

Etude expérimentale avec Cabri3d de la généralisation à l'espace d'un problème de géométrie plane

MARTÍN EDUARDO ACOSTA GEMPELER*

Résumé. Nous présentons une étude expérimentale d'un problème relatif au tétraèdre podaire, en utilisant le logiciel Cabri3d de géométrie dynamique dans l'espace. Nous décrivons un dispositif de 'detection de points' qui permet d'obtenir des approximations de lieux géométriques, et nous utilisons ces approximations pour déduire des propriétés de ces lieux et les construire de manière exacte. Finalement, nous présentons la démonstration des théorèmes énoncés.

Abstract. We present an experimental study of a problem about the pedal tetrahedron, using the software Cabri3d. We describe a 'point detector' device to draw approximations of loci, and we use these approximations to deduce properties of these loci and construct them exactly. Finally, we give the proofs of the theorems proposed.

Resumen. Se presenta un estudio experimental concerniente a un tetrahedro pedal, utilizando el programa Cabri3d de geometría dinámica en el espacio. Se describe un dispositivo de "detección de puntos" que permite obtener aproximaciones de lugares geométricos, utilizando luego esas aproximaciones para deducir las propiedades de los lugares y construirlos de manera exacta. Finalmente, se da la demostración de los teorema enunciados.

Hots Clés: géométrie dynamique dans l'espace, Cabri3d, detection de points.

Keywords: dynamical geometry in space, Cabri3d, point detector.

Palabras y frase claves: geometría dinámica en el espacio, Cabri3d, detección de puntos.

MSC2000: Primaria: 65D99. Secundaria: 68U99.

* TECFA Université de Genève, Suisse, DIAM Université Joseph Fourier Grenoble, France, y Grupo Edumat-UIS, Escuela de Matemáticas, UIS, A.A. 678, Bucaramanga, Colombia.
e-mails: Martin.acosta@tecfa.unige.ch, martin@matematicas.uis.edu.co

1. Introduction

La fin du XIX siècle connut un développement considérable de recherches sur la géométrie du triangle. Parmi ces recherches, le triangle podaire occupe une place importante. Les géomètres se posèrent différents problèmes sur les lieux géométriques des points du plan qui produisent des triangles podaires d'une forme donnée. Le plus connu des résultats est le lieu des points qui produisent un triangle aplati ; les sommets de ce triangle forment ce qui est connu comme la droite de Simson, et le lieu géométrique est le cercle circonscrit. Moins connus sont les lieux des points qui produisent des triangles podaires isocèles (les cercles d'Apollonius du triangle), équilatéraux (les points isodynamiques), et semblables à un triangle donné (faisceaux de Schout), Johnson [3]. Certains géomètres du XX siècle travaillèrent sur le tétraèdre podaire (Thebault, Neuberg entre autres), et généralisèrent à l'espace quelques unes des propriétés trouvées par leurs prédécesseurs sur le plan.

Nous nous proposons ici de montrer une étude expérimentale de géométrie synthétique sur le problème suivant : étant donné un tétraèdre quelconque, quel est le lieu géométrique des points de l'espace qui produisent un tétraèdre podaire isocèle. La solution du problème analogue dans le plan (Johnson [3]), est formée par les trois cercles d'Appollonius du triangle de référence. Nous aborderons le problème par une formulation analogue, qui utilise un tétraèdre homothétique du tétraèdre podaire, et dont la construction par symétries facilite le raisonnement.

Mise à part l'intérêt mathématique de la généralisation à l'espace d'un problème de la géométrie plane, cette étude met en valeur la recherche expérimentale en géométrie synthétique, rendue possible par la manipulation directe de figures tridimensionnelles dans l'environnement Cabri3d.

Problème :

Etant donné un tétraèdre quelconque, quel est le lieu géométrique des points de l'espace qui produisent des tétraèdres symétrico-latéraux isocèles.

Définitions :

Tétraèdre symétrico-latéral : c'est le tétraèdre formé par les symétriques d'un point par rapport aux faces d'un tétraèdre de référence. Soit $ABCD$ un tétraèdre et P un point, les points P_a symétrique de P par rapport à BCD , P_b symétrique de P par rapport à ACD , P_c symétrique de P par rapport à ABD et P_d symétrique de P par rapport à ABC , forment le tétraèdre symétrico-latéral de P par rapport à $ABCD$.

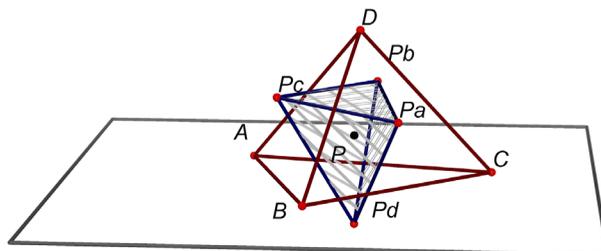


Figure 1. Définition de TétrahédreSymétrico-latéral.

Tétrahédre isocèle : tout tétraèdre avec trois faces isocèles avec un sommet commun, de manière que trois de ses sommets sont sur une sphère qui a son centre sur le quatrième sommet.

Observation préalable

Tout d'abord, notons que si deux faces adjacentes d'un tétraèdre sont isocèles, alors la troisième face sera isocèle aussi. Ainsi, pour trouver le lieu géométrique des points qui produisent des tétraèdres symétrico-latéraux isocèles, nous pouvons chercher le lieu géométrique des points qui produisent une face isocèle. L'intersection de deux de ces lieux sera la solution de notre problème.

Première réduction du problème : Etant donné un tétraèdre $ABCD$ quelconque, quel est le lieu géométrique de points de l'espace qui produisent des tétraèdres symétrico-latéraux $P_aP_bP_cP_d$ avec la face $P_aP_bP_d$ isocèles en P_d .

Exploration

Procédure expérimentale :

Le logiciel Cabri3d permet de faire des constructions d'objets géométriques dans l'espace, objets qui sont directement manipulables et se redessinent en temps réel, conservant les propriétés qui ont été explicitées dans la construction. De ce fait, les points d'intersection de ces objets apparaissent et disparaissent selon que les objets se coupent ou pas. Cette caractéristique permet de construire un dispositif de 'détection de points', qui fait apparaître des points qui remplissent des conditions données, dispositif que nous allons décrire dans la suite.

Dans le cas présent, il s'agit de trouver les positions de P pour lesquelles le triangle

$P_aP_bP_d$ est isocèle en P_d . On pourrait simplement déplacer P jusqu'à obtenir un tel triangle isocèle, marquer cette position, et de nouveau déplacer P . Le dispositif de détection de points permet d'automatiser cette procédure, de telle manière que lorsqu'on déplace P , il laisse une trace dans les positions où le triangle est isocèle.

Remarque : étant donné que le logiciel ne peut représenter à l'écran qu'un nombre discret de points, il est pratiquement impossible de trouver par déplacement une position de P pour laquelle le triangle $P_aP_bP_d$ soit exactement isocèle. Par contre, on peut trouver des positions pour lesquelles $P_aP_bP_d$ est très près d'être isocèle. Et on peut contrôler le degré de cette approximation. Ce qui veut dire que nous allons trouver des positions de P très proches des positions qui produisent des triangles $P_aP_bP_d$ isocèle, afin de nous donner une idée du lieu géométrique cherché, et ensuite nous trouverons le moyen de construire ce lieu de manière exacte.

Construction du détecteur de points P qui produisent un triangle $P_aP_bP_d$ isocèle, avec un epsilon de tolérance :

1. Nous allons définir un critère de quantification δ de la condition 'triangle isocèle', afin de pouvoir calculer le degré d'approximation d'un triangle $P_aP_bP_d$ à la condition de isocèle. Si le triangle $P_aP_bP_d$ est isocèle en P_d , alors le plan médiateur de P_aP_b doit passer par P_d . Donc on peut prendre la distance de P_d au plan médiateur de P_aP_b comme critère de quantification de la condition 'triangle isocèle en P_d '. Nous construisons le triangle $P_aP_bP_d$, le plan médiateur de P_aP_b , et nous mesurons la distance de P_d à ce plan médiateur.

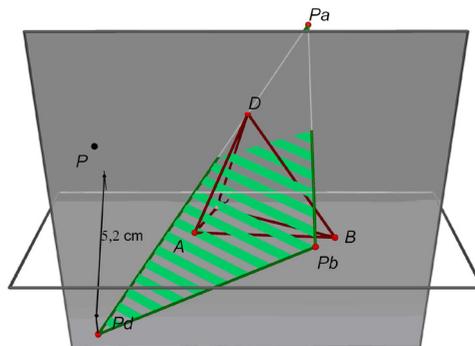


Figure 2. Critère de quantification : la distance de P_d au plan médiateur de P_aP_b est le critère de quantification δ .

2. Nous allons utiliser ce critère de quantification δ , le comparer à un ϵ de tolérance choisi, et construire un point qui existe si et seulement si $\delta \leq \epsilon$. Pour ce faire,

nous construisons un vecteur OV sur le plan ABC , et nous rapportons la mesure δ sur ce vecteur, ce qui produit un point N . Nous construisons un segment OM sur ce vecteur, dont la longueur représentera la valeur ϵ de tolérance. Ensuite, nous construisons une droite d perpendiculaire au plan ABC , par le point N . En déplaçant P , on peut constater que si $\delta \leq \epsilon$ la droite d coupe le segment OM .

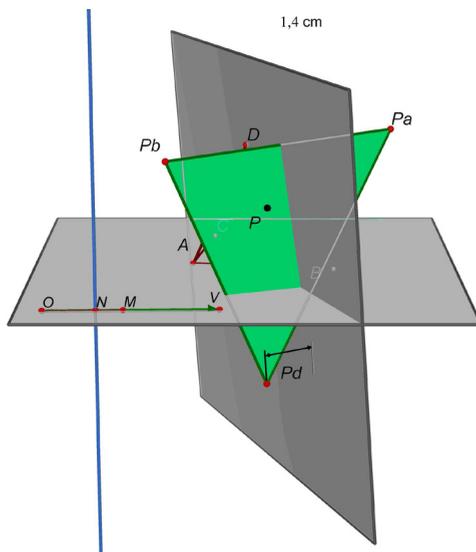


Figure 3.

Alors nous cachons le point N et nous construisons le point Q d'intersection de la droite d et le segment OM , qui est le point conditionnel cherché.

3. Nous allons transférer ce point conditionnel sur P , de manière à obtenir un point S qui est identique à P , mais qui existe si et seulement si $\delta \leq \epsilon$. Pour ce faire, nous construisons T , symétrique de P par rapport à Q , et S , symétrique de T par rapport à Q . (voir Abracadabri comme référence de cette construction).
4. Nous pouvons maintenant activer la trace du point S , modifier M pour obtenir une valeur appropriée de ϵ (le plus petit possible), et cacher toutes les constructions auxiliaires : le plan médiateur de P_aP_b , la distance de P_d au plan médiateur, le vecteur OV , la droite d , les points T , Q , V .

Estimation du lieu de points P qui produisent des triangles $P_aP_bP_d$ isocèles en P_d

Nous allons utiliser le détecteur de points construit pour estimer la forme du lieu cherché. Pour ce faire, nous allons redéfinir P sur différents plans, et le déplacer sur ces plans,

afin d'observer la trace de Q , qui sera une approximation du lieu cherché.

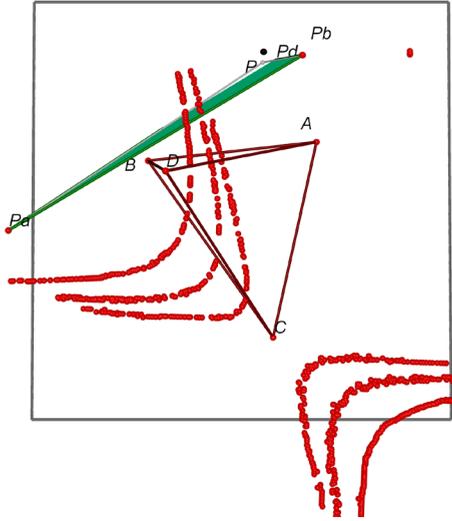


Figure 4.

Voici les traces du point Q , lorsque P se déplace sur trois plans parallèles au plan ABC . Nous faisons la conjecture que les sections du lieu géométrique cherché par des plans parallèles à ABC sont des hyperboles qui coupent l'arête DC .

Démonstration de la conjecture selon laquelle la droite DC appartient au lieu cherché

Étant donné que P_a est symétrique de P par rapport à BCD , P_b est symétrique de P par rapport à ACD , et CD est l'intersection de ces deux plans, alors lorsque P est sur CD , P_a et P_b coïncident. Nous pouvons conclure que comme les distances $P_a P_d$ et $P_b P_d$ sont égales, le triangle $P_a P_d P_b$ est isocèle dégénéré. Donc, la droite CD appartient au lieu géométrique cherché.

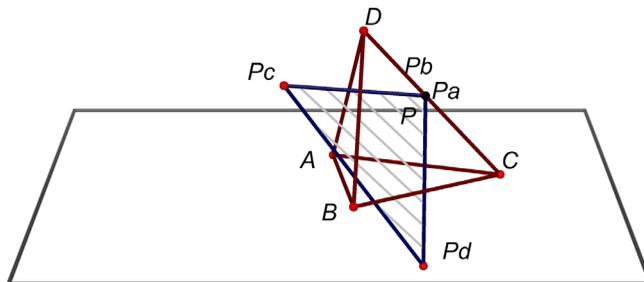


Figure 5. Si P est sur CD , $P = P_a = P_b$, et $P_b P_d = P_a P_d$.

Regardons maintenant la trace de S lorsque P se déplace sur des plans perpendiculaires à ABC .

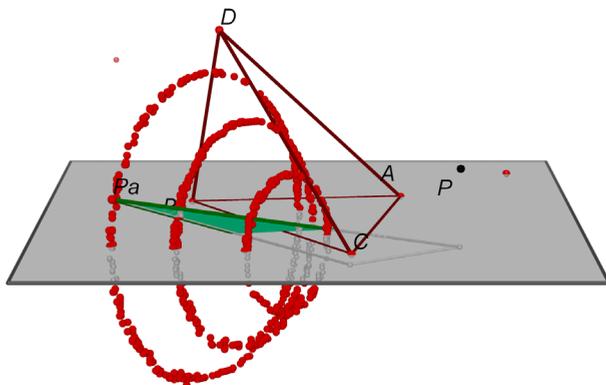


Figure 6. Trace de S lorsque P se déplace sur des plans perpendiculaires à ABC .

Avec ces trois traces nous pouvons conjecturer que les sections du lieu cherché par des plans perpendiculaires à ABC sont des ellipses qui passent par CD . Ce qui nous permet de conjecturer que le lieu cherché est un cône de sommet C .

Explorons maintenant les traces de Q lorsque P est sur un plan qui contient CD . Si notre conjecture est vraie, la trace de S devrait montrer une droite qui passe par C .

Redéfinissons P sur un plan qui contienne CD , et déplaçons P pour obtenir la trace de S .

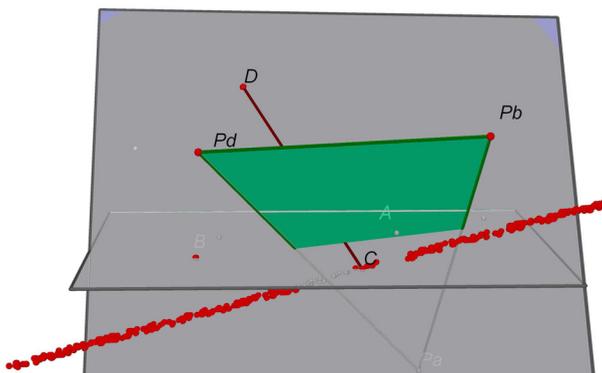


Figure 7. Trace de S lorsque P est sur un plan que contient CD .

Cette image confirme nôtre hypothèse.

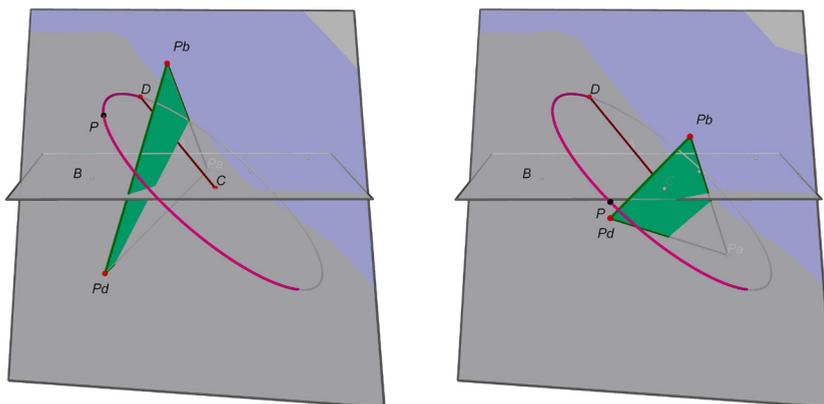


Figure 9. Le plan médiateur de $P_a P_b$ est le même pour toutes les positions de P sur le cercle de centre C et qui passe par D .

Fait étonnant, il semble que le plan médiateur soit constant pour toutes les positions de P .

Démonstration du fait expérimental 'pour toutes les position de P sur un plan qui contient DC , le plan médiateur de $P_a P_b$ est le même.

P est symétrique de P_a par rapport à BCD , P_b est symétrique de P par rapport à ACD . Donc, P_b est image de P_a par une composition de symétries, c'est-à-dire par une rotation autour de CD . Soit E la projection perpendiculaire de P_a et P_b sur CD . Le triangle $P_a E P_b$ est isocèle, et le plan médiateur de $P_a P_b$ est plan bissecteur de l'angle $P_a E P_b$; or, le plan $P_a E P_b$ est perpendiculaire à CD , donc le plan médiateur de $P_a P_b$ est plan bissecteur de l'angle dièdre $P_a C D P_b$. Comme P_a et P_b sont sur des plans qui contiennent CD , cet angle dièdre est constant, et son plan bissecteur aussi.

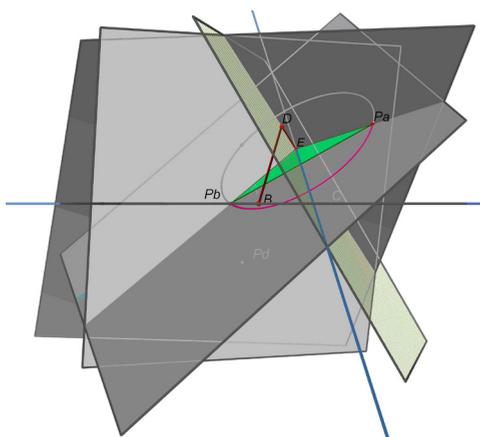


Figure 10.

Maintenant nous pouvons utiliser ce fait pour la construction de la génératrice du cône. On doit trouver les positions de P sur le cercle pour lesquelles le point P_d est sur le plan médiateur de P_aP_b . Nous savons que ce plan médiateur est le plan bissecteur de l'angle dièdre formé par les symétriques du plan PCD par rapport aux faces BCD et ACD , ce qui nous permet de le construire indépendamment de P_a et P_b . Maintenant, comme P_d est symétrique de P par rapport à ABC , et P se déplace sur un cercle, P_d doit se déplacer sur le symétrique de ce cercle par rapport à ABC . Les points P_{d1} et P_{d2} , points d'intersection de ce cercle symétrique avec le plan médiateur de P_aP_b sont les points P_d qui produisent un triangle $P_aP_bP_d$ isocèle. Les points P_1 et P_2 symétriques de P_{d1} et P_{d2} par rapport à ABC sont les points cherchés, et la droite P_1CP_2 est la génératrice cherchée.

Solution du problème intermédiaire *étant donné un plan CDF , construire la droite de ce plan, différente de la droite CD , telle que le triangle $P_aP_bP_d$ soit isocèle en P_d :*

1. construire le plan CDF .
2. construire CDF_a , symétrique de CDF par rapport à BCD , et CDF_b , symétrique de CDF par rapport à ADC .
3. construire un plan bissecteur de CDF_a et CDF_b .
4. construire un cercle sur le plan CDF , de centre C .
5. construire le symétrique de ce cercle par rapport à ABC .
6. construire les points d'intersection G et H de ce cercle symétrique avec le plan bissecteur construit en 3.
7. construire I, J , symétriques de G et H par rapport à ABC .
8. construire la droite IJ .

Maintenant que nous savons construire une génératrice du cône, nous pouvons construire le cône. Nous utilisons cinq génératrices que nous coupons par un plan transversal. La conique qui passe par les points d'intersections des génératrices avec le plan transversal définit le cône de sommet C .

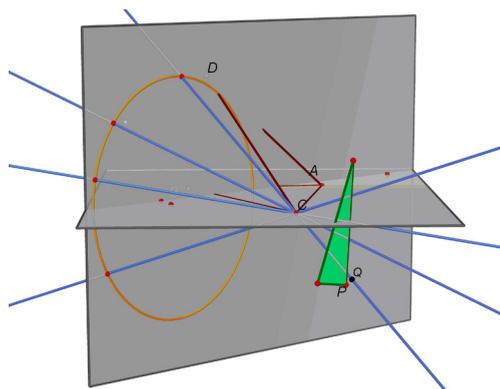


Figure 11.

Si nous redéfinissons P comme point de ce cône, nous pouvons vérifier expérimentalement que tous les points de ce cône produisent des triangles $P_a P_b P_d$ isocèles.

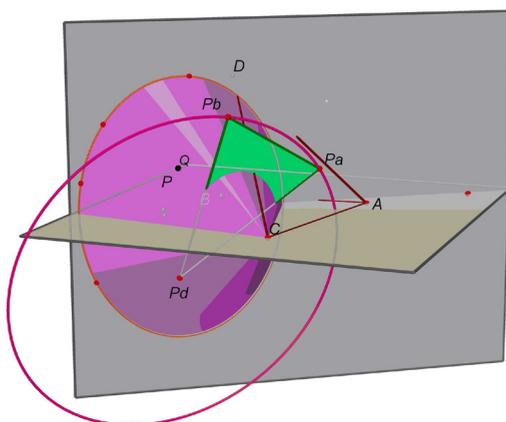


Figure 12.

Caractérisation du cône par une base circulaire

Nous pouvons donner une meilleure caractérisation du cône si nous trouvons une section circulaire.

Par inspection du cône construit, on constate que le plan ABC est un plan de symétrie du cône, et les droites d'intersection du cône avec ce plan sont les traces des plans bissecteurs de l'angle $A(CD)B$. On déduit que le deuxième plan de symétrie du cône est perpendiculaire au plan ABC et contient la bissectrice de l'angle formé par ces deux traces.

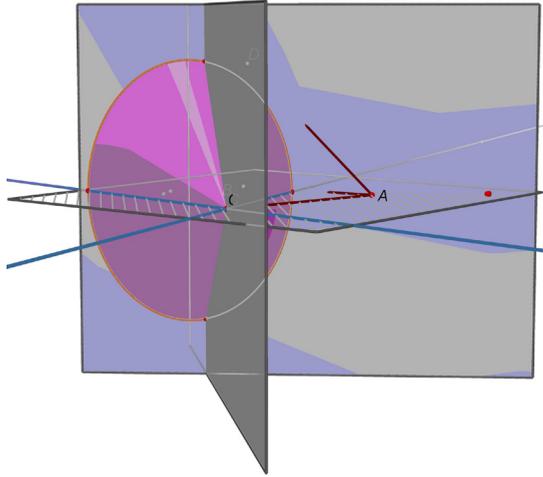


Figure 13.

Soient d_1 et d_2 les intersections du cône avec le plan ABC , et d_3, d_4 les intersections du cône avec le deuxième plan de symétrie. Soient K et K' les points d'intersection de d_1 et d_2 avec la conique de base, L et L' les intersections de d_3 et d_4 avec la conique de base. Soit O le centre de la conique.

Pour trouver la section circulaire, on construit un cercle qui passe par L, L' et un point X sur d_1 . Pour deux positions de X , le cercle coupe la droite d_2 . Le lieu de l'intersection de ce cercle avec le plan ABC est un cercle qui coupe d_1 en deux points. Ces deux points définissent avec les points L et L' deux sections circulaires du cône.

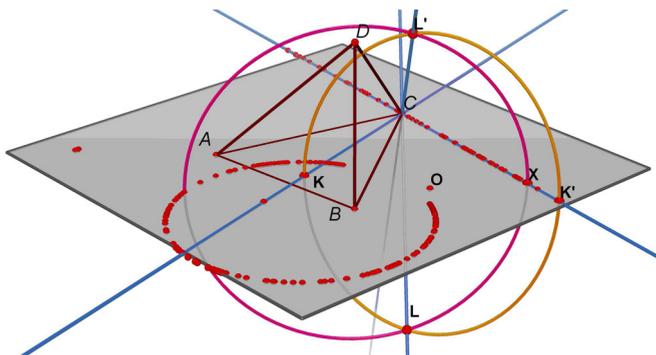


Figure 14.

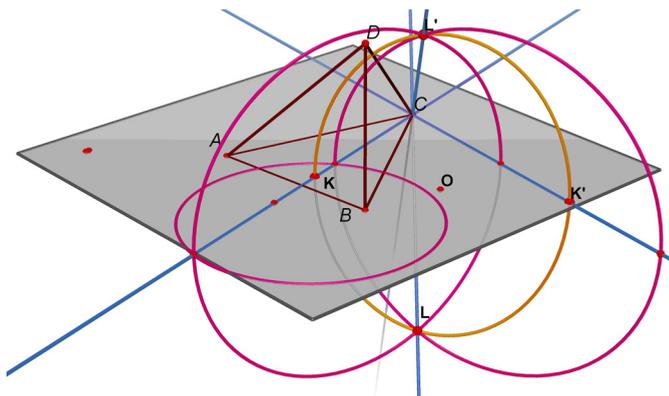


Figure 15.

On peut constater que les plans qui contiennent ces deux cercles sont perpendiculaires à d_1 et d_2 respectivement.

Alors, le lieu des points de l'espace qui produisent un triangle $P_a P_b P_d$ isocèle en P_d est un cône de sommet C , qui passe par les traces sur ABC des plans bissecteurs de l'angle $A(CD)B$, et dont la base est un cercle sur un plan perpendiculaire à une de ces traces.

Nous pouvons conclure que le lieu des points de l'espace qui produisent un tétraèdre symétrico-latéral isocèle en P_d est l'intersection de trois cônes circulaires obliques :

1. le cône de sommet C , qui passe par les traces sur ABC des plans bissecteurs de $A(CD)B$ dont le plan de base est perpendiculaire à une de ces deux traces.
2. le cône de sommet B , qui passe par les traces sur ABC des plans bissecteurs de $C(BD)A$ dont le plan de base est perpendiculaire à une de ces deux traces.
3. le cône de sommet A , qui passe par les traces sur ABC des plans bissecteurs de $C(AD)B$ dont le plan de base est perpendiculaire à une de ces deux traces.

Ce lieu géométrique est une courbe gauche (à double courbure) de quatrième degré.

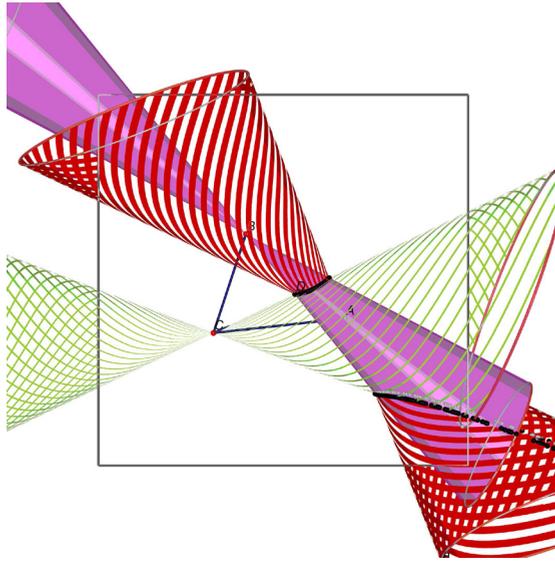


Figure 16.

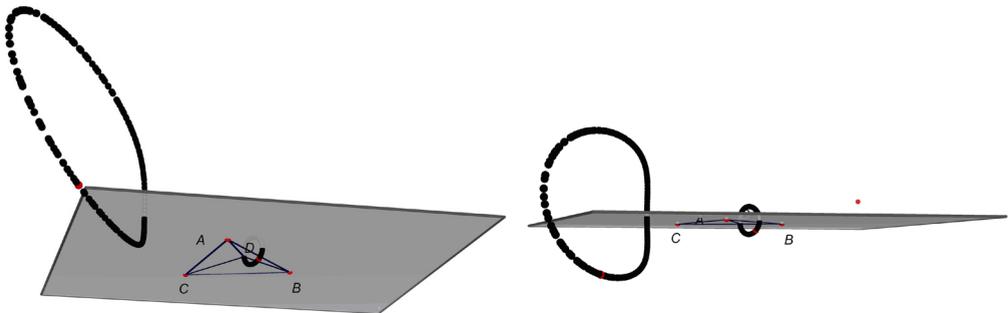


Figure 17.

Démonstration du théorème : étant donné un tétraèdre $ABCD$, tous les points du cône de sommet C , qui passe par les traces sur le plan ABC des plans bissecteurs de l'angle dièdre $A(CD)B$, et dont la section circulaire est perpendiculaire à une de ces traces, produisent des triangles $P_aP_bP_d$ isocèles en P_d .

On va démontrer que ce cône est le lieu de tous les points de l'espace dont les distances aux droites CD et CA sont dans le même rapport que les distances de D à CD et CA . Ensuite on utilisera cette propriété pour démontrer que tous ces points produisent des triangles $P_aP_bP_d$ isocèles.

1. Etant donné un tétraèdre $ABCD$, les points du plan ABC dont les distances aux droites AC et BC sont proportionnelles aux distances de D à ces mêmes droites ap-

partiennent aux plans bissecteurs de l'angle $A(CD)B$. (Généralisation du théorème des bissectrices dans un triangle)

Il suffit de démontrer l'affirmation pour un point R différent de C , car les distances de tous les points de la droite RC aux droites AC et BC sont proportionnelles, et le plan bissecteur de l'angle $A(CD)B$ passe par C .

Soit P_1 un plan perpendiculaire à AC par D , et P_2 un plan perpendiculaire à BC par D . Soit D_a l'intersection de P_1 et BC , D_b l'intersection de P_2 et AC . Comme les plans P_1 et P_2 sont perpendiculaires à ABC , leur intersection est perpendiculaire à ABC . Soit M l'intersection des plans P_1 , P_2 et ABC . Les deux triangles D_aDM et D_bDM sont rectangles et ont un côté commun.

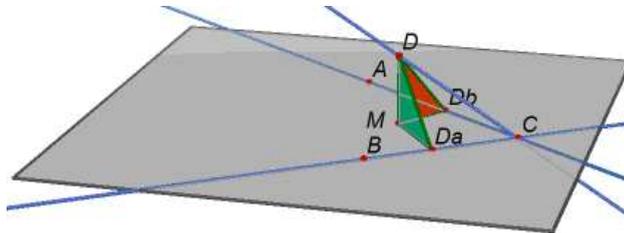


Figure 18.

Donc,

$$D_bD * \sin(B(AC)D) = D_aD * \sin(A(BC)D).$$

Soit R un point du plan ABC tel que

$$d(R; AC) = D_bD \quad \text{et} \quad d(R; BC) = D_aD.$$

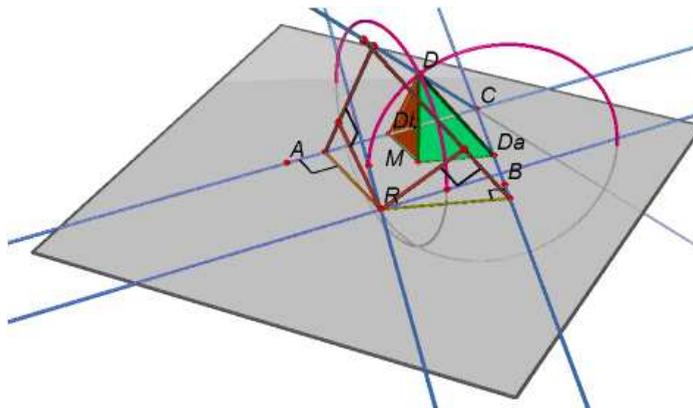


Figure 19.

La distance de R au plan ADC est $D_b D * \sin(B(AC)D)$ et la distance de R au plan BDC est $D_a D * \sin(A(BC)D)$; donc, le point R est équidistant de ces deux plans, et il se trouve sur leur plan bissecteur.

2. *Le lieu des points dont les distances aux droites AC et BC sont proportionnelles aux distances de D à ces mêmes droites est un cône circulaire oblique, qui passe par les traces des plans bissecteurs de $A(CD)B$ sur le plan ABC , et dont la base est sur un plan perpendiculaire à une de ces deux droites (généralisation du cercle d'apollonius d'un triangle)*

D'après le théorème déjà démontré, nous savons que les droites traces des plans bissecteurs de $A(CD)B$ sur le plan ABC font partie du lieu. Alors tous les points Q tels que ces deux droites soient les traces des plans bissecteurs de $A(QC)B$, font partie du lieu.

Or, les plans bissecteurs d'un angle donné étant perpendiculaires, il suffit de trouver tous les couples de plans perpendiculaires qui passent par ces deux droites

“quand deux plans sont rectangulaires, tout plan perpendiculaire à l'un d'eux les coupe suivant deux droites rectangulaires ; donc un plan transversal perpendiculaire à l'une des deux droites fixes coupe les deux plans mobiles suivant deux droites rectangulaires : or ces deux droites passent par les deux points fixes où le plan transversal coupe les deux droites fixes ; leur point d'intersection engendre donc un cercle passant par ces deux points fixes, et sur lequel s'appuie la droite d'intersection des deux plans mobiles » (Chasles M. “Analogie entre des propositions de Géométrie plane et de Géométrie à trois dimensions. – Géométrie de la Sphère – Hyperboloïde à une nappe” ; in *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, Sér I, 2, 1837, p. 325)

On conclut que tous les points Q cherchés sont sur un cône circulaire oblique de sommet C et dont la base est perpendiculaire à une des deux droites traces sur ABC de l'angle $A(CD)B$.

3. *Tous les points P dont les distances à AC et BC sont proportionnelles aux distances de D à ces mêmes droites, produisent un triangle $P_a P_b P_d$ isocèle en P_d .*

Soit Q_a la projection de P sur BC et Q_b la projection de P sur AC .

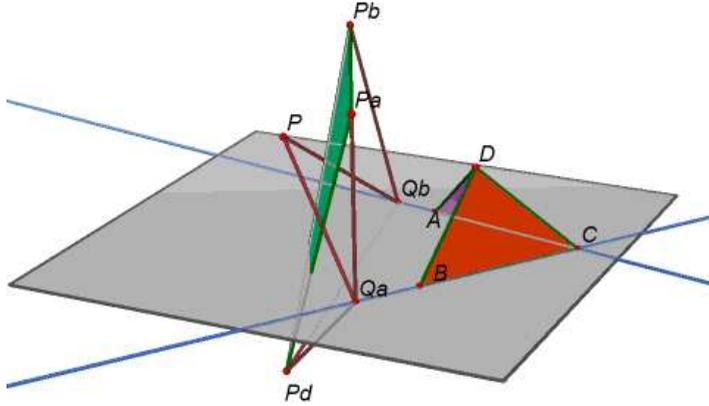


Figure 20.

Comme P est symétrique de P_a par rapport à BCD et P_d est symétrique de P par rapport à ABC , alors P_d est l'image de P_a par une composition de symétries planes qui passent par AC , c'est-à-dire par une rotation autour de AC du double de l'angle $B(AC)D$.

Le triangle $P_aP_dQ_a$ est isocèle, et l'angle $P_aQ_aP_d$ est le double de l'angle $A(BC)D$. De même, le triangle $P_bP_dQ_d$ est isocèle et l'angle $P_bQ_bP_d$ est le double de l'angle $B(AC)D$.

Donc,

$$P_aP_d = 2Q_aP_d * \sin(A(BC)D) \quad \text{et} \quad P_bP_d = 2Q_bP_d * \sin(B(AC)D).$$

Comme P est symétrique de P_d , alors $Q_aP_d = Q_aP$ et $Q_bP_d = Q_bP$.

Mais par hypothèse

$$\frac{d(P; BC)}{d(P; AC)} = \frac{d(D; BC)}{d(D; AC)}$$

alors

$$\frac{d(P; Q_a)}{d(P; Q_b)} = \frac{\sin(B(CA)D)}{\sin(A(BC)D)}$$

donc,

$$PQ_a * \sin(A(BC)D) = PQ_b * \sin(B(CA)D) \quad \text{et} \quad P_bP_d = P_aP_d.$$

Notre théorème de départ étant démontré, nous pouvons conclure que le lieu géométrique des points de l'espace qui produisent un tétraèdre symétrico-latéral isocèle en P_d est l'intersection de trois cônes, de sommets A , B et C respectivement.

Conclusion

Nous avons abordé la généralisation à l'espace d'un problème sur le triangle symétrico-latéral (homothétique du triangle podaire), avec une démarche expérimentale. Nous avons utilisé le logiciel Cabri3d, qui permet d'effectuer des constructions euclidiennes dans l'espace, et de les manipuler en déplaçant les points. Nous avons décrit la construction d'un dispositif de 'détection de points', qui permet d'afficher la trace d'un point lorsqu'il remplit une condition donnée, avec un degré d'approximation donné. Ces images constituent des approximations de courbes, grâce auxquelles il est possible d'émettre de conjectures sur les propriétés de la courbe exacte (degré, points par lesquelles elle doit passer, etc.), conjectures qui nécessitent une vérification théorique, et qui conduisent à la construction exacte de la courbe. Finalement, on a fait la démonstration formelle des théorèmes énoncés.

Références

- [1] M. ACOSTA, (2005). "Geometría Experimental con Cabri: una nueva praxeología matemática", En *Educación Matemática*, vol. 17, p. 121.
- [2] M. CHASLES, (1837). "Analogie entre des propositions de Géométrie plane et de Géométrie à trois dimensions. – Géométrie de la Sphère – Hyperboloïde à une nappe", IN *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, Sér I, 2 (1837), p. 325.
- [3] A.R. JOHNSON, (1960). *Advanced Euclidean Geometry*. Dover Publications Inc, New York.
- [4] G. ONOFRIO, (1924). *Les Foyers du triangle*. Lyon, Société anonyme de l'imprimerie A. Rey.
- [5] V. THÉBAULT, (1948). "Un chapitre de la géométrie récente du tétraèdre. Symédi-anes et second point de Lemoine", in *Bulletin de la S.M.F.*, tome 76, p. 95-107.

MARTÍN EDUARDO ACOSTA GEMPELER
TECFA Université de Genève, Suisse,
DIAM Université Joseph Fourier Grenoble, France, y
Grupo Edumat-UIS, Escuela de Matemáticas,
Universidad Industrial de Santander,
A.A. 678, Bucaramanga, Colombia.
e-mails: Martin.acosta@tecfa.unige.ch, martin@matematicas.uis.edu.co