$\widehat{[f]}(t) = \int_{\mathbb{R}} f(s)e^{ist}\, ds.$$

De esta manera la transformada de Gelfand se identifica con la *transformada de Fourier* en $\mathbb{R}$.

3.9 Observación. Si G es un grupo localmente compacto abeliano, con el espectro de $L^1(G)$ identificado con el grupo dual $\widehat{G}$ [Comentario 2.16], la transformada de Gelfand se identifica con un homomorfismo

$$L^1(G) \to C_0(\widehat{G}),$$

e igualmente se llama la *transformada de Fourier* en G.

4. C^*-álgebras y el teorema de Gelfand-Naimark

Nuestra meta ahora es entender bajo qué circunstancias es la transformada de Gelfand un isomorfismo. Para lograr esto, investigaremos más la estructura del álgebra de Banach $C_0(X)$, con la idea de que un álgebra de Banach A no puede ser isomorfa a $C_0(X)$ si A no posee la misma estructura.

El caso más simple es $A = \mathbb{C} \cong C_0(\{p\})$. Recordemos el hecho de que para toda $z \in \mathbb{C}$,

$$|z|^2 = z\bar{z}.$$

En esta ecuación aparentemente inocente se encuentra la estructura adicional que requerimos. Para los números complejos es conjugación compleja. Observamos que, para $f \in C_0(X)$,

$$\begin{aligned} ||f||^2 &= \sup\{|f(p)|^2 \mid p \in X\} \\ &= \sup\{\overline{f(p)}f(p) \mid p \in X\} \\ &= ||\overline{f}f|| \end{aligned}$$

donde $\overline{f}(p) = \overline{f(p)}$ para todo $p \in X$.

4.1 Definición. Una *involución* en un álgebra de Banach es una aplicación $A \to A$, $x \mapsto x^*$ con las siguientes propiedades. Para todo $x, y \in A$, $\alpha \in \mathbb{C}$, tenemos:

(a) $(x^*)^* = x$.

(b) $(x + y)^* = x^* + y^*$.

(c) $(\alpha x)^* = \overline{\alpha}x^*$.

(d) $(xy)^* = y^*x^*$.

Una C^**-álgebra* es un álgebra de Banach con una involución tal que

$$||x^*x|| = ||x||^2$$

para todo $x \in A$, cual se llama la C^**-identidad*.

4.2 Ejemplos.

(a) $M_n(\mathbb{C})$ con la involución dada por la conjugada traspuesta $A^* = \overline{A^t}$ es una C^*-álgebra. A^* se llama la *adjunta de* A.

(b) Si H es un espacio de Hilbert (es decir un espacio de producto interno completo), entonces para cada operador lineal acotado $T : H \to H$, existe una aplicación única $T^* : H \to H$ tal que $\langle T(u), v\rangle = \langle u, T^*(v)\rangle$ para todo $u, v \in H$. El operador T^* se llama el *adjunto de* T y también es lineal y acotado. La aplicación $T \mapsto T^*$ es una involución en $B(H)$ con la cual $B(H)$ es un C^*-álgebra.

4.3 Problema. Considerando el álgebra de Banach $L^1(\mathbb{Z})$ y $x \in l^1(\mathbb{Z})$ [Ejemplos 2.2 (c)], definimos

$$x_n^* = \overline{x_{-n}}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Similarmente, considerando el álgebra de Banach $L^1(\mathbb{R})$ y $f \in L^1(\mathbb{R})$ [Ejemplos 2.2 (d)], definimos

$$f^*(x) = \overline{f(x^{-1})}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Demuestre que en ambos casos obtenemos una involución que no cumple la C^*-identidad.

4.4 Comentario. Se puede mostrar, además, que no existen involuciones en las álgebras de Banach $l^1(\mathbb{Z})$ y $L^1(\mathbb{R})$ que satisfacen la C^*-identidad. Si G es un grupo localmente compacto abeliano, el álgebra $L^1(G)$ se puede completar respecto a *otra norma* para obtener una C^*-álgebra $C^*(G)$. Estas C^*-álgebras están relacionadas con la teoría de representaciones de grupos [2, Part II].

4.5 Definición. Sean A y B dos C^*-álgebras. Un homomorfismo de álgebras $\phi : A \to B$ tal que $\phi(x^*) = \phi(x)^*$ para todo $x \in A$ se llama un $*$*-homomorfismo*. Si adicionalmente ϕ es una biyección, ϕ se llama un $*$*-isomorfismo*. Si existe tal $*$-isomorfismo, decimos que A y B son $*$*-isomorfos (o isomorfos como* C^**-álgebras)* y escribimos $A \cong B$.

4.6 Ejemplo. Si H es un espacio de Hilbert de dimensión $n \in \mathbb{N}$, entonces $B(H)$ y $M_n(\mathbb{C})$ son $*$-isomorfos.

4.7 Definición. Un elemento x de una C^*-álgebra se llama *autoadjunto* si $x^* = x$.

4.8 Ejemplo. Si T es un operador lineal en un espacio de Hilbert de dimensión finita, T es autoadjunto si y solo si T se puede representar con una matriz que es igual a su traspuesta conjugada, por ejemplo una matriz real simétrica.

4.9 Problema. Sea x un elemento autoadjunto de una C^*-álgebra A.

(a) Demuestre que cada elemento de A se puede expresar unicamente en la forma $x + iy$ donde $x, y \in A$ son autoadjuntos. Como en $\mathbb{C}$, x y y se llaman las *partes real e imaginaria*, respectivamente, del elemento.

(b) Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$||x^{2^n}|| = ||x||^{2^n}.$$

(c) Si A es unitaria, demuestre que $||x|| = r(x)$, donde $r(x)$ es el radio espectral de x [Definición 2.11]. Sugerencia: Use la parte (a) con la fórmula del radio espectral [problema 2.13].

4.10 Comentario. Si x es cualquier elemento de una C^*-álgebra unitaria A, entonces x^*x es autoadjunto. Se sigue del problema 4.9 (c) y la C^*-identidad que

$$||x||^2 = \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \mathbb{C}, x^*x - \lambda \text{ no es invertible}\}.$$

De esta manera, la norma de A está determinada completamente por la estructura algebraica de A. Si A es cualquier álgebra unitaria, existe no más de una norma para la cual A es una C^*-álgebra. También, si A y B son C^*-álgebra unitarias y $\phi : A \to B$ es un $*$-homomorfismo, entonces

$$||\phi(x)||^2 = ||\phi(x)^*\phi(x)|| = ||\phi(x^*x)|| = r(\phi(x^*x)) \leq r(x^*x) = ||x^*x|| = ||x||^2.$$

Esto quiere decir que ϕ es acotado y $||\phi|| \leq 1$. Si ϕ es inyectivo, entonces $||\phi|| = 1$ y ϕ es una isometría. En particular, cualquier $*$-isomorfismo es una isometría. Estas conclusiones se pueden extender a C^*-álgebras no unitarias usando, por ejemplo, [problema 4.15].

4.11 Definición. Si A es una C^*-álgebra y B una subálgebra cerrada de A, una C^*-álgebra tal que $x^* \in B$ cuando $x \in B$, entonces B se llama una *C^*-subálgebra de A*, y B es en sí misma una C^*-álgebra.

Necesitaremos el siguiente resultado.

4.12 Teorema (Stone-Weierstrass)**.** *[3, Capítulo 12], [5, Teorema A.6.9 (b)] Sea X un espacio de Hausdorff compacto. Si A es una C^*-subálgebra unitaria de $C(X)$ que separa los puntos de X, en el sentido de que $f(p) = f(q)$ para todo $f \in A$ solo cuando $p = q$, entonces $A = C(X)$.*

Ahora llegamos al resultado que nos interesa.

4.13 Teorema (Gelfand-Naimark)**.** *Cada C^*-álgebra conmutativa es $*$-isomorfa (isométricamente) a $C_0(X)$ para algún espacio de Hausdorff localmente compacto X. En efecto, la transformada de Gelfand*

$$\Gamma : A \to C_0(\hat{A})$$

es un $*$-isomorfismo (isométrico).

Vamos a demostrar el teorema 4.13 en el caso de que A es unitaria, y dejamos el caso no unitaria como el último problema. Primero, necesitamos algunos resultados preliminares.

4.14 Problema. Sea A un álgebra de Banach unitaria y sea $x \in A$.

(a) Demuestre que podemos definir

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

y que $e^{x+y} = e^x e^y$ para todo $x, y \in A$ tal que $xy = yx$.

(b) Ahora supone que A es una C^*-álgebra y que x es autoadjunto. Para todo $t \in \mathbb{R}$, defina

$$u_t = e^{itx}.$$

Demuestre que para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$u_t^* = u_{-t}.$$

(c) Un elemento u de una C^*-álgebra se llama *unitario* si $u^* = u^{-1}$. Demuestre que si u es unitario, entonces $||u|| = 1$. Demuestre que u_t de la parte (b) es unitario para todo $t \in \mathbb{R}$.

(d) Sea $\phi \in \hat{A}$. Con x autoadjunto como en la parte (b), demuestre que $\phi(x) \in \mathbb{R}$. Sugerencia: Considere $\phi(u_t)$ y recuerda que $||\phi|| = 1$. Se sigue que $\sigma(x) \subseteq \mathbb{R}$.

Demostración de teorema 4.13 cuando A es unitaria. Sabemos ya por la proposición 3.3 que $\hat{A}$ es un espacio de Hausdorff localmente compacto. También hemos demostrado que $\Gamma : A \to C(\hat{A})$ es un homomorfismo (contractivo) de álgebras de Banach. Queda entonces por demostrar que Γ es una biyección y $\Gamma(x^*) = \Gamma(x)^*$ para todo $x \in \hat{A}$.

Sea x un elemento autoadjunto de A. Ya que $\hat{x}(\phi) = \phi(x)$ pertenece a $\sigma(x)$ [problema 2.17 (a)] y $\sigma(x) \subseteq \mathbb{R}$ [problema 4.14 (d)], tenemos que $\hat{x}$ es autoadjunto en $C(\hat{A})$. Cada elemento de A se puede expresar en la forma $x + iy$ donde x y y son autoadjuntos [proposición 4.9 (a)], y verificamos que $\Gamma((x + iy)^*) = \Gamma(x + iy)^*$.

Sea x cualquier elemento de A. Entonces x^*x es autoadjunto y tenemos que $||x^*x|| = r(x^*x)$ [problema 4.9 (c)]. Al mismo tiempo tenemos $||\Gamma(x^*x)|| = r(x^*x)$. Ahora por la C^*-identidad, tenemos

$$\begin{aligned} ||\Gamma(x)||^2 &= ||\Gamma(x)^*\Gamma(x)|| \\ &= ||\Gamma(x^*x)|| \\ &= r(x^*x) \\ &= ||x^*x|| \\ &= ||x||^2. \end{aligned}$$

Entonces Γ es una isometría (y en particular es inyectiva). Ahora solo falta demostrar que Γ es sobreyectiva. Esto es una consecuencia directa del teorema de Stone-Weierstrass [teorema 4.12]. □

4.15 Problema. Sea A una C^*-álgebra, sea $x \in A$, y definamos

$$L_x : A \to A$$

$$L_x(y) = xy.$$

(a) Demuestre que $L : x \mapsto L_x$ define un homomorfismo isométrico de álgebras de Banach de A a $B(A)$, el álgebra de Banach de operadores acotados en (el espacio de Banach) A.

(b) Defina

$$A^+ = \{L_x + \alpha \mid x \in A, \alpha \in \mathbb{C}\} \subseteq B(A),$$

donde α significa multiplicación escalar por α, y

$$(L_x + \alpha)^* = L_{x^*} + \overline{\alpha}.$$

Demuestre que A^+ es una C^*-álgebra unitaria. Se llama la *unitización (de C^*-álgebra) de A*. (La involución $(x, \alpha)^* = (x^*, \overline{\alpha})$ en la unitización de álgebra de Banach de A y no necesariamente cumple la C^*-identidad).

(c) Demuestre teorema 4.13 en el caso en que A no es unitaria utilizando la unitización de A.

4.16 Observación. El teorema 4.13 establece que estudiar C^*-álgebras conmutativas es, en algún sentido, lo mismo que estudiar espacios de Hausdorff localmente compactos. En el idioma de la teoría de categorías, tenemos una *equivalencia de categorías*. La idea de *topología no conmutativa* es estudiar C^*-álgebras con la perspectiva que son generalizaciones de espacios de Hausdorff localmente compactos, o, en otras palabras análogos no conmutativos de tales espacios. Aquí es de donde viene el concepto de *espacio no conmutativo*.

Terminamos con una pregunta para estudio adicional.

4.17 Pregunta. *¿Cómo se adapta la topología algebraica al estudio de espacios no conmutativos?*

Un buen lugar para empezar es [4], y luego [1].

Referencias

[1] A. Connes, *Noncommutative geometry*, Academic Press Inc., San Diego, CA, 1994. MR MR1303779 (95j:46063).

[2] J. Dixmier, *C^*-algebras*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1977, Translated from the French by Francis Jellett, North-Holland Mathematical Library, Vol. 15. MR MR0458185 (56 #16388)

[3] S. A. Morris, Topology without tears, www.topologywithouttears.net, 2016.

[4] M. Rørdam, F. Larsen & N. Laustsen, *An introduction to K-theory for C^*-algebras*, London Mathematical Society Student Texts, Vol. 49, Cambridge University Press, Cambridge, 2000. MR MR1783408 (2001g:46001)

[5] V. Sunder, *Functional analysis: Spectral theory*, Birkhauser, 1998.

JOHN R. SKUKALEK
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD SAN FRANCISCO DE QUITO
e-mail: jskukalek@usfq.edu.ec