Revista Integración
Escuela de Matemáticas
Universidad Industrial de Santander
Vol. 28, No. 2, 2010, pág. 153–172

Estudio numérico de sistemas de ecuaciones no lineales difusas

Patricio Cumsille[*], José Ramírez Molina, Marko A. Rojas-Medar

Universidad del Bío-Bío, Departamento de Ciencias Básicas, Casilla 447, Chillán, Chile.

Resumen. En este trabajo estudiamos la resolución numérica de sistemas de ecuaciones no lineales difusas. Más precisamente describimos, analizamos y simulamos métodos numéricos, tales como el método de Newton, con el fin de aproximar de forma eficiente las soluciones a dichos problemas. Una de las características principales de este tipo de problemas es que las técnicas analíticas estándares de soluciones no son adecuadas para resolverlos. Por esta razón, en este artículo nos centramos en el estudio de los resultados conocidos para los métodos numéricos clásicos y en su adaptación a la resolución de problemas difusos.

Palabras claves: Sistemas de ecuaciones no lineales difusas, forma paramétrica, método de Newton.
MSC2000: 26E10, 65H10, 08A72.

Numerical study of systems of fuzzy nonlinear equations

Abstract. In this work we study the numerical resolution of systems of fuzzy nonlinear equations. More precisely, we describe, analyze and simulate numerical methods, such as Newton method, in order to approximate efficiently the solutions to such problems. One of the main issues of this type of problems is that the standard analytical techniques for finding solutions, are not appropriate to resolve them. For this reason, in this paper we focus in the study of known results for the classical methods and their adaptation to the resolution of fuzzy problems.

Keywords: Systems of fuzzy nonlinear equations, parametric form, Newton's method.

[*]Autor para correspondencia: *E-mail*: pcumsille@ubiobio.cl.
Recibido: 3 de septiembre de 2010, Aceptado: 5 de noviembre de 2010.

1. Introducción

En este trabajo se estudia la resolución numérica de sistemas de ecuaciones no lineales difusas. Más precisamente, en este trabajo describimos, analizamos y simulamos métodos numéricos, tales como el método de Newton, que permitan aproximar de forma eficiente las soluciones a dichos problemas. Una de las características principales de este tipo de problemas es que las técnicas analíticas estándares de soluciones, tales como el método de J.J. Buckley y Y. Qu [9]-[10], no son adecuadas para resolverlos. El interés de esta publicación se centra en estudiar los resultados conocidos para los métodos numéricos clásicos y adaptarlos a los problemas difusos.

En esta investigación se quiere determinar la solución numérica de la ecuación no lineal difusa $F(x) = 0$, donde F es una aplicación difusa

$$\begin{aligned} F : \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) &\rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \\ x \quad &\mapsto F(x), \end{aligned}$$

y donde $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ denota la clase de los conjuntos difusos sobre $\mathbb{R}^n$. Cabe señalar que la ecuación no lineal difusa $F(x) = 0$ también puede representar un sistema no lineal difuso, considerándolo como una ecuación vectorial. Por lo tanto, cada vez que se escriba $F(x) = 0$ consideraremos que este es un sistema no lineal difuso, a menos que se diga que sólo es una ecuación no lineal.

Este problema tiene variadas aplicaciones que son de gran interés, y que surgen con bastante frecuencia en las matemáticas, ingeniería, ciencias sociales y las ciencias naturales. Bajo la mirada de la lógica difusa nuestra ecuación no lineal difusa $F(x) = 0$ debe ser resuelta para modelar ciertos fenómenos presentes en las diversas ciencias. Dicha tarea en general no puede ser efectuada de manera exacta, es decir en un número finito de pasos. Para resolver este problema se podría pensar en adaptar los métodos numéricos clásicos a los problemas difusos, y tratar de extender los resultados conocidos a los mismos.

De aquí, se formulan las siguientes interrogantes:

- Dada una ecuación no lineal difusa $F(x) = 0$, ¿bajo que condiciones posee solución?
- ¿Es posible adaptar los métodos numéricos clásicos, tales como Newton o cuasi Newton, para la resolución numérica de $F(x) = 0$?
- Si es afirmativa la respuesta precedente, ¿cuál será el orden de convergencia de estos métodos?

En cuanto a las interrogantes anteriores, se puede mencionar que en el año 1990 J.J Buckley y Y. Qu [9] dan a conocer condiciones necesarias y suficientes para la existencia de soluciones de algunas ecuaciones lineales y cuadráticas, que modelan algunos fenómenos de la química, economía, finanzas y física. Obtienen solución cuando los parámetros difusos son reales o complejos. Más tarde en el año 1991, los mismos autores trabajan en un nuevo concepto de solución para resolver ecuaciones difusas [11]. Posteriormente construyen una solución $\tilde{x}$ para la ecuación matricial difusa $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$, donde los elementos en $\tilde{A}$ y $\tilde{b}$ son números difusos triangulares (véase [12]), $\tilde{A}$ es cuadrada y no-singular. Se argumenta que los métodos previos que determinan $\tilde{x}$, los cuales están basados en el principio de extensión y aritmética difusa clásica, deben ser abandonados, ya que es demasiado habitual no encontrar soluciones. Es por ello que Buckley y Y. Qu presentan seis nuevas soluciones, de las cuales se demuestra que cinco de ellas son idénticas. Luego, adoptan el valor común $\tilde{X}$ de estas cinco nuevas soluciones como solución para $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$. Además, muestran que $\tilde{X}$ es un vector difuso de $\mathbb{R}^n$, i.e., $\tilde{X} = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n)$, donde $\tilde{x}_i$ es un número real difuso para cada $i = 1 \ldots n$ [10]. Por otro lado, en el año 2004 los autores S. Abbasbandy y B. Asady [1] proponen una solución numérica para una ecuación no lineal difusa por medio del método de Newton. Posteriormente los autores B. Asady, S. Abbasbandy y M. Alavi [7] desarrollan un método para resolver un sistema lineal difuso $m \times n$, con $m \leq n$. Dan a conocer condiciones para la existencia de una solución difusa y explican el procedimiento numérico para determinar la solución. Más tarde, en el año 2006, los autores S. Abbasbandy, J.J. Nieto, R. Ezzati y E. Rodríguez-López [5] proponen una solución numérica para la ecuación $Ex^2 + Fx + G = x$, donde E, F, G y x son números difusos positivos, utilizando el método de Newton. Posteriormente, en el año 2006, los autores S. Abbasbandy y R. Ezzati [2] dan a conocer la solución numérica para un sistema de ecuaciones no lineales difuso por medio del método de Newton. Además, los autores S. Abbasbandy y A. Jafarian [1] dan a conocer la solución numérica para una ecuación no lineal difusa por el método del máximo descenso, así como también los mismos autores aproximan la solución de un sistema de ecuaciones lineales difuso [4] por medio del método de máximo descenso, discutiendo su orden de convergencia. Recientemente, en el año 2008, el autor Javad Shokri [23] sugiere analizar un nuevo método iterativo de dos pasos para resolver la ecuación no lineal difusa usando la regla de la cuadratura del punto medio.

Como se puede observar, en los últimos años se ha prestado bastante atención al desarrollo de métodos iterativos que permitan resolver la ecuación no lineal difusa $F(x) = 0$. Nuestro propósito es describir el método de Newton y aplicarlo a la resolución de problemas más generales (coeficientes de las ecuaciones que no sean necesariamente números difusos triangulares, o no necesariamente positivos).

Este trabajo está organizado como sigue: en la sección 2 recordamos algunos resultados fundamentales de la aritmética difusa. En la sección 3, describimos el método de Newton para la resolución de un sistema no lineal difuso. En la sección 4 se muestran algunos ejemplos numéricos para probar nuestro método, y finalmente en la última sección se darán a conocer las conclusiones y perspectivas.

2. Resultados preliminares

Formalmente un conjunto clásico A en un universo U se puede definir de varias formas:

- Enumerando los elementos que pertenecen al conjunto;
- Especificando las propiedades que deben cumplir los elementos que pertenecen a ese conjunto, o,
- En términos de la función de pertenencia $\mu_A(x)$,

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si}\, x \in A, \\ 0 & \text{si}\, x \notin A. \end{cases} \tag{1}$$

Podemos además decir que el conjunto A es matemáticamente equivalente a su función de pertenencia o característica $\mu_A(x)$, ya que conocer $\mu_A(x)$ es lo mismo que conocer A.

Por su parte, un conjunto difuso en el universo U se caracteriza por una función de pertenencia $\mu_A(x)$ que toma valores en el intervalo $[0, 1]$, y puede representarse como un conjunto de pares ordenados de un elemento x y su valor de pertenencia al conjunto:

$$A = \{(x, \mu_A(x)) : x \in U\}$$

Un número real difuso es aquel donde la función de pertenencia está definida en $U = \mathbb{R}$ y que cumple las condiciones siguientes [25]:

Definición 2.1 (Número difuso). Un número difuso es una aplicación $u : \mathbb{R} \to [0, 1]$ satisfaciendo las siguientes propiedades:

1. u es normal: existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $u(t_0) = 1$;
2. u es semicontinua superior;

3. u es difusa convexa:

$$u(rt_1 + (1-r)t_2) \geq \min\{u(t_1), u(t_2)\}, \quad \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R},\ r \in [0,1].$$

4. El soporte de u, $sop(u) = \overline{\{t \in \mathbb{R}:\ u(t) > 0\}}$ es un conjunto compacto de $\mathbb{R}$.

El conjunto de todos los números difusos es denotado por E^1.

Definición 2.2 (r-nivel). Dado $u \in E^1$ y $0 < r \leq 1$, llamamos r-nivel al conjunto

$$[u]^r = \{t \in \mathbb{R} : u(t) \geq r\}. \tag{2}$$

Dado $u \in E^1$ y $0 < r \leq 1$, es fácil ver a partir de la Definición 2.1 que el r-nivel, $[u]^r$, de u es un compacto convexo en $\mathbb{R}$. O sea, $[u]^r$ es un intervalo cerrado y acotado en $\mathbb{R}$, que denotaremos por $[u]^r := [u_L^r, u_R^r]$. Para el caso $r = 0$ se define el cero-nivel:

$$[u]^0 = \overline{\bigcup_{r \in (0,1]} [u]^r} = [u_L^0, u_R^0]. \tag{3}$$

Se define un orden parcial $\leq$ en E^1 dado por

$$u, v \in E^1, u \leq v \Leftrightarrow \left(u_L^r \leq v_L^r,\ u_R^r \leq v_R^r, \forall r \in [0,1]\right).$$

Si $u = 0$, se tiene que

$$0 \leq v \Leftrightarrow (0 \leq v_L^r \leq v_R^r, \forall r \in [0,1]).$$

En este caso, se dice que v es no negativo, y si $v = 0$ tenemos

$$u \leq 0 \Leftrightarrow (u_L^r \leq u_R^r \leq 0, \forall r \in [0,1]).$$

En este caso, se dice que u es no positivo.

Se define además una distancia en E^1 dada por

$$d_\infty(u,v) = \sup_{r \in [0,1]} d_H([u]^r, [v]^r) \quad \forall\ u, v \in E^1,$$

donde d_H es la distancia de Hausdorff entre subconjuntos convexos-compactos no vacíos de $\mathbb{R}$ (esto es, intervalos compactos). Se tiene que (E^1, d_∞) es un espacio métrico completo (véase [18]).

Definición 2.3 (Parametrización). Para cada $u \in E^1$ se definen las funciones $\underline{u} : [0,1] \to \mathbb{R}$, $\overline{u} : [0,1] \to \mathbb{R}$, dadas por $\underline{u}(r) = u_L^r$ y $\overline{u}(r) = u_R^r$, donde $[u]^r = [u_L^r, u_R^r]$ para cada $r \in [0,1]$. El par de funciones $(\underline{u}, \overline{u})$ se denomina parametrización del número difuso u.

Se tiene que $\underline{u}(r)$ es una aplicación acotada, monótona creciente y continua por su izquierda, y $\overline{u}(r)$ es una aplicación acotada, monótona decreciente y continua por su izquierda.

Observación 2.4. Un número clásico u es simplemente representado por $\underline{u}(r) = \overline{u}(r) = u$, $\forall\ 0 \leq r \leq 1$.

Una clase importante de números difusos son los números difusos trapezoidales (en forma), denotados por $u = (x_0, y_0, \sigma, \beta)$, y cuya función de pertenencia está dada por:

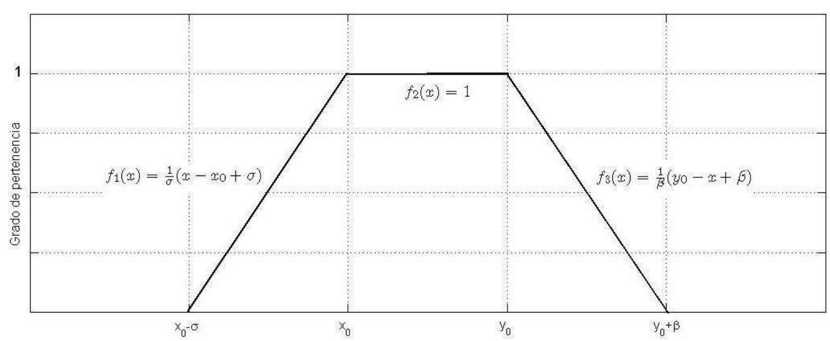

Figura 1. Número difuso trapezoidal.

$$u(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma}(x - x_0 + \sigma), & x_0 - \sigma \leq x \leq x_0, \\ 1, & x \in [x_0, y_0], \\ \frac{1}{\beta}(y_0 - x + \beta), & y_0 \leq x \leq y_0 + \beta, \\ 0, & \text{otros casos.} \end{cases} \tag{4}$$

En forma paramétrica:

$$\underline{u}(r) = x_0 + \sigma(r-1)\ , \quad \overline{u}(r) = y_0 + \beta(1-r). \tag{5}$$

Otro número usual es el triangular (en forma), denotado por $u = (x_0, x_1, x_2)$, cuya representación gráfica es dada en la Figura 2, de donde se tiene su función característica:

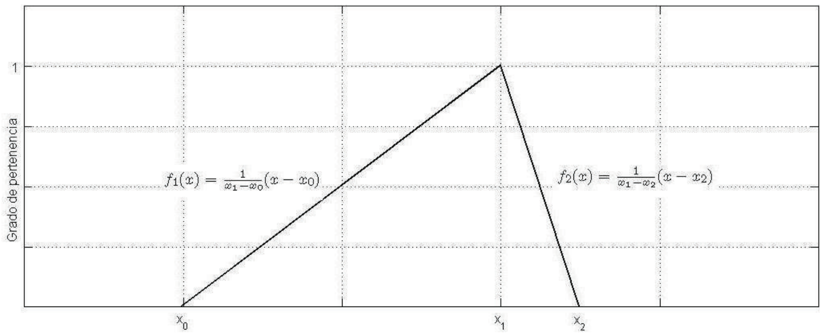

Figura 2. Número difuso triangular.

$$u(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0}, & x_0 \leq x \leq x_1, \\ \dfrac{x - x_2}{x_1 - x_2}, & x_1 \leq x \leq x_2, \end{cases} \tag{6}$$

donde $x_0 < x_1 < x_2$. Por lo tanto, en forma paramétrica este número se escribe como:

$$\underline{u}(r) = x_0 + (x_1 - x_0)r, \quad \overline{u}(r) = x_2 + (x_1 - x_2)r. \tag{7}$$

Sea $TF(\mathbb{R})$ el conjunto de todos los números difusos trapezoidales o triangulares (en forma). Si $u, v \in E^1$, las operaciones de adición y multiplicación son definidas puntualmente como sigue:

Adición: $(u + v)(r) = [\underline{u}(r) + \underline{v}(r), \overline{u}(r) + \overline{v}(r)]$.

Multiplicación por escalar:

$$\forall k \in \mathbb{R}, (ku)(r) = [\text{mín}\{k\underline{u}(r),\ k\overline{u}(r)\},\ \text{máx}\{k\underline{u}(r),\ k\overline{u}(r)\}].$$

Multiplicación:

$$\begin{aligned}(u \cdot v)(r) = [&\text{mín}\{\underline{u}(r)\underline{v}(r),\ \underline{u}(r)\overline{v}(r),\ \overline{u}(r)\underline{v}(r),\ \overline{u}(r)\overline{v}(r)\},\\ &\text{máx}\{\underline{u}(r)\underline{v}(r),\ \underline{u}(r)\overline{v}(r),\ \overline{u}(r)\underline{v}(r),\ \overline{u}(r)\overline{v}(r)\}].\end{aligned}$$

Por último, enunciaremos un resultado que utilizaremos para asegurar la existencia de soluciones de las ecuaciones difusas cuadráticas que veremos en algunos ejemplos de la próxima sección.

Teorema 2.5. *Sean E, F, G números difusos no negativos y supongamos que existe un $p > 0$ tal que*

$$\overline{E}(0)p^2 + \overline{F}(0)p + \overline{G}(0) \leq p.$$

Entonces la ecuación difusa $Ex^2 + Fx + G = x$ *tiene soluciones en el intervalo*

$$[\chi_0, \chi_p] := \{x \in E^1 : \chi_0 \leq x \leq \chi_p\},$$

donde χ_0 *(resp.* χ_p*) denota la función característica de* $\{0\}$ *(resp.* $\{p\}$*).*

Para la demostración de este teorema ver [21]. El teorema anterior da condiciones de existencia de soluciones de la ecuación cuadrática $Ex^2+Fx+G=x$, y además afirma que el soporte de dicha solución está entre 0 y p.

3. El método de Newton

Nuestro primer objetivo es resolver numéricamente la ecuación no lineal difusa:

$$F(x) = 0, \tag{8}$$

donde $F : E^1 \to E^1$. La forma paramétrica asociada es la siguiente:

$$\begin{cases} \underline{F}(\underline{x}(r), \overline{x}(r); r) = 0, \\ \overline{F}(\underline{x}(r), \overline{x}(r); r) = 0, \end{cases} \qquad \forall r \in [0,1], \tag{9}$$

donde $(\underline{x}, \overline{x})$ denota la parametrización del número difuso x. Sea $H : \mathbb{R}^2 \times [0,1] \to \mathbb{R}^2$ la aplicación definida por:

$$H(\mathbf{x}; r) := (\underline{F}(\mathbf{x}; r), \overline{F}(\mathbf{x}; r)),$$

donde $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Sea $u(r) := (\underline{x}(r), \overline{x}(r))$ y $u^*(r) = (\underline{x}^*(r), \overline{x}^*(r))$ la solución del sistema (9), es decir, $H(u^*(r); r) = 0$ para cada $r \in [0,1]$. Supongamos que $\underline{x}^*(r) \leq \overline{x}^*(r)$ para cada $r \in [0,1]$. Supongamos además que $r \mapsto \underline{x}^*(r)$ es una aplicación acotada, monótona creciente y continua por su izquierda, y que $r \mapsto \overline{x}^*(r)$ es una aplicación acotada, monótona decreciente y continua por su izquierda. Entonces, sabemos que existe un número difuso x^* tal que $(\underline{x}^*(r), \overline{x}^*(r))$ es su parametrización. En este caso, diremos que x^* es solución de la ecuación difusa (8).

Considerando la sucesión $u^{(n)}(r)$ construida a partir del método de Newton,

$$u^{(n+1)} = u^{(n)} - [J_H(u^{(n)})]^{-1} H(u^{(n)}), \qquad n \geq 0,$$

donde J_H es el jacobiano de la función H con respecto a $\mathbf{x}$, partiendo de la condición inicial $u^{(0)}(r)$ dada por el número difuso trapezoidal

$$u^{(0)}(r) := (\underline{x}(1), \overline{x}(1), \underline{x}(1) - \underline{x}(0), \overline{x}(0) - \overline{x}(1)).$$

Nuestro segundo objetivo es resolver numéricamente el sistema no lineal difuso:

$$\begin{cases} F(X,Y) = 0, \\ G(X,Y) = 0, \end{cases} \tag{10}$$

donde $X, Y \in E^1$. En forma paramétrica, el sistema anterior se escribe:

$$\begin{cases} \underline{F}(\underline{X}(r), \overline{X}(r), \underline{Y}(r), \overline{Y}(r); r) = 0, \\ \overline{F}(\underline{X}(r), \overline{X}(r), \underline{Y}(r), \overline{Y}(r); r) = 0, \\ \underline{G}(\underline{X}(r), \overline{X}(r), \underline{Y}(r), \overline{Y}(r); r) = 0, \\ \overline{G}(\underline{X}(r), \overline{X}(r), \underline{Y}(r), \overline{Y}(r); r) = 0, \end{cases} \qquad \forall r \in [0,1], \tag{11}$$

donde $(\underline{X}, \overline{X})$ (resp. $(\underline{Y}, \overline{Y})$) corresponde a la parametrización de X (resp. de Y). Sea $H : \mathbb{R}^4 \times [0,1] \to \mathbb{R}^4$ definida por:

$$H(\mathbf{x}; r) := (\underline{F}(\mathbf{x}; r), \overline{F}(\mathbf{x}; r), \underline{G}(\mathbf{x}; r), \overline{G}(\mathbf{x}; r)),$$

donde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$. Definiendo $\mathbf{U}(r) := (\underline{X}(r), \overline{X}(r), \underline{Y}(r), \overline{Y}(r))$, tenemos que $\mathbf{U}^*(r) = (\underline{X}^*(r), \overline{X}^*(r), \underline{Y}^*(r), \overline{Y}^*(r))$ es la solución del sistema (11) si y solamente si $H(\mathbf{U}^*(r), r) = 0$ para todo $r \in [0,1]$. Supongamos que $\underline{X}^*(r) \leq \overline{X}^*(r)$ (resp. $\underline{Y}^*(r) \leq \overline{Y}^*(r)$) para cada $r \in [0,1]$. Supongamos además que $r \mapsto \underline{X}^*(r)$ (resp. $r \mapsto \underline{Y}^*(r)$) es una aplicación acotada, monótona creciente y continua por su izquierda, y que $r \mapsto \overline{X}^*(r)$ (resp. $r \mapsto \overline{Y}^*(r)$) es una aplicación acotada, monótona decreciente y continua por su izquierda. Entonces, sabemos que existe un número difuso X^* (resp. Y^*) tal que $(\underline{X}^*(r), \overline{X}^*(r))$ (resp. $(\underline{Y}^*(r), \overline{Y}^*(r))$) es su parametrización. En este caso, diremos que (X^*, Y^*) es solución del sistema difuso (10).

Para cada $r \in [0,1]$, consideremos la sucesión $U^{(n)}(r)$ construida por el método de Newton,

$$U^{(n+1)} = U^{(n)} - [J_H(U^{(n)})]^{-1} H(U^{(n)}), \qquad n \geq 0,$$

donde J_H es el jacobiano de la función H con respecto a $\mathbf{x}$, partiendo de la condición inicial $U^{(0)}(r) = (X^{(0)}(r), Y^{(0)}(r))$ dada por el vector de números difusos trapezoidales:

$$\begin{cases} X^{(0)}(r) & := & (\underline{X}(1), \overline{X}(1), \underline{X}(1) - \underline{X}(0), \overline{X}(0) - \overline{X}(1)), \\ Y^{(0)}(r) & := & (\underline{Y}(1), \overline{Y}(1), \underline{Y}(1) - \overline{Y}(0), \overline{Y}(0) - \overline{Y}(1)). \end{cases}$$

Teorema 3.1. *Supongamos que para cada $r \in [0,1]$ fijo, la función $H(\cdot, r)$ es de clase C^1 con respecto a U. Supongamos que existe $\beta > 0$ tal que $\|J_H(U^*(r); r)^{-1}\| \leq \beta$ y que J_H es lipschitziana con respecto a U, con constante de Lispchitz γ; entonces la sucesión $(U^{(n)}(r))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $U^*(r)$, y se tiene que:*

$$\|U^{(n+1)}(r) - U^*(r)\| \leq \beta\gamma\|U^{(n)}(r) - U^*(r)\|^2 \quad \forall r \in [0,1]. \tag{12}$$

Para una demostración de este teorema ver [13].

4. Ejemplos numéricos

En esta sección daremos a conocer ejemplos para ilustar el método introducido en la sección anterior. En particular, resolveremos algunas ecuaciones difusas y algunos sistemas de ecuaciones no lineales difusos.

En el ejemplo siguiente empleamos el Teorema 2.5 para asegurar la existencia de soluciones.

Ejemplo 4.1. Consideremos la ecuación no lineal difusa

$$(0,\ 0{,}5,\ 1)x^2 + (0,\ 0{,}1,\ 0{,}25)x + (0{,}025,\ 0{,}05,\ 0{,}1) = x.$$

Suponiendo que x es un número difuso positivo, la forma paramétrica de esta ecuación es:

$$\begin{cases} 0{,}5r\underline{x}^2(r) - (1 - 0{,}1r)\underline{x}(r) + (0{,}025 + 0{,}025r) = 0, \\ (1 - 0{,}5r)\overline{x}^2(r) - (0{,}75 + 0{,}15r)\overline{x}(r) + (0{,}1 - 0{,}05r) = 0. \end{cases} \tag{13}$$

Para obtener la condición inicial se evalúa el sistema (13) en $r = 0$ y $r = 1$,

$$\begin{cases} -\underline{x}(0) + 0{,}025 = 0, \\ \overline{x}^2(0) - 0{,}75\overline{x}(0) + 0{,}1 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 0{,}5\underline{x}^2(1) - 0{,}9\underline{x}(1) + 0{,}05 = 0, \\ 0{,}5\overline{x}^2(1) - 0{,}9\overline{x}(1) + 0{,}05 = 0, \end{cases}$$

obteniéndose $\underline{x}(0) = 0{,}025$, $\overline{x}(0) = 0{,}1734$ y $\underline{x}(1) = \overline{x}(1) = 0{,}0574$. Por tanto la condición inicial es $x^{(0)} = (0{,}0574, 0{,}0574, 0{,}0324, 0{,}116)$. Hemos resuelto el sistema (13) para 20 valores de r en una malla equiespaciada del intervalo $[0,1]$; al cabo de 2 iteraciones como máximo, obtenemos una solución aproximada con un error menor que $3 \cdot 10^{-4}$ para cada r en dicha malla (ver Figura 3).

Ahora, suponiendo x negativo se tiene

$$\begin{cases} 0{,}5r\overline{x}^2(r) - (0{,}75 + 0{,}15r)\underline{x}(r) + (0{,}025 + 0{,}025r) = 0, \\ (1 - 0{,}5r)\underline{x}^2(r) - (1 - 0{,}1r)\overline{x}(r) + (0{,}1 - 0{,}05r) = 0. \end{cases} \tag{14}$$

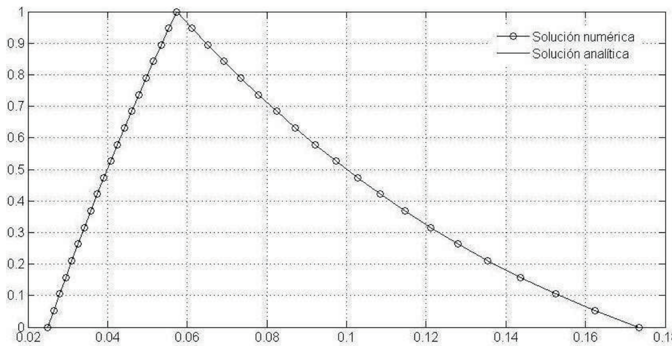

Figura 3. Gráfico de las soluciones numérica y analítica (suponiendo $x \geq 0$).

Resolviendo el sistema (14) para $r = 0$,

$$\begin{cases} -0{,}75\underline{x}(0) + 0{,}025 = 0, \\ \underline{x}^2(0) - \overline{x}(0) + 0{,}1 = 0, \end{cases} \tag{15}$$

se tiene que $\underline{x}(0) \simeq 0{,}0\bar{3}$ y $\overline{x}(0) \simeq 0{,}10\bar{1}$, lo cual no es posible, ya que x debe ser no positivo para cada valor de r; en consecuencia, la raíz negativa no existe.

Ejemplo 4.2. Consideremos la ecuación no lineal difusa

$$(4,\ 5,\ 1,\ 1)x^2 + (1,\ 2,\ 1,\ 1)x = (1,\ 2,\ 1,\ 1).$$

Suponiendo que x es un número difuso positivo, la forma paramétrica de esta ecuación es:

$$\begin{cases} (3 + r)\underline{x}^2(r) + r\underline{x}(r) - r = 0, \\ (6 - r)\overline{x}^2(r) + (3 - r)\overline{x}(r) - (3 - r) = 0. \end{cases} \tag{16}$$

Para obtener la condición inicial se evalúa el sistema (16) en $r = 0$ y $r = 1$:

$$\begin{cases} 3\underline{x}^2(0) = 0, \\ 6\overline{x}^2(0) + 3\overline{x}(0) - 3 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 4\underline{x}^2(1) + \underline{x}(1) - 1 = 0, \\ 5\overline{x}^2(1) + 2\overline{x}(1) - 2 = 0, \end{cases}$$

obteniéndose $\underline{x}(0) = 0$, $\overline{x}(0) = 0{,}5$, $\underline{x}(1) = 0{,}3904$ y $\overline{x}(1) = 0{,}4633$. Por tanto, la condición inicial es $x^{(0)} = (0{,}3904,\ 0{,}4633,\ 0{,}3904,\ 0{,}0367)$. Hemos resuelto el sistema (16) para 20 valores de r en una malla equiespaciada del intervalo $[0, 1]$; al cabo de 5 iteraciones como máximo, obtenemos una solución aproximada con un error menor que $8 \cdot 10^{-4}$ para cada r en dicha malla (ver Figura 4).

Ahora, suponiendo x negativo se tiene que

$$\begin{cases} (3 + r)\overline{x}^2(r) + r\underline{x}(r) = r, \\ (6 - r)\underline{x}^2(r) + (3 - r)\overline{x}(r) = (3 - r). \end{cases} \tag{17}$$

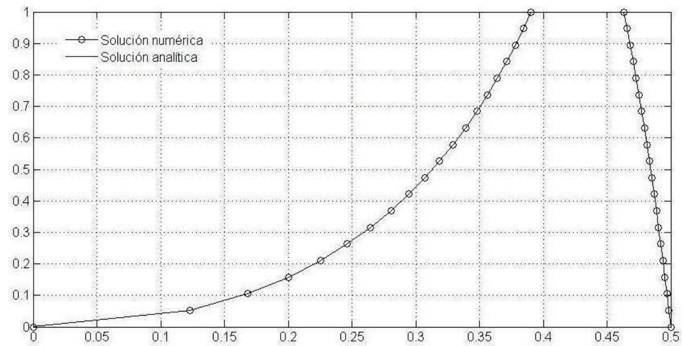

Figura 4. Gráfico de las soluciones numérica y analítica (suponiendo $x \geq 0$).

Resolviendo el sistema (17) para $r = 0$ y $r = 1$:

$$\begin{cases} 3\overline{x}^2(0) = 0, \\ 6\underline{x}^2(0) + 3\overline{x}(0) - 3 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 4\overline{x}^2(1) + \underline{x}(1) - 1 = 0, \\ 5\underline{x}^2(1) + 2\overline{x}(1) - 2 = 0. \end{cases}$$

Se obtiene $\underline{x}(0) \simeq -0{,}7071$ y $\overline{x}(1) \simeq -0{,}8183$, por tanto $\underline{x}(0) > \overline{x}(1)$; en consecuencia, la raíz negativa no existe.

En el ejemplo siguiente empleamos el Teorema 2.5 para asegurar la existencia de soluciones.

Ejemplo 4.3. Consideremos la ecuación no lineal difusa

$$(2,\ 4,\ 1,\ 2)x^2 + (0,\ 0{,}25,\ 0{,}5)x + (0,\ 0{,}0025,\ 0{,}005) = 0.$$

Suponiendo que x es un número difuso positivo, la forma paramétrica de esta ecuación es:

$$\begin{cases} (1+r)\underline{x}^2(r) + (0{,}25r - 1)\underline{x}(r) + (0{,}0025r) = 0, \\ (6-2r)\overline{x}^2(r) - (0{,}5 + 0{,}25r)\overline{x}(r) + (0{,}005 - 0{,}0025r) = 0. \end{cases} \tag{18}$$

Para obtener la condición inicial se evalúa el sistema (18) en $r = 0$ y $r = 1$:

$$\begin{cases} \underline{x}^2(0) - \underline{x}(0) = 0, \\ 6\overline{x}^2(0) - 0{,}5\overline{x}(0) + 0{,}005 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 2\underline{x}^2(1) - 0{,}75\underline{x}(1) + 0{,}0025 = 0, \\ 4\overline{x}^2(1) - 0{,}75\overline{x}(1) + 0{,}0025 = 0. \end{cases}$$

Se obtiene $\underline{x}(0) = 0$, $\overline{x}(0) = 0{,}0717$ y $\underline{x}(1) = \overline{x}(1) = 0{,}0034$. Por tanto, la condición inicial es $x^{(0)} = (0{,}0034,\ 0{,}0034,\ 0{,}0034,\ 0{,}0683)$. Hemos resuelto el sistema (18) para 20 valores de r en una malla equiespaciada del intervalo $[0, 1]$;

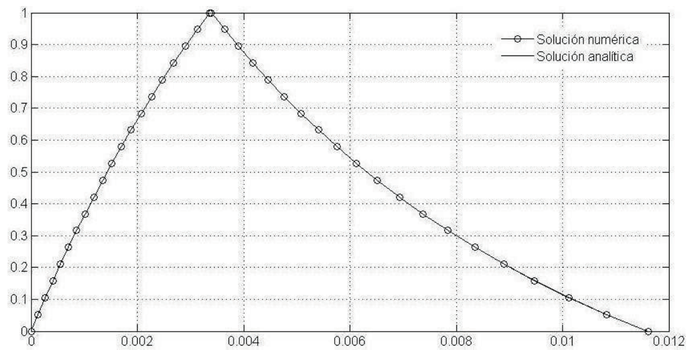

Figura 5. Gráfico de las soluciones numérica y analítica (suponiendo $x \geq 0$).

al cabo de 2 iteraciones como máximo, obtenemos una solución aproximada con un error menor que $6 \cdot 10^{-5}$ para cada r en dicha malla (ver Figura 5).

Ahora suponiendo x negativo se tiene:

$$\begin{cases} (3+r)\overline{x}^2(r) + (3-r)\underline{x}(r) - (1+r) = 0, \\ (5-r)\underline{x}^2(r) + (1+r)\overline{x}(r) - (3-r) = 0. \end{cases} \tag{19}$$

Resolviendo el sistema (19) para $r = 0$,

$$\begin{cases} 3\overline{x}^2(0) + 3\underline{x}(0) - 1 = 0, \\ 5\underline{x}^2(0) + \overline{x}(0) - 3 = 0. \end{cases} \tag{20}$$

Se tiene $\underline{x}(0) \simeq -0.9069$ y $\overline{x}(0) \simeq -1.1137$, por tanto $\underline{x}(0) > \overline{x}(0)$; y en consecuencia, la raíz negativa no existe.

Ejemplo 4.4. Consideremos el sistema no lineal difuso

$$\begin{cases} X^2 - \frac{1}{2}Y^2 = (1,\ 4,\ 0{,}6,\ 3), \\ \frac{1}{4}X^2 + \frac{3}{2}Y^2 = (1,\ 3,\ 0{,}5,\ 1). \end{cases}$$

Suponiendo que X e Y positivos, la forma paramétrica de este sistema es:

$$\begin{cases} \underline{X}^2(r) - \frac{1}{2}\overline{Y}^2(r) = (0{,}4 + 0{,}6r), \\ \overline{X}^2(r) - \frac{1}{2}\underline{Y}^2(r) = (7 - 3r), \\ \frac{1}{4}\underline{X}^2(r) + \frac{3}{2}\underline{Y}^2(r) = (0{,}5 + 0{,}5r), \\ \frac{1}{4}\overline{X}^2(r) + \frac{3}{2}\overline{Y}^2(r) = (4 - r). \end{cases} \tag{21}$$

Para obtener la condición inicial, evaluamos el sistema (21) para $r = 0$ y $r = 1$:

$$\begin{cases} \underline{X}^2(0) - \frac{1}{2}\overline{Y}^2(0) - 0{,}4 = 0, \\ \overline{X}^2(0) - \frac{1}{2}\underline{Y}^2(0) - 7 = 0, \\ \frac{1}{4}\underline{X}^2(0) + \frac{3}{2}\underline{Y}^2(0) - 0{,}5 = 0, \\ \frac{1}{4}\overline{X}^2(0) + \frac{3}{2}\overline{Y}^2(0) - 4 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \underline{X}^2(1) - \frac{1}{2}\overline{Y}^2(1) - 1 = 0, \\ \overline{X}^2(1) - \frac{1}{2}\overline{Y}^2(1)) - 4 = 0, \\ \frac{1}{4}\underline{X}^2(1) + \frac{3}{2}\underline{Y}^2(1) - 1 = 0, \\ \frac{1}{4}\overline{X}^2(1) + \frac{3}{2}\overline{Y}^2(1) - 3 = 0, \end{cases}$$

obteniéndose $\underline{X}(0) = 1{,}069606$, $\overline{X}(0) = 2{,}659197$, $\underline{Y}(0) = 0{,}3777$, $\overline{Y}(0) = 1{,}219882$, $\underline{X}(1) = 1{,}284659$, $\overline{X}(1) = 2{,}048366$ $\underline{Y}(1) = 0{,}625756$, $\overline{Y}(1) = 1{,}140482$. Por tanto,

$$X_0 = (1{,}284659,\ 2{,}048366,\ 0{,}215053,\ 0{,}610831),$$
$$Y_0 = (0{,}625786,\ 1{,}140482,\ 0{,}248086,\ 0{,}0794).$$

Después de 2 iteraciones, obtenemos la solución de X e Y con un error máximo menor que $2 \cdot 10^{-4}$ (ver figuras 6-7).

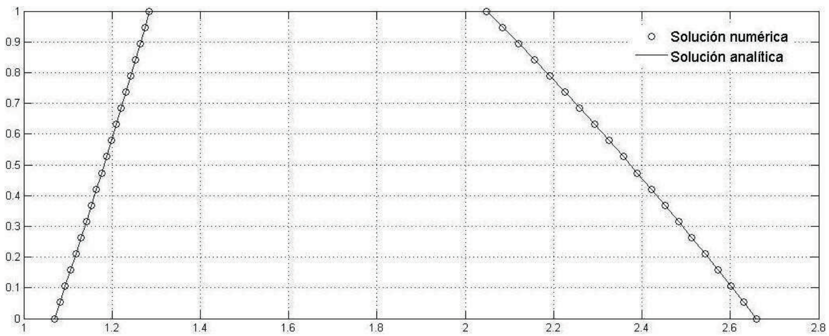

Figura 6. Gráfico de las soluciones numérica y analítica para X (suponiendo X, Y positivos).

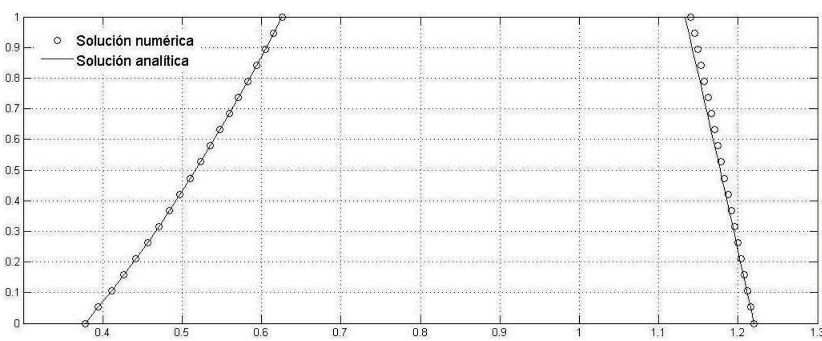

Figura 7. Gráfico de las soluciones numérica y analítica para Y (suponiendo X, Y positivos).

Ahora, considerando X e Y negativos, se obtiene:

$$\begin{cases} \overline{X}^2(r) - \frac{1}{2}\underline{Y}^2(r) = (0{,}4 + 0{,}6r), \\ \underline{X}^2(r) - \frac{1}{2}\overline{Y}^2(r) = (7 - 3r), \\ \frac{1}{4}\overline{X}^2(r) + \frac{3}{2}\overline{Y}^2(r) = (0{,}5 + 0{,}5r), \\ \frac{1}{4}\underline{X}^2(r) + \frac{3}{2}\underline{Y}^2(r) = (4 - r). \end{cases} \tag{22}$$

Para obtener la condición inicial, evaluamos el sistema (22) para $r = 0$ y $r = 1$:

$$\begin{cases} \overline{X}^2(0) - \frac{1}{2}\underline{Y}^2(0) - 0{,}4 = 0, \\ \underline{X}^2(0) - \frac{1}{2}\overline{Y}^2(0) - 7 = 0, \\ \frac{1}{4}\overline{X}^2(0) + \frac{3}{2}\overline{Y}^2(0) - 0{,}5 = 0, \\ \frac{1}{4}\underline{X}^2(0) + \frac{3}{2}\underline{Y}^2(0) - 4 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \overline{X}^2(1) - \frac{1}{2}\underline{Y}^2(1) - 1 = 0, \\ \underline{X}^2(1) - \frac{1}{2}\overline{Y}^2(1) - 4 = 0, \\ \frac{1}{4}\overline{X}^2(1) + \frac{3}{2}\overline{Y}^2(1) - 1 = 0, \\ \frac{1}{4}\underline{X}^2(1) + \frac{3}{2}\underline{Y}^2(1) - 3 = 0, \end{cases}$$

obteniéndose $\underline{X}(0) = -2{,}659197$, $\overline{X}(0) = -1{,}069606$, $\underline{Y}(0) = -1{,}219882$, $\overline{Y}(0) = -0{,}3777$, $\underline{X}(1) = -2{,}048366$, $\overline{X}(1) = -1{,}284659$, $\underline{Y}(1) = -1{,}140482$, $\overline{Y}(1) = -0{,}625756$. Por tanto,

$$X_0 = (-2{,}048366,\ -1{,}284659,\ 0{,}610831,\ 0{,}215053),$$
$$Y_0 = (-1{,}140482,\ -0{,}625786,\ 0{,}0794,\ 0{,}248086).$$

Después de 2 iteraciones, obtenemos la solución de X e Y con un error máximo menor que $2 \cdot 10^{-4}$ (ver figuras 8-9).

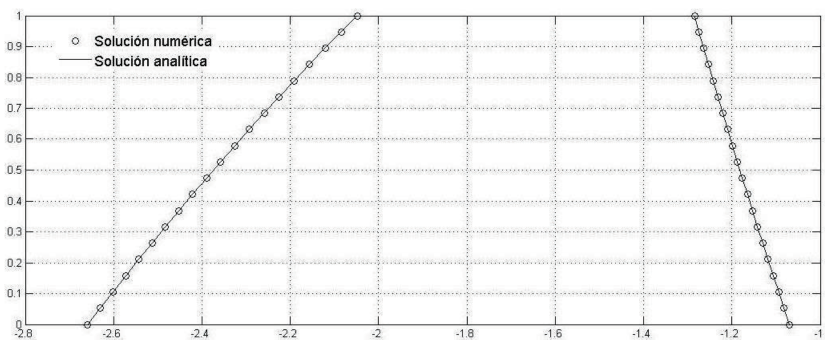

Figura 8. Gráfico de las soluciones numérica y analítica para X (suponiendo X, Y negativos).

Considerando que X es no positivo e Y es no negativo, se construye el siguiente sistema paramétrico:

$$\begin{cases} \overline{X}^2(r) - \frac{1}{2}\overline{Y}^2(r) = (0{,}4 + 0{,}6r), \\ \underline{X}^2(r) - \frac{1}{2}\underline{Y}^2(r) = (7 - 3r), \\ \frac{1}{4}\overline{X}^2(r) + \frac{3}{2}\underline{Y}^2(r) = (0{,}5 + 0{,}5r), \\ \frac{1}{4}\underline{X}^2(r) + \frac{3}{2}\overline{Y}^2(r) = (4 - r). \end{cases} \tag{23}$$

Con el objeto de obtener la condición inicial, se evalúa el sistema (23) para $r = 0$

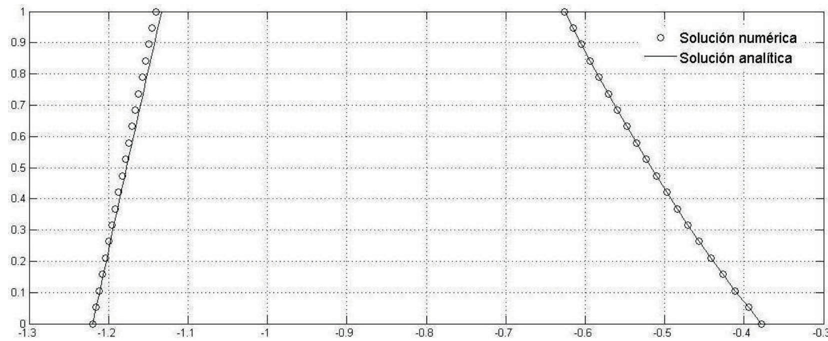

Figura 9. Gráfico de las soluciones numérica y analítica para Y (suponiendo X, Y negativos).

y $r = 1$:

$$\begin{cases} \overline{X}^2(0) - \frac{1}{2}\overline{Y}^2(0) - 0{,}4 = 0, \\ \underline{X}^2(0) - \frac{1}{2}\underline{Y}^2(0) - 7 = 0, \\ \frac{1}{4}\overline{X}^2(0) + \frac{3}{2}\underline{Y}^2(0) - 0{,}5 = 0, \\ \frac{1}{4}\underline{X}^2(0) + \frac{3}{2}\overline{Y}^2(0) - 4 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \overline{X}^2(1) - \frac{1}{2}\overline{Y}^2(1) - 1 = 0, \\ \underline{X}^2(1) - \frac{1}{2}\underline{Y}^2(1) - 4 = 0, \\ \frac{1}{4}\overline{X}^2(1) + \frac{3}{2}\underline{Y}^2(1) - 1 = 0, \\ \frac{1}{4}\underline{X}^2(1) + \frac{3}{2}\overline{Y}^2(1) - 3 = 0, \end{cases}$$

obteniéndose $\underline{X}(0) = 2{,}659197$, $\overline{X}(0) = 1{,}069606$, $\underline{Y}(0) = 0{,}3777$, $\overline{Y}(0) = 1{,}219882$, $\underline{X}(1) = 2{,}048366$, $\overline{X}(1) = 1{,}284659$ $\underline{Y}(1) = 0{,}625756$, $\overline{Y}(1) = 1{,}140482$. Por tanto, el sistema no posee solución. Desarrollando un estudio similar, y considerando X no negativo e Y no positivo, se obtiene la no existencia de solución.

Ejemplo 4.5. Consideremos el sistema no lineal difuso

$$\begin{cases} (2,\ 3,\ 4)X^2 + (2,\ 3,\ 1,\ 1)X + (3,\ 4,\ 5)Y^2 = (0{,}25,\ 1,\ 0{,}24,\ 2), \\ (4,\ 5,\ 7)X^2 + (3,\ 4,\ 1,\ 1)Y + (1,\ 3,\ 5)Y^2 = (0{,}5,\ 1{,}5,\ 0{,}499,\ 2{,}5). \end{cases}$$

Suponiendo que X e Y son positivos, entonces la forma paramétrica de este sistema es:

$$\begin{cases} (2+r)\underline{X}^2(r) + (1+r)\underline{X}(r) + (3+r)\underline{Y}^2(r) = (0{,}01 + 0{,}24r), \\ (4-r)\overline{X}^2(r) + (4-r)\overline{X}(r) + (5-r)\overline{Y}^2(r) = (3 - 2r), \\ (4+r)\underline{X}^2(r) + (2+r)\underline{Y}(r) + (1+2r)\underline{Y}^2(r) = (0{,}001 + 0{,}499r), \\ (7-2r)\overline{X}^2(r) + (5-r)\overline{Y}(r) + (5-2r)\overline{Y}^2(r) = (4 - 2{,}5r). \end{cases} \tag{24}$$

Para obtener la condición inicial, evaluamos el sistema (24) para $r = 0$ y $r = 1$:

$$\begin{cases} 2\underline{X}^2(0) + \underline{X}(0) + 3\underline{Y}^2(0) = 0{,}01, \\ 4\overline{X}^2(0) + 4\overline{X}(0) + 5\overline{Y}^2(0) = 3, \\ 4\underline{X}^2(0) + 2\underline{Y}(0) + \underline{Y}^2(0) = 0{,}001, \\ 7\overline{X}^2(0) + 5\overline{Y}(0) + 5\overline{Y}^2(0) = 4, \end{cases} \qquad \begin{cases} 3\underline{X}^2(1) + 2\underline{X}(1) + 4\underline{Y}^2(1) = 0{,}25, \\ 3\overline{X}^2(1) + 3\overline{X}(1) + 4\overline{Y}^2(1) = 1, \\ 5\underline{X}^2(1) + 3\underline{Y}(1) + 3\underline{Y}^2(1) = 0{,}5, \\ 5\overline{X}^2(1) + 4\overline{Y}(1) + 3\overline{Y}^2(1) = 1{,}5. \end{cases}$$

Consecuentemente, $\underline{X}(0) = 0{,}009807$, $\overline{X}(0) = 0{,}383708$, $\underline{Y}(0) = 0{,}000308$, $\overline{Y}(0) = 0{,}418627$, $\underline{X}(1) = 0{,}078009$, $\overline{X}(1) = 0{,}196468$, $\underline{Y}(1) = 0{,}137593$, $\overline{Y}(1) = 0{,}271476$. Por tanto,

$$X_0 = (0{,}078009,\ 0{,}196468,\ 0{,}068202,\ 0{,}18724),$$
$$Y_0 = (0{,}137593,\ 0{,}271476,\ 0{,}134513,\ 0{,}147151).$$

Después de 100 iteraciones como máximo, obtenemos la solución de X e Y con un error máximo menor que $2 \cdot 10^{-3}$ (ver figuras 10-11).

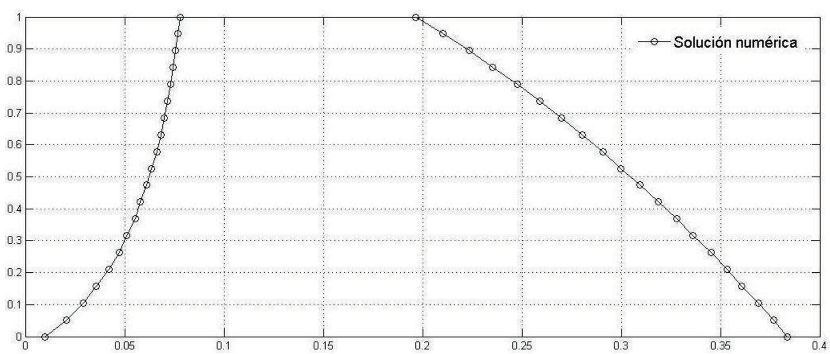

Figura 10. Gráfico de la solución numérica para X (suponiendo X, Y positivos).

En este ejemplo vemos que el método de Newton no es tan eficiente como en los ejemplos anteriores, lo cual motiva el estudio de variantes del método anterior, a fin de mejorar la convergencia del mismo.

Ahora, considerando X e Y negativos, se obtiene:

$$\begin{cases} (2+r)\overline{X}^2(r) + (4-r)\underline{X}(r) + (3+r)\overline{Y}^2(r) = (0{,}01 + 0{,}24r), \\ (4-r)\underline{X}^2(r) + (1+r)\overline{X}(r) + (5-r)\underline{Y}^2(r) = (3-2r), \\ (4+r)\overline{X}^2(r) + (5-r)\underline{Y}(r) + (1+2r)\overline{Y}^2(r) = (0{,}001 + 0{,}499r), \\ (7-2r)\underline{X}^2(r) + (2+r)\overline{Y}(r) + (5-2r)\underline{Y}^2(r) = (4-2{,}5r). \end{cases} \tag{25}$$

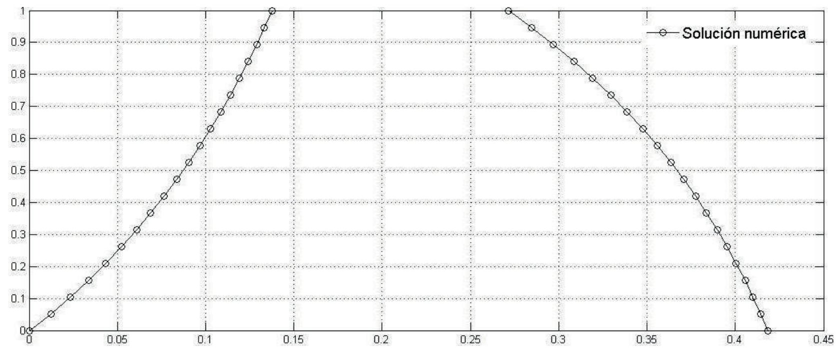

Figura 11. Gráfico de la solución numérica para Y (suponiendo X, Y positivos).

Resolviendo el sistema (25) para $r = 0$,

$$\begin{cases} 2\overline{X}^2(0) + 4\underline{X}(0) + 3\overline{Y}^2(0) = 0{,}01, \\ 4\underline{X}^2(0) + \overline{X}(0) + 5\underline{Y}^2(0) = 3, \\ 4\overline{X}^2(0) + 5\underline{Y}(0) + \underline{Y}(0) = 0{,}001, \\ 7\underline{X}^2(0) + 2\overline{Y}(0) + 5\underline{Y}^2(0) = 4. \end{cases}$$

Se tiene $\underline{X}(0) = -0{,}580506$, $\overline{X}(0) = -0{,}917871$, $\underline{Y}(0) = -0{,}716927$, $\overline{Y}(0) = -0{,}464417$. Por tanto, el sistema no posee solución negativa.

Examinando los casos de signos opuestos de las variables difusas X, Y, se obtiene la no existencia de solución para el sistema.

5. Conclusiones y perspectivas

Se ha desarrollado un estudio numérico, a través del método de Newton clásico, para resolver la forma paramétrica de la ecuación o sistema no lineal difuso propuestos. Sin embargo, a partir de los ejemplos desarrollados vemos que no basta resolver la forma paramétrica para encontrar solución del problema difuso original, puesto que la solución de la forma paramétrica debe cumplir ciertos requisitos para ser la parametrización de un número difuso.

En este sentido, existen variados estudios por realizar:

1. Determinar condiciones generales de existencia de soluciones de la ecuación no lineal difusa $F(x) = 0$, o al menos dar estas condiciones para ecuaciones difusas particulares, tales como las cuadráticas, o polinomiales en general.

2. Analizar sistemas de ecuaciones no lineales difusos, sin supuestos sobre el signo de la solución.

3. Extender el método de Newton para mejorar su convergencia. Por ejemplo, utilizar métodos de tipo cuasi-Newton aplicados a la resolución de sistemas de ecuaciones no lineales difusos.

Agradecimientos

El segundo autor agradece al Dr. Marko Rojas M. y al Dr. Patricio Cumsille A. por sus valiosos comentarios y sugerencias que han mejorado de forma substancial este trabajo; adicionalmente se agradece el financiamiento de los proyectos Fondecyt números 1080628 y 11080222. Además, el primer autor agradece el financiamiento parcial del proyecto Fondecyt N^{o}11080222 del gobierno de Chile. Finalmente, el tercer autor agradece el financiamiento parcial del proyecto Fondecyt N^{o}1080628 del gobierno de Chile.

Referencias

[1] Abbasbandy S. and Asady B., "Newton's method for solving fuzzy nonlinear equations", *Appl. Math. Comput.*, 159 (2004), 349–356.

[2] Abbasbandy S. and Ezzati R., "Newton's method for solving a system of fuzzy nonlinear equations", *Appl. Math. Comput.*, 175 (2006), 1189–1199.

[3] Abbasbandy S. and Jafarian A., "Steepest descent method for solving fuzzy nonlinear equations", *Appl. Math. Comput.*, 174 (2006), 669–675.

[4] Abbasbandy S. and Jafarian A., "Steepest descent method for system of fuzzy linear equations", *Appl. Math. Comput.*, 175 (2006), 823–833.

[5] Abbasbandy S., Nieto J.J., Ezzati R. and Rodríguez-López R., "Newton's method for solving quadratic fuzzy equations", *Adv. Theor. Appl. Math.*, 1 (2006), 1–8.

[6] Argyros I.K., *Convergence and applications of Newton-type iterations*, Springer, New York, 2010.

[7] Asady B., Abbasbandy S. and Alavi M., "Fuzzy general linear systems", *Appl. Math. Comput.*, 169 (2005), 34–40.

[8] Buckley J.J., Eslami E. and Feuring T., "Fuzzy mathematics in economics and engineering", *vol. 91 of Studies in Fuzziness and Soft Computing*, Physica-Verlag, Heidelberg, 2002.

[9] Buckley J.J. and Qu Y., "Solving linear and quadratic fuzzy equations", *Fuzzy Sets and Systems*, 38 (1990), 43–59.

[10] Buckley J.J. and Qu Y., "Solving systems of linear fuzzy equations", *Fuzzy Sets and Systems*, 43 (1991), 33–43.

[11] Buckley J.J. and Qu Y.X., "Solving fuzzy equations: a new solution concept", *Fuzzy Sets and Systems*, 39 (1991), 291–301.

[12] Chang C. and Beny N., "Some modifications of Newton's methods by the methods of undetermined coefficients", *Computers and mathematics with applications*, 56 (2008), 2528–2538.

[13] Dennis J.E. and Schnabel R.B., *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations*, Prentice-Hall, New Jersey, 1983.

[14] Dieudonné J., *Cálculo infinitesimal*, Edición Omega, España-Barcelona, 1971.

[15] Fontini M. and Sormani E., "Some variants of Newton's method with third-order covergence", *Appl. Math. Comp.*, 140 (2003), 419–426.

[16] Homeier H.H.H., "A modified Newton's method for rootfinding with cubic convergence", *J. Comput. Appl. Math.*, 157 (2003), 227–230.

[17] Homeier H.H.H., "On Newton-type methods with cubic convergence", *J. Comput. Appl. Math.*, 176 (2005), 425–432.

[18] Lakshmikantham V. and Mohapatra R.N., *Theory of Fuzzy Differential Equations and Inclusions*, Series in Mathematical Analysis & Applications, Taylor & Francis Ltd, London 2003.

[19] Mathews J. and Fink K., *Métodos Numéricos con MATLAB*, Prentice Hall, Madrid, 2000.

[20] Negoita C.V. and Ralescu D.A., *Applications of fuzzy sets to systems analysis*, John Wiley and sons ltd, New York, 1975.

[21] Nieto J.J. and Rodríguez-López R., "Existence of extremal solutions for quadratic fuzzy equations", *Fixed Point Theory and Applications*, (2005), 321-342.

[22] Pedrycz W. and Gomide F., *An Introduction to Fuzzy Sets, Analysis and Design*, Massachusetts Institute of Technology, 1998.

[23] Shokri J., "Solving fuzzy Nonlinear Equations in Banach Spaces", *Int. J. Comtemp. Math.*, 3 (2008), 635–644.

[24] Weerakoon S. and Fernando G.I., "Some variants of Newton's method with accelerated third-order convergence", *Applied Mathematical letters*, 13 (2000), issue 8, 87–93.

[25] Zadeh L.A., "Fuzzy sets", *Information and Control*, 8 (1965), 338–353.