Sobre la explosión de una ecuación de difusión no local con termino de reacción

On the blow-up for a non-local diffusion with a reaction term

Mauricio Bogoya[1,a]

Resumen. Se estudia la ecuación de difusión no local

$$u_t(x,t) = \int_\Omega J(x-y)(u(y,t)-u(x,t))dy + f(u(x,t)),$$

con condición inicial $u_0 \in C(\overline{\Omega})$ no negativa, donde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un dominio acotado, conexo y suave y f es una función que representa el término de reacción. Se analiza la existencia y unicidad de la soluciones no negativas. Se prueba que la solución explota en tiempo finito si f satisface algunas condiciones específicas. Para $f(u) = e^u$ se estima el tiempo de explosión, la razón de explosión y se analiza el conjunto de explosión cuando la condición inicial es radialmente simétrica.

Palabras claves: Difusión no local, Condición de Neumann, explosión.

Abstract. We study a non-local diffusion equation with a reaction term,

$$u_t(x,t) = \int_\Omega J(x-y)(u(y,t)-u(x,t))dy + f(u(x,t)),$$

with initial condition $u_0 \in C(\overline{\Omega})$ nonnegative, where $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ is a bounded connected and smooth domain and f a function that represents the reaction term. We analyze the existence and uniqueness of the solutions. We prove that the solutions blow up in finite time is f satisfies some conditions. For $f(u) = e^u$ we estimate the blow-up time, the blow-up rate and we analyze the blow up set for radially symmetric initial condition.

Keywords: Nonlocal diffusion, Neumann boundary conditions, blow-up.

Mathematics Subject Classification: 35K57, 35B40.

Recibido: mayo de 2016 Aceptado: septiembre de 2017

[1]Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia
[a]mbogoyal@unal.edu.co

1. Introducción

Para un número natural $N \geq 1$ sea $J : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ una función no negativa, suave, radialmente simétrica y estrictamente decreciente, de soporte compacto en la bola unitaria y $\int_{\mathbb{R}^N} J(x)dx = 1$. Ecuaciones de la forma

$$u_t(x,t) = J * u - u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^N} J(x-y)u(y,t)dy - u(x,t), \tag{1.1}$$

y variaciones de ella, han sido estudiadas en las últimas décadas en modelos de procesos de difusión, vea [1], [2], [4], [7]. En [7] si $u(x,t)$ representa la densidad en el punto x y en el tiempo t, y si $J(x-y)$ representa la distribución de probabilidad de saltar de la posición y a la posición x, entonces $(J * u)(x,t)$ es la razón con la cual los individuos llegan a la posición x desde todas las posiciones y, además $-u(x,t) = -\int_{\mathbb{R}^N} J(y-x)u(x,t)dy$ es la razón con la cual los individuos van desde la posición x hacia cualquier otra posición y. Estas consideraciones en ausencias de fuentes externas, llevan al hecho de que la densidad u satisface la ecuación (1.1). Esta ecuación es llamada ecuación de difusión no local ya que la difusión de la densidad u no depende solamente del punto x, sino que tambien depende de puntos y que pertenecen a una vecindad de x, como se presenta en el término de convolución $J*u$. La ecuación (1.1) comparte algunas propiedades con la ecuación del calor $u_t = \Delta u$ tales como: soluciones estacionarias acotadas son constantes, se tienen principios del máximo y las perturbaciones se propagan con velocidad infinita, vea [7]. Sin embargo no hay un efecto de regularización en general, vea [3].

Chasseigne y otros en [3] analizan el problema de Neumann asociado a (1.1)

$$\begin{aligned} &u_t(x,t) = \int_{\Omega} J(x-y)(u(y,t) - u(x,t))dy, \quad x \in \Omega, \quad t > 0 \\ &u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \end{aligned} \tag{1.2}$$

donde $u_0 \in L^1(\Omega)$ es una función no negativa y $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un dominio acotado, conexo y suave. Ellos hacen notar que $\int_{\Omega} J(x-y)(u(y,t) - u(x,t))dy$ tiene en cuenta a los individuos llegando o saliendo de la posición x de otros lugares. Como se integra sobre Ω, se impone que la difusión sólo tiene lugar en Ω, es decir, ningún individuo puede entrar o salir del dominio Ω. Esto es lo análogo de lo que se llama en la literatura condiciones de frontera de Neumann, vea [5]. Ellos analizan la existencia y unicidad de las soluciones de (1.2) y hallan que la solución converge exponencialmente al valor medio de la condición inicial.

Nuestro propósito en este trabajo es estudiar el problema de Neumann

$$\begin{aligned} &u_t(x,t) = \int_{\Omega} J(x-y)(u(y,t) - u(x,t))dy + f(u(x,t)), \quad x \in \Omega, \quad t > 0 \\ &u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \end{aligned} \tag{1.3}$$

donde $u_0 \in C(\overline{\Omega})$ es una función no negativa, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un dominio acotado, conexo y suave y f es una función que depende de u y representa el término de reacción (fuente). Nosotros asumimos las siguinetes hipótesis sobre f:

- A_1: f es una función continua, creciente y con $f(0) \geq 0$, $f(s) > 0$ para $s > 0$.
- A_2: f es una función convexa y $\displaystyle\int_a^{\infty} \frac{1}{f(s)} ds < \infty$

Para el problema (1.3) se analiza la existencia y unicidad de las soluciones no negativas. Si f satisface $A_1,\ A_2$, se tiene que las soluciones explotan en tiempo finito $T > 0$. Para $f(u) = e^u,\ f(u) = (1+u)\ln^p(1+u)$ *con* $p > 1$ se estima el tiempo de explosión y se analiza la razón de explosión de las soluciones, esto es la velocidad con la cual las soluciones van a infinito en el tiempo T. Para $f(u) = e^u$, nosotros probamos que si la condición inicial no negativa u_0 es radialmente simétrica en la bola de radio $R > 0$ y si tiene un único máximo en el origen entonces la solución también es radialmente simétrica y tiene un único máximo en el origen, el cual es el único punto de explosión.

Se dice que la solución u explota en tiempo finito T si existe $0 < T < \infty$ tal que $u(x,t)$ está definida para todo $t \in [0,T)$ y

$$\lim_{t \nearrow T} \sup \|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\overline{\Omega})} = \infty.$$

Un punto $x \in \overline{\Omega}$ es llamado un punto de explosión si existe una sucesión (x_n, t_n) tal que $(x_n, t_n) \to (x, T)$ y $u(x_n, t_n) \to \infty$ si $n \to \infty$. El conjunto de explosión esta definido como $B(u) = \{x \in \overline{\Omega} :\ x\ es\ punto\ de\ explosion\}$.

Para referencias generales sobre problemas de explosión vea [6], [9], [12].

Perez-Llanos y Rossi en [11] analizan el problema (1.3) para $f(u) = u^p$ con $p > 0$. Ellos prueban que la solución no negativa y no trivial explota en tiempo finito $T > 0$ si y sólo si $p > 1$ y hallan la razón de explosión, en el sentido de que es la misma que se tiene para la solución de la ecuación diferencial ordinaria $u'(t) = u^p(t)$, la cual satisface $lim_{t \to T^-}(T-t)^{1/(p-1)}\|u(\cdot,t)\|_\infty = (1/(p-1))^{1/(p-1)}$. Además analizan el conjunto de explosión, ellos prueban que el conjunto de explosión es unitario si las soluciones son radialmete simétricas con un único punto máximo en el origen. Para ciertas condiciones iniciales en dominios generales con $p > 2$, ellos localizan el conjunto de explosión en la cercania de un punto dado.

Estos resultados son análogos al correspondiente problema de difusión local $u_t(x,t) = \Delta u(x,t) + u^p(x,t)$ con $p > 0$, vea [8].

El resto del trabajo está organizado como sigue: En la Sección 2, se analiza la existencia y unicidad de soluciones no negativas y un Principio de Comparación para las soluciones de (1.3); en la Sección 3, se analiza la explosión de las soluciones de (1.3) con f satisfaciendo $A_1,\ A_2$, además el tiempo de explosión y la razón de explosión para $f(u) = e^u,\ f(u) = f(u) = (1+u)\ln^p(1+u),\ p > 1$ es analizada. Finalmente se analiza el caso radialmente simétrico para $f(u) = e^u$.

2. Existencia y unicidad

La existencia y unicidad de la solución de (1.3) es consecuencia del Teorema del Punto Fijo de Banach.

Sea $t_0 > 0$ fijo. Nosotros consideramos el conjunto

$$X_{t_0} = C\left([0,t_0]:\ C(\overline{\Omega})\right) = \{u : [0,t_0] \to C(\overline{\Omega}) : \quad u \textit{ es continua}\},$$

el cual es un espacio de Banach con la norma

$$|||u||| = \max_{0\leq t\leq t_0} \|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\overline{\Omega})}.$$

La condición inicial $u_0 \in C(\overline{\Omega})$ es no negativa y el objetivo en este trabajo es analizar las soluciones no negativas de (1.3), por tal razón consideramos el conjunto $P_{t_0} = \{u \in X_{t_0} : u \geq 0\}$ el cual es un subespacio cerrado de X_{t_0}. Se define el operador $L : P_{t_0} \to P_{t_0}$, como

$$L_{u_0}(u)(x,t) = \int_0^t \int_\Omega J(x-y)(u(y,s)-u(x,s))dy\ ds + \int_0^t f(u(x,s))ds + u_0(x). \tag{2.1}$$

Primero, se demuestra la existencia y unicidad de la solución (1.3) para f una función localmente Lipschitz y creciente, luego por un argumento de convergencia se extiende para una función f que satisfaga la condición A_1.

Lema 2.1. *Sea f una función creciente y localmente Lipschitz con constante de Lipschitz $K > 0$, $u_0,\ v_0 \in C(\overline{\Omega})$ funciones no negativas y $u,\ v \in P_{t_0}$. Entonces, existe una constante positiva $C = C(|\Omega|,\ \|J\|_\infty,\ K)$ tal que*

$$|||L_{u_0}u(x,t) - L_{v_0}v(x,t)||| \leq Ct_0|||u-v||| + \|u_0 - v_0\|_{L^\infty(\overline{\Omega})} \tag{2.2}$$

Demostración. Empezamos la demostración probando que el operador $L : P_{t_0} \to P_{t_0}$ está bien definido. Sea f una función creciente y localmente Lipschitz con constante de Lipschitz $K > 0$ y $u \in P_{t_0}$. Para $(x,t) \in \overline{\Omega} \times [0,t_0]$ se tiene que

$$\begin{aligned} |L_{u_0}(u(x,t)) - u_0(x)| &\leq \int_0^t \int_\Omega J(x-y)|u(y,s)-u(x,s)|dy\ ds + \int_0^t f(u(x,s))ds \\ &\leq (2\gamma|\Omega||||u||| + f(|||u|||))t, \end{aligned} \tag{2.3}$$

donde $\gamma = \|J\|_\infty$. Lo anterior prueba que L es continuo en $t = 0$. Ahora, para $(x,t_1),\ (x,t_2) \in \overline{\Omega} \times (0,t_0]$ con $t_1 < t_2$ se tiene que

$$\begin{aligned} &|L_{u_0}(u(x,t_2)) - L_{u_0}(u(x,t_1))| \\ &\qquad \leq \int_{t_1}^{t_2} \int_\Omega J(x-y)|u(y,s)-u(x,s)|dy\ ds + \int_{t_1}^{t_2} f(u(x,s))ds \\ &\qquad \leq (2\gamma|\Omega||||u||| + f(|||u|||))(t_2-t_1), \end{aligned} \tag{2.4}$$

lo cual completa la demostración de la continuidad de L para cualquier tiempo $t \in (0, t_0]$.

Como $J * u$ es uniformemente continua entonces $L_{u_0}u(x,t)$ es una función continua de x, por lo tanto L está bien definido.

Sea $u,\ v \in P_{t_0}$, se tiene que

$$\begin{aligned}
|L_{u_0}(u(x,t)) - L_{v_0}(v(x,t))| &\leq |u_0(x) - v_0(x)| + \int_0^t \int_\Omega J(x-y)|u(y,s) - v(y,s)|dy\ ds \\
&+ \int_0^t \int_\Omega J(x-y)|u(x,s) - v(x,s)|dy\ ds + \int_0^t |f(u(x,s)) - f(v(x,s))|\ ds \\
&\leq \|u_0 - v_0\|_{L^\infty(\overline{\Omega})} + 2\int_0^t \|u(\cdot,s) - v(\cdot,s)\|_{L^\infty(\overline{\Omega})} ds \int_\Omega J(x-y)dy \\
&+ K\int_0^t |u(x,s) - v(x,s)|\ ds \\
&\leq \|u_0 - w_0\|_{L^\infty(\overline{\Omega})} + (2\gamma|\Omega| + K)t|\|u - v\||. \qquad (2.5)
\end{aligned}$$

Por consiguiente

$$|\|L_{u_0}u(x,t) - L_{v_0}v(x,t)\|| \leq Ct_0|\|u - v\|| + \|u_0 - v_0\|_{L^\infty(\overline{\Omega})}$$

donde $C = (2\gamma|\Omega| + K)$. □

A continuación se establece el Teorema de existencia y unicidad de las soluciones de (1.3).

Teorema 2.2. *Sea f una función creciente y localmente Lipschitz con constante de Lipschitz $K > 0$, $u_0 \in C(\overline{\Omega})$ una función no negativa, entonces existe una única solución u de (1.3) tal que $u \in P_{t_0}$.*

Demostración. Sean $u,\ v \in P_{t_0}$. Tomando $u_0 = v_0$ en el Lema 2.1 y escogiendo $t_0 > 0$ lo suficientemente pequeño tal que $Ct_0 < 1$, entonces L_{u_0} es una contracción estricta en P_{t_0}, por lo tanto por el Teorema del Punto Fijo de Banach, existe un único punto fijo u de L_{u_0} en P_{t_0}, esto prueba la exitencia y unicidad de la solución de (1.3) para $0 < t < t_0$. La unicidad implica que la solución puede extenderse a un intervalo máximal $[0, T)$. □

Del análisis anterior, se tienen las siguientes observaciones.

Nota 2.3. La solución de (1.3) depende en forma continua de la condición inicial en el siguiente sentido: Si u *y* v son soluciones de (1.3) con condiciones iniciales u_0 y v_0 respectivamente entonces para todo $t_0 > 0$ existe una constante $\widetilde{C} = \widetilde{C}(t_0, |\Omega|, \|J\|_\infty, K)$ tal que

$$|\|u - v\|| \leq \widetilde{C}\|u_0 - v_0\|_{L^\infty(\overline{\Omega})}.$$

Demostración. Sean u y v soluciones de (1.3) con condiciones iniciales u_0 y v_0 respectivamente. Se tiene que

$$\begin{aligned}
|u(x,t)-v(x,t)| \leq{}& |u_0(x)-v_0(x)| + \int_0^t \int_\Omega J(x-y)|u(y,s)-v(y,s)|dy\ ds \\
&+ \int_0^t \int_\Omega J(x-y)|u(x,s)-v(x,s)|dy\ ds + \int_0^t |f(u(x,s))-f(v(x,s))|\ ds \\
&\leq \|u_0-v_0\|_{L^\infty(\overline{\Omega})} + 2\int_0^t \|u(\cdot,s)-v(\cdot,s)\|_{L^\infty(\overline{\Omega})} ds \int_\Omega J(x-y)dy \\
&+ K\int_0^t |u(x,s)-v(x,s)|\ ds \\
&\leq \|u_0-w_0\|_{L^\infty(\overline{\Omega})} + (2\gamma|\Omega|+K)t|\|u-v\||. \qquad (2.6)
\end{aligned}$$

Por consiguiente

$$|\|u-v\|| \leq \|u_0-w_0\|_{L^\infty(\overline{\Omega})} + (2\gamma|\Omega|+K)t_0|\|u-v\||,$$

de donde se tiene que

$$|\|u-v\|| \leq \widetilde{C}\|u_0-v_0\|_{L^\infty(\overline{\Omega})},$$

con $\widetilde{C} = 1-(2\gamma|\Omega|+K)t_0 > 0$ para $t_0 > 0$ lo suficientemente pequeño. □

Nota 2.4. La función $u \in P_{t_0}$ es solución de (1.3) si y sólo si

$$u(x,t) = \int_0^t \int_\Omega J(x-y)(u(y,s)-u(x,s))dy\ ds + \int_0^t f(u(x,s))ds + u_0(x) \qquad (2.7)$$

Nota 2.5. Si u es una solución de (1.3) con condición inicial u_0, entonces la masa verifica

$$\int_\Omega u(x,t)dx = \int_\Omega u_0(x)dx + \int_0^t \int_\Omega f(u(x,s))dxds.$$

A continuación introducimos el concepto de supersolución y subsolución para el problema (1.3).

Definición 2.6. Una función $\overline{u} \in C^1([0,T);C(\overline{\Omega}))$ es una supersolución de (1.3) si satisface

$$\begin{aligned}
&\overline{u}_t(x,t) \geq \int_\Omega J(x-y)(\overline{u}(y,t)-\overline{u}(x,t))dy + f(\overline{u}(x,t)), \quad x\in\Omega, \quad t>0 \\
&\overline{u}(x,0) \geq u_0(x), \quad x\in\Omega.
\end{aligned} \qquad (2.8)$$

$\underline{u} \in C^1([0,T);C(\overline{\Omega}))$ es una subsolución de (1.3) si se satisface lo anterior pero con las desigualdades ($\leq$).

Lema 2.7. *Sea* $u_0 \in C(\overline{\Omega})$ *no negativa. Si* $\overline{u}$ *es una supersolución de (1.3) entonces* $\overline{u}(x,t) \geq 0$ *para todo* $(x,t) \in \overline{\Omega} \times [0,T)$.

Demostración. Razonaremos por contradicción. Supongamos que $\overline{u}$ es negativa en alguna parte. Sea $v(x,t) = \overline{u}(x,t) + \epsilon t$, con $\epsilon > 0$ lo suficientemente pequeño para que v sea negativa en alguna parte. Sea (x_0, t_0) un punto donde v alcanza un mínimo negativo, se tiene que

$$\begin{aligned} v_t(x_0,t_0) = \overline{u}_t(x_0,t_0) + \epsilon &> \int_\Omega J(x_0 - y)(\overline{u}(y,t_0) - \overline{u}(x_0,t_0))dy \\ &= \int_\Omega J(x_0 - y)(v(y,t_0) - v(x_0,t_0))dy \geq 0, \end{aligned} \tag{2.9}$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto $\overline{u}(x,t) \geq 0$ para todo $(x,t) \in \overline{\Omega} \times [0,T)$. □

Lema 2.8. *Sean* $\overline{u}$ *y* $\underline{u}$ *supersolución y subsolución de (1.3) respectivamente con* $\underline{u}(x,0) \leq \overline{u}(x,0)$ *para todo* $x \in \overline{\Omega}$. *Entonces* $\underline{u}(x,t) \leq \overline{u}(x,t)$ *para todo* $(x,t) \in \overline{\Omega} \times [0,T)$.

Demostración. Razonamos por contradicción. Supongamos que el Lema no es cierto. Entonces por continuidad existe $x_1 \in \overline{\Omega}$ y $0 < t_1 < T$ tal que $\underline{u}(x_1,t_1) = \overline{u}(x_1,t_1)$ y $\underline{u}(x,t) \leq \overline{u}(x,t)$ para todo $(x,t) \in \overline{\Omega} \times [0,t_1)$. Se tiene que

$$\begin{aligned} 0 &= \underline{u}(x_1,t_1) - \overline{u}(x_1,t_1) \\ &= \underline{u}(x_1,0) - \overline{u}(x_1,0) + \int_0^{t_1}\int_\Omega J(x_1 - y)(\underline{u}(y,s) - \overline{u}(y,s))dyds \\ &- \int_0^{t_1}\int_\Omega J(x_1 - y)(\underline{u}(x_1,s) - \overline{u}(x_1,s))dyds + \int_0^{t_1} f(\underline{u}(x_1,s)) - f(\overline{u}(x_1,s))ds \\ &< 0, \end{aligned} \tag{2.10}$$

lo cual es una contradicción. □

A continuación estudiamos el teorema de existencia y unicidad de las soluciones de (1.3) para f satisfaciendo A_1.

Teorema 2.9. *Sea* $u_0 \in C(\overline{\Omega})$ *no negativa y* f *satisfaciendo* A_1, *entonces existe una única solución* u *de (1.3) tal que* $u \in C(\overline{\Omega} \times [0,T))$.

Demostración. Sea f satisfaciendo A_1. Consideramos $(f_n)_n$ una suceción decreciente de funciones crecientes localmente Lipschtiz tal que $f_n \to f$ cuando $n \to \infty$. Sea u_n la única solución de (1.3) asociada a f_n y condición inicial $u_n(x,0) = u_0(x) + 1/n$, luego por comparación Lema 2.8 se tiene que $u_{n+1} \leq u_n$. Como $u_n \geq 0$ existe $\lim_{n\to\infty} u_n = u$.

Sea $T = \sup\left\{ t \mid \sup_{x\in\overline{\Omega}} u(x,t) < \|u_0\|_\infty + 1 \right\} > 0$. Pasando al limite en (2.7) y por la Nota 2.4 se tiene que u es la única solución de (1.3) en $\overline{\Omega} \times [0,T)$ con condición inicial u_0 y término f. □

3. Explosión

En esta sección se analiza el fenómeno de explosión para las soluciones de (1.3). Nosotros nos apoyamos en algunas ideas de [8]. Se tiene el siguiente Teorema.

Teorema 3.1. *Asumamos que f satisface $A_1,\ A_2$. Sea u una solución de (1.3) con condición inicial $u_0 \in C(\overline{\Omega})$ no negativa tal que $\int_\Omega u_0(x)dx > 0$, entonces u explota en tiempo finito.*

Demostración. Sea u una solución de (1.3), se define la función $M(t)$ para $t \geq 0$ por

$$M(t) = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u(x,t)dx. \tag{3.1}$$

Como f es una función convexa por A_2, aplicando la desigualdad de Jense se obtiene

$$M'(t) = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega f(u(x,t))dx \geq f\left(\frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u(x,t)dx\right) \geq f(M(t)),$$

por lo tanto

$$M'(t) \geq f(M(t)). \tag{3.2}$$

Como $M(0) > 0$ y $f(u) > 0$ para $u > 0$ se tiene que $M'(t) > 0$, tal que $M(t) > 0$ para $t > 0$.

Integrando (3.2) sobre $[0,t]$ se obtiene que

$$\int_{M(0)}^{M(t)} \frac{ds}{f(s)} \geq t. \tag{3.3}$$

Por lo tanto $M(t)$ está definida en $(0,T)$ y por A_2 se tiene que

$$0 < T \leq \int_{M(0)}^{M(t)} \frac{ds}{f(s)} < \infty,$$

además $M(t) \to \infty$ cuando $t \to T^-$, vea Nota 3.3. Por lo cual se tiene que u explota en tiempo finito $T > 0$. □

Corolario 3.2. *Sea $u \in P_{t_0}$ solución de (1.3) que explota en tiempo finito $T > 0$, entonces $T \leq F(M(0))$, donde*

$$F(u) = \int_u^\infty \frac{ds}{f(s)} \tag{3.4}$$

Nota 3.3. Para la ecuación diferencial ordinaria

$$u'(t) = f(u),\ u(0) = a > 0 \tag{3.5}$$

con f una función positiva, creciente y regular, la condición de Osgood (vea [10]) $\displaystyle\int_a^{\infty} \frac{1}{f(s)} ds < \infty$ es condición necesaria y suficiente para que $u(t)$ explote en tiempo finito $T > 0$, en el sentido

$$\lim_{t \nearrow T} \sup \|u(\cdot, t)\|_{\infty} = \infty.$$

Nota 3.4. Una solución plana de (1.3) es una solución que no depende de x. Las soluciones planas $u(t)$ de (1.3) son funciones que satisfacen (3.5). Como f satisface A_1, A_2, entonces las soluciones planas explotan en tiempo finito $T > 0$ y tienen como conjunto de explosión a $B(u) = \overline{\Omega}$.

Definición 3.5. Se define la función

$$U(t) = \max_{\overline{\Omega}} u(x, t), \quad para \;\; todo \;\; t \in [0, T),$$

donde u es solución de (1.3) que explota en tiempo finito $T > 0$

Proposición 3.6. *$U(t)$ para $t \in [0, T)$ es una función localmente Lipschtiz y diferenciable con*

$$U'(t) \leq f(U(t)) \quad a.e \tag{3.6}$$

y

$$U'(t) \geq -U(t) + f(U(t)) \quad a.e \tag{3.7}$$

Demostración. Sea $0 < t_1 < t_2 < T$, se tiene que

$$U(t_1) = \max_{\overline{\Omega}} u(x, t_1) = u(x_1, t_1), \quad U(t_2) = \max_{\overline{\Omega}} u(x, t_2) = u(x_2, t_2).$$

Como J es una función suave, se tiene que para $h = t_2 - t_1$

$$U(t_2) - U(t_1) \geq u(x_1, t_2) - u(x_1, t_1) = hu_t(x_1, t_1) + o(h)$$

$$U(t_2) - U(t_1) \leq u(x_2, t_2) - u(x_2, t_1) = hu_t(x_2, t_1) + o(h),$$

por lo cual $U(t)$ es una función localmente Lipschtiz.

A continuación demostraremos (3.6). Para $t_2 > t_1$ se tiene que

$$\frac{U(t_2) - U(t_1)}{t_2 - t_1} \leq u_t(x_2, t_2) + o(1).$$

Por otro lado se tiene que

$$\begin{aligned} u_t(x_2, t_2) &= \int_{\Omega} J(x_2 - y)(u(y, t_2) - u(x_2, t_2)dy + f(u(x_2, t_2)) \\ &\leq f(u(x_2, t_2)), \end{aligned} \tag{3.8}$$

ya que $u(x_2, t_2) \geq u(y, t_2)$. Por consiguiente,

$$U'(t) \leq f(U(t)) \quad a.e.$$

Para demostrar (3.7) sea $t_2 > t_1$. Entonces

$$\frac{U(t_2) - U(t_1)}{t_2 - t_1} \geq u_t(x_1, t_1) + o(1).$$

Por otro lado se tiene que

$$\begin{aligned} u_t(x_1, t_1) &= \int_\Omega J(x_1 - y)(u(y, t_1) - u(x_1, t_1)dy + f(u(x_1, t_1) \\ &\geq -u(x_1, t_1) + f(u(x_1, t_1)), \end{aligned} \tag{3.9}$$

por consiguiente

$$U'(t) \geq -U(t) + f(U(t)) \quad a.e.$$

□

Como consecuencia de (3.4) y (3.6) se obtiene que

$$F(U(t)) \leq T - t. \tag{3.10}$$

De A_2, se tiene que $f(s)/s \to \infty$ cuando $s \to \infty$, entonces por (3.7), se obtiene que

$$U'(t) \geq \frac{1}{2} f(U(t)) \; para\ t\ cercano\ a\ T. \tag{3.11}$$

A continuación analizaremos la solución de (1.3) para $f(u) = e^u$.

Teorema 3.7. *Sea $f(u) = e^u$ y $u_0(x) \in C(\overline{\Omega})$ no negativa, entonces la solución u de (1.3) explota en tiempo finito $T > 0$. El estimativo para el tiempo de explosión está dado por*

$$T \leq exp\left(-\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u_0(x)dx\right).$$

Además, existe una constante $C_1 > 1$ tal que

$$1 \leq exp(\max_{x \in \overline{\Omega}} u(x, t))(T - t) \leq C_1 \tag{3.12}$$

Demostración. Como la función $f(u) = e^u$ satisface A_1 y A_2, entonces por Teorema 3.1, la solución u de (1.3) explota en tiempo finito $T > 0$. Por Corolario 3.2, se tiene que

$$T \leq F(M(0)) = \int_{M(0)}^\infty \frac{1}{e^s} ds = e^{-M(0)} = exp\left(-\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u_0(x)dx\right) \tag{3.13}$$

Por (3.10), se obtiene para t cercano a T

$$T - t \geq F(U(t)) = \int_{U(t)}^\infty e^{-s} ds = exp(-U(t)). \tag{3.14}$$

Por lo tanto $exp(U(t)) \geq (T-t)^{-1}$.

Por (3.11), se obtiene para t cercano a T

$$\frac{1}{2}(T-t) \leq F(U(t)) = \int_{U(t)}^{\infty} e^{-s} ds = exp(-U(t)). \tag{3.15}$$

Por lo tanto $exp(U(t)) \leq 2(T-t)^{-1}$. □

En el siguiente Teorema, analizamos la solución de (1.3) para $f(u) = (1 + u)\ln^p(1+u)$ con $p > 1$. La demostración la omitimos ya que es análoga a la del Teorema 3.7.

Teorema 3.8. *Sea $f(u) = (1+u)\ln^p(1+u)$ con $p > 1$ y $u_0(x) \geq 0$, entonces la solución u de (1.3) explota en tiempo finito $T > 0$. El estimativo para el tiempo de explosión está dado por*

$$T \leq \frac{1}{p-1}\left(\ln\left(1 + \frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega} u_0(x)dx\right)\right)^{1-p}.$$

Además, existen constantes C_3 y C_4 positivas tales que

$$C_3 \leq \ln(\max_{x\in\overline{\Omega}}(u(x,t)+1))(T-t)^{1/(p-1)} \leq C_4.$$

Nota 3.9. Los anteriores resultados son análogos a los correspondientes problemas de difusión local, vea [8].

3.1. Caso Radial

En esta sección analizamos la solución de (1.3) para el caso unidimensional ($N = 1$), con condición inicial simétrica en $\Omega = (-R, R)$ y el término de reacción $f(u) = e^u$. Nos apoyaremos en algunas ideas de [11].

Consideramos la siguiente condición sobre u_0.

A_3 : $u_0 \in C^1([-R, R])$ una función simétrica, con un único punto máximo en el origen, es decir, $u_0 = u_0(r) > 0$, $u_0'(r) < 0$ *si* $0 < r < R$, $u_0''(0) < 0$.

Lema 3.10. *Sea f una función diferenciable y u_0 satisfaciendo A_3, entonces la solución u de (1.3) es simétrica y $u_x(x,t) < 0$ para $(x,t) \in (0,R] \times (0,T)$.*

Demostración. Primero demostramos que la solución u de (1.3) es simétrica. Consideramos la función w definida por $w(x,t) = u(-x,t)$. Es sencillo ver que w es solución de (1.3) con condición inicial $w_0(x) = u_0(-x) = u_0(x)$ ya que u_0 es simétrica, luego por el Teorema 2.9 se tiene que $w(x,t) = u(x,t)$.

A continuación demostramos que $u_x(x,t) < 0$ para $(x,t) \in (0,R] \times (0,T)$. Consideramos la función $v(x,t) = u_x(x,t)$, se tiene que

$$\begin{aligned} v_t(x,t) = &\int_{-R}^{R} J'(x-y)(u(y,t)-u(x,t))dy - v(x,t)\int_{-R}^{R} J(x-y)dy \\ &+ f'(u(x,t))v(x,t). \end{aligned} \tag{3.16}$$

Como u es simétrica, se tiene que $v(0,t) = 0$. Razonando por contradicción, supongamos que existe un punto $(x_0, t_0) \in (0, R] \times (0, T)$ tal que $v(x_0, t_0) = 0$. Como J' es una función impar y u es simétrica, por (3.16) se tiene que $v_t(x_0, t_0) = 0$, lo cual es una contradicción. $\square$

Teorema 3.11. *Sea $f(u) = e^u$ y u_0 satisfaciendo A_3, entonces el conjunto de explosión de la solución de (1.3) es $B(u) = \{0\}$.*

Demostración. Se demostrará que el único punto que satisface el estimativo de la razón de explosión (3.12) es $x = 0$.

Para $x_0 > 0$ fijo, sea $w(t) = u(0,t) - u(x_0,t)$. Se tiene que

$$\begin{aligned} w'(t) = u'(0,t) - u'(x_0,t) &= \int_{-R}^{R} J(-y)(u(y,t) - u(0,t))dy \\ &- \int_{-R}^{R} J(x_0 - y)(u(y,t) - u(x_0,t))dy + e^{u(0,t)} - e^{u(x_0,t)} \\ &\geq -w(t) + e^{\xi(t)} w(t), \end{aligned} \tag{3.17}$$

donde $u(x_0,t) < \xi(t) < u(0,t)$, por lo tanto $w'(t) \geq (e^{\xi(t)} - 1)w(t)$. Integrando sobre (t_0, t) con $t < T$, se tiene que

$$\ln(w(t)) - \ln(w(t_0)) \geq \int_0^t (e^{\xi(s)} - 1)ds.$$

Ahora, razonaremos por contradicción. Por (3.12), se tiene que $exp(u(x_0,t))(T-t) \geq 1$, por consiguiente

$$\int_{t_0}^t (e^{\xi(s)} - 1)ds \geq \int_{t_0}^t (\frac{1}{T-s} - 1)ds = -\ln(T-t) - C.$$

Por lo tanto

$$w(t) \geq \widetilde{C}(T-t)^{-1},$$

donde $\widetilde{C}$ es una constante positiva. Del análisis de arriba, se tiene que

$$0 = \lim_{t \to T^-} (T-t)w(t) \geq \widetilde{C} > 0,$$

lo cual es absurdo. Por lo tanto $x = 0$ es el único punto de explosión que verifica (3.12).

Ahora demostraremos que $x = 0$ es el único punto de explosión.

Sea $z(x,s) = u(x,t) + \ln(T-t)$, y $T - t = e^{-s}$, se tiene que

$$z_s(x,s) = e^{-s} u_t(x,t) - 1 = e^{-s} \int_{-R}^{R} J(x-y)(z(y,s) - z(x,s))dy + e^{z(x,s)} - 1 \tag{3.18}$$

La razón de explosión de u implica que $z(x,s) \leq C$ para todo $(x,s) \in [-R,R] \times (-\ln T, \infty)$, entonces $z(x,s) \to 0$ cuando $s \to \infty$. Por lo tanto se tiene que

$$(z(x,s)+s)_s = z_s(x,s)+1 = e^{-s}\int_{-R}^{R} J(x-y)(z(y,t)-z(x,t))dy + e^{z(x,s)}.$$

Y por consiguiente

$$z(x,s)+s = (z(x,s_0)+s_0)+\int_{s_0}^{s}(e^{-\tau}\int_{-R}^{R} J(x-y)(z(y,\tau)-z(x,\tau))dy+e^{z(x,\tau)})d\tau,$$

lo cual nos permite concluir que $z(x,s)+s \leq C_3$, por lo tanto $u(x,t) = z(x,s)+s \leq C_3$ para $x \neq 0$. $\square$

Referencias

[1] P. Bates, P. Fife, X. Ren, and X. Wang, *Travelling waves in a convolution model for phase transitions*, Arch. Rat. Mech. Anal. **138** (1997), 105–136.

[2] M. Bogoya, *A nonlocal nonlinear diffusion equation in higher space dimensions*, J. Math. Annal. Appl. **334** (2008), 601–615.

[3] E. Chasseigne, M. Chaves, and J. D. Rossi, *Asymptotic behavior for nonlocal diffusion equations*, Math. Pures et Appl. **86** (2006), 271–291.

[4] C. Cortazar, M. Elgueta, and J. D. Rossi, *A non-local diffusion equation whose solutions develop a free boundary*, Ann. Henri Poincaré **6** (2005), no. 2, 269–281.

[5] C. Cortazar, M. Elgueta, J. D. Rossi, and N. Wolanski, *Boundary fluxes for non-local diffusion*, J. Differential Equations **234** (2007), 360–390.

[6] K. Deng and H. A. Levine, *The Role of Critical Exponents in Blow-Up Theorems: The Sequel*, J. Math. Anal. Appl. **243** (2000), 85–126.

[7] P. Fife, *Some nonclassical trends in parabolic and parabolic-like evolutions*, Trends in nonlinear analysis, Springer, Berlin, 2013, 153-191.

[8] A. Friedman and B. McLeod, *Bow-up of Positive Solutions of Semilinear Heat Equations*, Indiana Univ. Math. J. **34** (1985), no. 2, 425–447.

[9] H. A. Levine, *The role of critical exponents in blowup theorems*, SIAM Reviews **32** (1990), 262–288.

[10] W. F. Osgood, *Beweis der Existenz einer Lösung der Differentialgleichung* $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ *ohne Hinzunahme der Cauchy-Lipschitz'schen Bedingung*, Monats. Math. Phys. **9** (1898), 331–345.

[11] M. Pérez-Llanos and J. D. Rossi, *Blow-up for a non-local diffusion problem with neumann boundary condictions and a reaction term*, Nonlinear Analysis TM&A. **70** (2009), no. 4, 1629–1640.

[12] A. A. Samarskii, V. A. Galaktionov, S. P. Kurdyumov, and A. P. Mikhailov, *Blow-up in problems for quasilinear parabolic equations*, Nauka, Moscow, (in Russian), 1987, English transl.: Walter de Gruyter, Berlin, 1995.