Revista Integración
Escuela de Matemáticas
Universidad Industrial de Santander
Vol. 25, No. 2, 2007, pág. 85–98

Sobre el significado físico de la superenergía

L. Herrera*

Resumen. Con el propósito de poner en evidencia la relevancia física del concepto de superenergía (y las variables asociadas), se presenta una breve revisión de algunos estudios sobre diferentes sistemas autogravitantes relativistas, cuyo comportamiento se explican a partir de dichos conceptos.

Abstract. The relevance of physical superenergy concept is stablished through a brief review of several studies on different self-gravity relativist systems. Also, the superenergy behavior can be explained from it.

1. El problema de la energía en Relatividad General

La energía es un concepto fundamental en física, que hace inteligible un gran número de escenarios bajo muy disímiles circunstancias. Por eso no debe sorprender el hecho de que desde el advenimiento de la Relatividad General (RG) se haya intentado, por muy diversos medios, dotar a la teoría de una definición apropiada de energía gravitacional que permita la descripción local de dicha cantidad a partir de variables invariantes (construídas a partir de tensores). Estos intentos, como es sabido, han fracasado, y la razón es bastante fácil de entender. En efecto, como se sabe de la teoría de campos, la energía es una función de los potenciales y sus primeras derivadas. Sin embargo, como también se sabe, es imposible construir (en el contexto de la RG) un tensor a partir de la métrica y sus primeras derivadas (principio de equivalencia). Esta situación deja tres posibilidades.

- Definir la energía gravitacional a partir de pseudotensores.
- Definir la energía gravitacional a partir de variables no locales.

Palabras y frases claves: Relatividad General, sistemas autogravitantes.
***Key words*:** General Relativity, self-gravity systems.
***PACS*:** 04.20.-q, 95.30.Sf, 98.80.-k.

* Escuela de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Central de Venezuela, Apartado 80793, Caracas 1080A, Venezuela. *e-mail*: laherrera@cantv.net.ve

- Introducir conceptos sucedáneos de la energía que dependan de la métrica y (al menos) de sus primeras y segundas derivadas, y por lo tanto se puedan definir los conceptos de tensores.

El concepto de superenergía emerge de esta tercera posibilidad.

2. Tensor de Bel, tensor de Bel–Robinson y analogía electromagnética

A partir de la analogía estructural entre la RG y el electromagnetismo de Maxwell, se puede establecer una paralelismo entre el tensor de Riemann ($R_{\alpha\beta\gamma\delta}$) y el tensor de Maxwell ($F_{\mu\nu}$). Este paralelismo le permitió a Lluis Bel introducir un tensor de cuatro índices (super tensor de Bel) definido a partir del tensor de Riemann de una manera "similar" a como se construye el tensor de energía–momento del campo electromagnético en términos del tensor de Maxwell. De igual manera, se puede establecer un paralelismo entre el tensor de Weyl ($C_{\alpha\beta\gamma\delta}$) y el tensor de Maxwell, el cual da origen al super tensor de Bel–Robinson [1]–[3] (ver [4] para referencias más recientes sobre el tema).

Continuando con la analogía antes mencionada, así como se puede definir un campo eléctrico E_α y un campo magnético H_α de acuerdo con las ecuaciones $E_\alpha = F_{\alpha\beta}u^\beta, H_\alpha = F^*_{\alpha\beta}u^\beta$, donde u^α es el vector tangente a la congruencia de observadores con respecto a los cuales se definen dichos campos y $F^*_{\alpha\beta}$ denota el dual de $F_{\alpha\beta}$, también se puede definir la parte "eléctrica" y "magnética" de los tensores de Riemann y Weyl de acuerdo con las ecuaciones

$$E_{\alpha\beta} = C(R)_{\alpha\gamma\beta\delta}u^\gamma u^\delta \qquad \text{y} \qquad H_{\alpha\beta} = C(R)^*_{\alpha\gamma\beta\delta}u^\gamma u^\delta, \tag{1}$$

donde $C(R)$ indica que la cantidad está definida a partir del tensor de Weyl (Riemann). Obviamente en el vacío ambos tensores (Riemann y Weyl) coinciden, al igual que todas las definiciones antes mencionadas.

En el caso del tensor de Riemann es posible definir un tercer tipo de tensor,

$$X_{\alpha\beta} = {}^*R^*_{\alpha\gamma\beta\delta}u^\gamma u^\delta, \tag{2}$$

que en el caso del tensor de Weyl coincide con la parte eléctrica (a menos de un signo).

Por otra parte, así como se define la energía del campo electromagnético y el vector de Poynting como

$$U = \frac{1}{2}(E_\alpha E^\alpha + H_\alpha H^\alpha), \qquad \text{y} \qquad P_\alpha = \eta_{\alpha\beta\gamma\delta}E^\beta H^\gamma u^\delta, \tag{3}$$

donde $\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}$ define el tensor de Levi–Civita. También se puede definir la superenergía y el supervector de Poynting como

$$U(R) = \frac{1}{2}(X_{\alpha\beta}X^{\alpha\beta} + E_{\alpha\beta}E^{\alpha\beta}) + H_{\alpha\beta}\,H^{\alpha\beta}, \qquad U(C) = E_{\alpha\beta}E^{\alpha\beta} + H_{\alpha\beta}H^{\alpha\beta} \tag{4}$$

$$P(R)_\alpha = \eta_{\alpha\beta\gamma\delta}(E^\beta_\epsilon H^{\gamma\epsilon} - X^\beta_\epsilon H^{\epsilon\gamma})u^\delta, \qquad P(C)_\alpha = 2\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}E^\beta_\epsilon H^{\gamma\epsilon}u^\delta, \tag{5}$$

donde $R(C)$ indica que la cantidad está definida a partir del tensor de Riemann (Weyl). A continuación se estudian distintos sistemas autogravitantes con la ayuda de los conceptos antes mencionados, lo cual pone en evidencia su relevancia en la RG.

3. Energética de los espacio–tiempos de Einstein–Rosen

Los espacio–tiempos de Einstein–Rosen (ER) [5] han atraído la atención de muchos investigadores por el hecho de que representan la métrica más simple que describe la radiación gravitacional.

Veamos cómo el concepto de supervector de Poynting permite entender el comportamiento de una partícula de prueba en movimiento circular alrededor del eje de simetría [6], en dicho espacio–tiempo. El elemento de línea de ER viene dado por

$$ds^2 = -e^{2\gamma-2\psi}(dt^2 - dr^2) + e^{2\psi}dz^2 + r^2e^{-2\psi}d\phi^2, \tag{6}$$

donde las métricas γ y ψ satisfacen las ecuaciones de Einstein de vacío, que en este caso se reducen a:

$$\psi_{tt} - \psi_{rr} - \frac{\psi_r}{r} = 0, \tag{7}$$

$$\gamma_t = 2r\psi_r\psi_t, \tag{8}$$

$$\gamma_r = r(\psi_r^2 + \psi_t^2). \tag{9}$$

Como es fácil de comprobar, (7) es la condición de integrabilidad de (8) y (9). También la congruencia de observadores en reposo con respecto al sistema (6) viene descrita por

$$u^\alpha = \left(e^{\psi-\gamma}, 0, 0, 0\right). \tag{10}$$

3.1. Geodésicas circulares

Se puede demostrar que la velocidad angular de una partícula de prueba en la métrica ER en movimiento circular alrededor del eje de simetría viene dada por

$$\omega^2 = \frac{e^{2\gamma}\psi_t^2}{1 - r\psi_r} - e^{2\gamma}\frac{\psi_r}{r}, \tag{11}$$

(ver [6] para los detalles), mientras que la velocidad tangencial es

$$V^\mu = (-g_{00})^{-1/2} U^\mu, \tag{12}$$

donde

$$U^\mu = (\delta^\mu_\alpha + u^\mu u_\alpha) \frac{dx^\alpha}{dt}. \tag{13}$$

De manera que en este caso

$$V^\mu = e^{-(\gamma-\psi)}(0,0,0,\omega), \tag{14}$$

de donde resulta que

$$V^\mu V_\mu = e^{-2\gamma} r^2 \omega^2, \tag{15}$$

o bien

$$V^\mu V_\mu = \frac{(r\psi_t)^2}{(1 - r\psi_r)} - r\psi_r. \tag{16}$$

Es importante hacer notar que a partir de las ecuaciones de la geodésica se obtiene que la cantidad

$$L^2 = -r^3 e^{-2\psi} \times \frac{r\psi_{,t}{}^2 + r\psi_{,r}{}^2 - \psi_{,r}}{r^2\psi_{,t}{}^2 + r^2\psi_{,r}{}^2 - 1}, \tag{17}$$

debe ser constante, condición que se cumple de manera trivial en el caso estático. Para satisfacer esta restricción en el caso de un espacio–tiempo dependiente del tiempo, como el que nos ocupa, observemos que L^2 se puede descomponer en serie de potencias de $\frac{r}{t}$, de manera que

$$L^2 \approx L^2_{LC} + O\left(\frac{r}{t}\right), \tag{18}$$

donde L_{LC} se refiere al caso estático (Levi–Civita). Así pues, todo resultado que se obtenga después de despreciar términos de orden $O\left(\frac{r}{t}\right)$ garantizará el cumplimiento del vínculo antes mencionado, y por ende la existencia de geodésicas circulares.

3.2. Caso estático

En el caso estático, la métrica ER se reduce a la métrica de Levi–Civita, que tiene la forma

$$\psi_{LC} = \alpha - \beta \ln r, \qquad \gamma_{LC} = \beta^2 \ln r, \tag{19}$$

donde α, β son constantes. Para esta métrica la velocidad angular y la velocidad tangencial de una partícula de prueba en movimiento circular se escriben como

$$\omega^2 = \beta r^{2(\beta^2-1)}, \tag{20}$$

$$V^\mu V_\mu = \beta. \tag{21}$$

De lo anterior se deduce inmediatamente que $\beta \leq 1$.

3.3. Una solución de pulso en un fondo estático

Ahora se va a especificar la métrica ER. Para ello se va a suponer que el espacio–tiempo consiste de una métrica de LC que a partir de un cierto instante contiene un pulso de radiación que se propaga radialmente.

Así pues, considerando a ψ de la forma

$$\psi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{t-r} \frac{f(t')dt'}{[(t-t')^2 - r^2]^{1/2}} + \psi_{LC}, \tag{22}$$

y si además se supone que el grosor del pulso es infinitesimal, se sigue que

$$f(t) = f_0 \delta(t). \tag{23}$$

De manera que para aquellas regiones donde el pulso aún no ha llegado ($t < r$), se tiene que $\psi = \psi_{LC}$, mientras que al interior del pulso ($t > r$)

$$\psi = \frac{f_0}{2\pi(t^2 - r^2)^{1/2}} + \psi_{LC}. \tag{24}$$

La velocidad angular de una partícula de prueba en dicha métrica (al interior del pulso) viene dada por

$$\omega^2 = e^{2\gamma} \left[\frac{\beta}{r^2} - \frac{f_0}{2\pi} \frac{1}{(t^2 - r^2)^{3/2}} + \left(\frac{f_0}{\pi} \right)^2 \frac{t^2}{4(t^2 - r^2)^3} \left(1 + \beta - \frac{f_0}{2\pi} \frac{r^2}{(t^2 - r^2)^{3/2}} \right)^{-1} \right], \tag{25}$$

la cual en el límite $t \gg r$. Esto permite despreciando los términos de orden $O\left(\frac{r}{t}\right)$ y superiores, obtener

$$\omega^2 = r^{2(\beta^2-1)} \beta e^{-2\beta f_0/\pi t} = \omega_{LC}^2 e^{-2\beta f_0/\pi t}, \tag{26}$$

de lo cual se observa que la velocidad angular es menor que la velociada angular correspondiente al caso estático.

Dos preguntas emergen del resultado anterior:

- ¿Por qué $\omega_{LC} > \omega$?
- ¿De qué manera $\omega \to \omega_{LC}$ cuando $t \to \infty$?

Para responder a estas interrogantes vamos a invocar al supervector de Poynting.

3.4. Supervector de Poynting en el espacio–tiempo de Einstein–Rosen

A partir de la definición del supervector de Poynting (5) se obtiene para la métrica ER

$$P_2 = P_3 = 0 \tag{27}$$

y

$$\begin{aligned} P_1 = e^{3(\psi-\gamma)} \Big[& \psi_{rr}(-6\psi_r\psi_t + 2r\psi_t^3 + 6r\psi_t\psi_r^2) - 2\psi_{rr}\psi_{tr} + 3r\psi_t^5 \\ & + \psi_{tr}(-3\psi_t^2 - 3\psi_r^2 - \frac{\psi_r}{r} + 6r\psi_r\psi_t^2 + 2r\psi_r^3) - 8\psi_t^3\psi_r - 6\psi_r^3\psi_t \\ & + 30r\psi_t^3\psi_r^2 - \frac{3\psi_r^2\psi_t}{r} + 15r\psi_r^4\psi_t - 6r^2\psi_r\psi_t^5 - 20r^2\psi_t^3\psi_r^3 - 6r^2\psi_r^5\psi_t \Big]. \end{aligned} \tag{28}$$

Si $t \gg r$, se obtiene

$$P^1 \approx e^{3(\psi-\gamma)} \left(-\frac{3f_0}{2\pi t^2 r^3} \right) \left(\beta^2 + 4\beta^3 + 5\beta^4 + 2\beta^5 \right), \tag{29}$$

donde se han despreciado los términos de orden $O(\frac{r}{t})$ y superiores. Obsérvese que esta cantidad es negativa.

Si por el contrario $t \approx r$ $(t > r)$ (justo detrás del pulso), entonces

$$P^1 \approx \frac{e^{3(\psi-\gamma)} f_0^5 t^5}{2\pi^5 (t^2 - r^2)^{15/2}} \left[\frac{f_0 t^2}{\pi (t^2 - r^2)^{3/2}} - \frac{7\beta}{2} \right], \tag{30}$$

que es una cantidad positiva si

$$\beta < \frac{2 f_0 r^2}{7\pi (t^2 - r^2)^{3/2}}. \tag{31}$$

Ahora se puede dar respuesta a las dos preguntas mencionadas anteriormente: En la solución de pulso la velocidad angular es más pequeña que en el caso estático. Esta diferencia decrece asintóticamente a medida que el sistema regresa a la situación estática. La interpretación física de este comportamiento es inmediata. Inicialmente se tiene un sistema estático cuya masa por unidad de longitud viene determinada por β, a continuación la fuente emite un pulso de radiación que transporta energía. Esto explica por qué la velocidad angular de la partícula es menor que en el caso estático. Una vez emitido el pulso, el espacio–tiempo detrás del frente de la onda tiende a la situación estática con el mismo β que tenía al inicio. Esto explica por qué el exponente en (26) decrece con el tiempo. Por otra parte debe quedar claro que para restaurar la situación estática inicial el sistema debe absorber energía para compensar la que fue radiada previamente. Esto es exactamente lo que se deduce de la expresión para la componente radial del supervector de Poynting. En efecto, aunque es cierto que justo detrás del pulso el flujo de superenergía está dirigido hacia afuera, debe recordarse que en esa región no existen geodésicas circulares (L no es constante). Éstas sólo existen lejos del frente donde los términos de orden $O(\frac{r}{t})$ y superiores son despreciados. En esa región, como se vio, el flujo de superenergía está dirigido hacia el eje de simetría. En otras palabras, la presencia de un flujo radial de superenergía dirigido hacia adentro es necesario para restaurar la energía emitida por el pulso y al mismo tiempo para explicar el comportamiento de una cantidad observable, como es la velocidad angular de una partícula de prueba en movimiento circular alrededor de la fuente.

4. ¿Por qué la radiación gravitacional produce vorticidad?

En un trabajo reciente [7] se demostró que la radiación gravitacional genera vorticidad en una congruencia de observadores en el espacio tiempo donde esa radiación se propaga. En efecto, partiendo de la métrica de Bondi con simetría axial y de reflexión [8],

$$ds^2 = \left(\frac{V}{r}e^{2\beta} - U^2r^2e^{2\gamma}\right)du^2 + 2e^{2\beta}dudr + 2Ur^2e^{2\gamma}dud\theta \\ - r^2\left(e^{2\gamma}d\theta^2 + e^{-2\gamma}\operatorname{sen}^2\theta d\phi^2\right), \quad (32)$$

donde las funciones métricas sólo dependen de u, r y θ y se pueden escribir como series de potencias inversas de r (donde los subíndices indican derivadas con respecto a la coordenada indicada), y que en este caso se reduce a

$$\begin{aligned}
\gamma &= c(u,\theta)r^{-1} + \left(C(u,\theta) - \frac{1}{6}c^3\right)r^{-3} + \ldots && (33)\\
U &= -\left(c_\theta + 2c\cot\theta\right)r^{-2} + \left[2N(u,\theta) + 3cc_\theta + 4c^2\cot\theta\right]r^{-3} + \cdots && (34)\\
V &= r - 2M(u,\theta) \\
&\quad -\left(N_\theta + N\cot\theta - c_\theta^2 - 4cc_\theta\cot\theta - \frac{1}{2}c^2(1+8\cot^2\theta)\right)r^{-1} + \cdots && (35)\\
\beta &= -\frac{1}{4}c^2r^{-2} + \cdots && (36)
\end{aligned}$$

Se puede demostrar que para la vorticidad, de la congruencia de observadores en reposo con respecto al sistema de (32) es descrita por el campo de vectores

$$u^\alpha = \left(\frac{1}{A}, 0, 0, 0\right), \quad (37)$$

donde

$$A \equiv \left(\frac{V}{r}e^{2\beta} - U^2r^2e^{2\gamma}\right)^{1/2}, \quad (38)$$

y se define a partir de

$$\omega^{\alpha} = \frac{1}{2}\eta^{\alpha\eta\iota\lambda}u_{\eta}u_{\iota,\lambda}. \tag{39}$$

Se obtiene así que

$$\omega^{\alpha} = \left(0, 0, 0, \omega^{\phi}\right), \tag{40}$$

que a orden $O(\frac{1}{r})$ da

$$\Omega = (-\omega^{\alpha}\omega_{\alpha})^{1/2} = -\frac{1}{2r}(c_{u\theta} + 2c_u \cot\theta). \tag{41}$$

Como la función de información c_u es siempre distinta de cero si y sólo si hay radiación gravitacional, y por otra parte se imponen las condiciones usuales de regularidad sobre el eje de simetría, se llega a la conclusión que la existencia de radiación gravitacional ($c_u \neq 0$) implica necesariamente una vorticidad no nula en la congruencia definida por (37).

La pregunta pertinente es, pues: ¿mediante qué mecanismo la radiación gravitacional genera vorticidad?

Para responder este interrogante se considera el resultado obtenido por Bonnor [9], donde demuestra que la congruencia de observadores en reposo con respecto a un dipolo magnético más una carga eléctrica presenta vorticidad. Bonner explica la existencia de esta vorticidad considerando que el vector de Poynting electromagnético para ese sistema tiene una componente azimutal distinta de cero, la cual describe un flujo circular de energía electromagnética [10]. Es ese flujo circular, nos sugiere Bonnor, el responsable de la vorticidad observada.

El argumento anterior nos lleva a pensar que una componente azimutal del supervector de Poynting podría ser la responsable de la vorticidad en el caso de la radiación gravitacional [11]. Sin embargo, aunque la idea es en general correcta, hubo una apreciación inicial errónea en lo que respecta a la componente del supervector de Poynting que tiene que ser distinta de cero. En efecto, en (40) se observa que la componente del vector de vorticidad distinta de cero es la componente ϕ, por lo cual la rotación implícita ocurre en el plano perpendicular al vector unitario $\hat{e}_{\phi}$. En otras palabras la componente del supervector de Poynting que se debe buscar es $P^{(\theta)}$, y no $P^{(\phi)}$ (como erróneamente se supuso en [11]) que como consecuencia de la simetría de reflexión inherente a la métrica de Bondi, es cero.

Para dilucidar este problema hay que tratar la métrica general sin ningún tipo de simetría (métrica de Sachs [12]), cuya forma es

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= (Vr^{-1}e^{2\beta} - r^2e^{2\gamma}U^2\cosh 2\delta - r^2e^{-2\gamma}W^2\cosh 2\delta - 2r^2UW\operatorname{senh} 2\delta)du^2 + 2e^{2\beta}dudr \\
&+ 2r^2(e^{2\gamma}U\cosh 2\delta + W\operatorname{senh} 2\delta)dud\theta + 2r^2(e^{-2\gamma}W\cosh 2\delta + U\operatorname{senh} 2\delta)\operatorname{sen}\theta dud\phi \\
&- r^2(e^{2\gamma}\cosh 2\delta d\theta^2 + e^{-2\gamma}\cosh 2\delta \operatorname{sen}^2\theta d\phi^2 + 2\operatorname{senh} 2\delta \operatorname{sen}\theta d\theta d\phi), \qquad (42)
\end{aligned}
$$

donde ahora las métricas dependen de todas las coordenadas.

Para esta métrica se calculan las componentes del vector vorticidad para una congruencia de observadores en reposo con respecto al sistema (42), así como las componentes del supervector de Poynting distintas de cero (ver [13] para detalles), obteniendo

$$
\begin{aligned}
\omega^u = -\frac{1}{2A^2\operatorname{sen}\theta}\{&r^2e^{-2\beta}(WU_r - UW_r) + \\
&+ \left[2r^2\operatorname{senh} 2\delta\cosh 2\delta(U^2e^{2\gamma} + W^2e^{-2\gamma}) + 4UWr^2\cosh^2 2\delta\right]e^{-2\beta}\gamma_r + \\
&+ 2r^2e^{-2\beta}(W^2e^{-2\gamma} - U^2e^{2\gamma})\delta_r + e^{2\beta}[e^{-2\beta}(U\operatorname{senh} 2\delta + e^{-2\gamma}W\cosh 2\delta)]_\theta \\
&- e^{2\beta}[e^{-2\beta}(W\operatorname{senh} 2\delta + e^{-2\gamma}U\cosh 2\delta]_\phi\}, \qquad (43)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\omega^r = \frac{1}{e^{2\beta}\operatorname{sen}\theta}\{&2r^2A^{-2}[((U^2e^{2\gamma} + W^2e^{-2\gamma})\operatorname{senh} 2\delta\cosh 2\delta + UW\cosh^2 2\delta)\gamma_u) + \\
&(W^2e^{-2\gamma} - U^2e^{2\gamma})\delta_u + \frac{1}{2}(WU_u - UW_u)] + A^2[A^{-2}(We^{-2\gamma}\cosh 2\delta + U\operatorname{senh} 2\delta)]_\theta \\
&- A^2[A^{-2}(W\operatorname{senh} 2\delta + Ue^{2\gamma}\cosh 2\delta)]_\phi\}, \qquad (44)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\omega^\theta = \frac{1}{2r^2\operatorname{sen}\theta}\{&A^2e^{-2\beta}[r^2A^{-2}(U\operatorname{senh} 2\delta + We^{-2\gamma}\cosh 2\delta)]_r \\
&- e^{2\beta}A^{-2}[e^{-2\beta}r^2(U\operatorname{senh} 2\delta + e^{-2\gamma}W\cosh 2\delta)]_u + e^{2\beta}A^{-2}(e^{-2\beta}A^2)_\phi\}, \qquad (45)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\omega^\phi = \frac{1}{2r^2\operatorname{sen}\theta}\{&A^2e^{-2\beta}[r^2A^{-2}(W\operatorname{senh} 2\delta + Ue^{2\gamma}\cosh 2\delta)]_r \\
&- e^{2\beta}A^{-2}[r^2e^{-2\beta}(W\operatorname{senh} 2\delta + Ue^{2\gamma}\cosh 2\delta)]_u + A^{-2}e^{2\beta}(A^2e^{-2\beta})_\theta\}, \qquad (46)
\end{aligned}
$$

lo que a orden $0(\frac{1}{r})$ genera un escalar de vorticidad de la forma

$$
\Omega = -\frac{1}{2r}[(c_{\theta u} + 2c_u\cot\theta + d_{\phi u}\csc\theta)^2 + (d_{\theta u} + 2d_u\cot\theta - c_{\phi u}\csc\theta)^2]^{1/2}. \qquad (47)
$$

que se transforma en (41) en el caso de la métrica de Bondi.

Para el supervector de Poynting se obtiene al primer orden relevante:

$$
P_r = -\frac{2}{r^2}(d_{uu}^2 + c_{uu}^2), \qquad (48)
$$

$$P_\theta = -\frac{2}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\{[2(d_{uu}^2 + c_{uu}^2)c + c_{uu}c_u + d_{uu}d_u]\cos\theta + (d_{uu}^2 + c_{uu}^2)d_\phi$$
$$+ \left[c_{uu}c_{\theta u} + d_{uu}d_{\theta u} + (c_{uu}^2 + d_{uu}^2)c_\theta\right]\operatorname{sen}\theta + c_{uu}d_{\phi u} - d_{uu}c_{\phi u}\}, \quad (49)$$

$$P_\phi = \frac{2}{r^2}\{2[c_{uu}d_u - d_{uu}c_u - (d_{uu}^2 + c_{uu}^2)d]\cos\theta + (d_{uu}^2 + c_{uu}^2)c_\phi$$
$$+ \left[c_{uu}d_{\theta u} - d_{uu}c_{\theta u} - (c_{uu}^2 + d_{uu}^2)d_\theta\right]\operatorname{sen}\theta - (c_{uu}c_{\phi u} + d_{uu}d_{\phi u})\}, \quad (50)$$

$$P^\phi = -\frac{2}{r^4 \operatorname{sen}^2\theta}\{\operatorname{sen}\theta\,[d_{u\theta}c_{uu} - d_{uu}c_{u\theta}] +$$
$$+ 2\cos\theta\,[c_{uu}d_u - d_{uu}c_u] - [c_{uu}c_{u\phi} + d_{uu}d_{u\phi}]\}. \quad (51)$$

Se ha visto, que en el caso de simetría axial y de reflexión (Bondi) el plano de rotación es ortogonal al vector unitario $\hat{e}_\phi$, y por consiguiente la componente P^θ es la responsable de la vorticidad en ese caso, mientras que la componente azimutal P^ϕ es cero, del hecho de que la simetría de la métrica de Bondi excluye rotaciones a lo largo de la dirección de ϕ.

En el caso general (Sachs) el vector vorticidad tiene también componentes no nulas a lo largo de los vectores $\hat{e}_r$ y $\hat{e}_\theta$, lo que implica rotaciones en los planos ortogonales correspondientes. En particular, rotaciones en la dirección de ϕ son ahora permitidas ($\omega^\theta \neq 0$), y por lo tanto se debe esperar una componente P^ϕ distinta de cero, lo que en efecto ocurre.

En otras palabras, se ha demostrado que siempre existe una componente no nula de P^μ, en el plano ortogonal al vector unitario a lo largo del cual existe una componente no nula de la vorticidad. Inversamente, P^μ se hace cero sobre el plano ortogonal al vector unitario a lo largo del cual la componente del vector de vorticidad es cero. Esto justifica la conjetura sobre la relación entre el supervector de Poynting y la vorticidad.

5. Vorticidad en espacio–tiempos estacionarios y el supervector de Poynting

En virtud del vínculo establecido en la sección anterior entre la vorticidad generada por la radiación gravitacional y el supervector de Poynting, es legítimo preguntarse si la vorticidad asociada a fuentes rotantes en métricas estacionarias, responsable del arrastre de sistemas de referencia (efecto Lense–Thirring), también está relacionado con la existencia de componentes no nulas del supervector de Poynting en los planos ortogonales a las direcciones, a lo largo de las cuales hay componentes no nulas de la vorticidad. La respuesta a esta pregunta es afirmativa, como se demuestra en [14]. En efecto, partiendo de la métrica general estacionaria y axial simétrica (Lewis–Papapetrou)

$$ds^2 = -f\,(dt - \omega d\phi)^2 + f^{-1}\left[e^{2\gamma}\left(d\rho^2 + dz^2\right) + \rho^2 d\phi^2\right], \tag{52}$$

se tiene que el tensor de vorticidad para la congruencia de observadores en reposo en el sistema de (52), cuyo vector tangente esta dado por

$$u^\alpha = \left(\frac{1}{\sqrt{f}}, 0, 0, 0\right), \tag{53}$$

toma la forma

$$\omega_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{f}\omega_{,\rho} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{f}\omega_{,z} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{f}\omega_{,\rho} & \frac{1}{2}\sqrt{f}\omega_{,z} & 0 \end{pmatrix}. \tag{54}$$

Ahora bien, en [15] se demuestra que si la parte magnética de Weyl para la métrica (52) es cero, entonces la vorticidad también es cero. Esto implica que la métrica es estática, y viceversa. Es decir se establece la relación

$$H_{\alpha\beta} = 0 \Leftrightarrow \omega_{\alpha\beta} = 0 \Leftrightarrow \omega = 0. \tag{55}$$

Por otra parte, a partir de la definición del supervector de Poynting, se tiene que

$$H_{\alpha\beta} = 0 \Rightarrow P^\mu = 0\,. \tag{56}$$

Es decir, si la vorticidad es cero también lo es el supervector de Poynting. La pregunta crítica es si lo inverso es cierto, es decir el problema consiste en establecer la relación

$$P^\mu = 0 \Leftrightarrow H_{\alpha\beta} = 0 \Leftrightarrow \omega_{\alpha\beta} = 0 \Leftrightarrow \omega = 0\,. \tag{57}$$

Como se demuestra en [15], la respuesta a la pregunta anterior es afirmativa, y la relación (57) se puede establecer (Ver [15] para una demostración). Sin embargo, es instructivo analizar un caso particular para ilustrar la mencionada relación entre vorticidad y el supervector de Poynting.

5.1. La métrica de Kerr

La métrica de Kerr es posiblemente la más popular de las soluciones estacionarias a las ecuaciones de Einstein. En coordenadas de Boyer–Lindquist esta métrica se escribe como

$$\begin{aligned} ds^2 = &\left(-1 + \frac{2mr}{r^2 + a^2\cos^2\theta}\right) dt^2 - \left(\frac{4mar\,\mathrm{sen}^2\,\theta}{r^2 + a^2\cos^2\theta}\right) dt d\phi + \left(\frac{r^2 + a^2\cos^2\theta}{r^2 - 2mr + a^2}\right) dr^2 + \\ &+ \left(r^2 + a^2\cos^2\theta\right) d\theta^2 + \left(r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta + a^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta + \frac{2mra^2\,\mathrm{sen}^4\,\theta}{r^2 + a^2\cos^2\theta}\right) d\phi^2. \end{aligned} \tag{58}$$

La congruencia de observadores en reposo en el sistema (58) se define a partir del campo de vectores

$$u^{\alpha}=\left(\left(1-\frac{2mr}{r^2+a^2\cos^2\theta}\right)^{-1/2},0,0,0\right), \tag{59}$$

cuyo vector de vorticidad tiene componentes

$$\omega^{r}=2mra\cos\theta\left(r^2-2mr+a^2\right)\left(r^2+a^2\cos^2\theta\right)^{-2}\left(r^2-2mr+a^2\cos^2\theta\right)^{-1}, \tag{60}$$

$$\omega^{\theta}=ma\operatorname{sen}\theta\left(r^2-a^2\cos^2\theta\right)\left(r^2+a^2\cos^2\theta\right)^{-2}\left(r^2-2mr+a^2\cos^2\theta\right)^{-1}. \tag{61}$$

Por otra parte, para las componentes del supervector de Poynting se obtiene

$$P^{\mu}=\left(P^{t},P^{\phi},0,0\right), \tag{62}$$

donde

$$P^{t}=-18m^3ra^2\operatorname{sen}^2\theta\left(r^2-2mr+a^2\operatorname{sen}^2\theta+a^2\right)\left(r^2+a^2\cos^2\theta\right)^{-4}$$
$$\left(r^2-2mr+a^2\cos^2\theta\right)^{-2}\left(\frac{r^2-2mr+a^2\cos^2\theta}{r^2+a^2\cos^2\theta}\right)^{-1/2} \tag{63}$$

y

$$P^{\phi}=9m^2a\left(r^2-2mr+2a^2-a^2\cos^2\theta\right)\left(\frac{r^2-2mr+a^2\cos^2\theta}{r^2+a^2\cos^2\theta}\right)^{-1/2}$$
$$\left(r^2+a^2\cos^2\theta\right)^{-4}\left(r^2-2mr+a^2\cos^2\theta\right)^{-1}. \tag{64}$$

De las expresiones anteriores se desprende inmediatamente la relación

$$P^{\phi}=0\Leftrightarrow a=0\Leftrightarrow\omega^{\alpha}=0.$$

En conclusión, se ha visto que la idea original de Bonnor de asociar vorticidad (arrastre de referenciales) en algunos espacio–tiempos de electrovacío con la existencia de un flujo circular de energía electromagnética (descrito por el supervector de Poynting), también se puede extender al mismo efecto en espacio–tiempos estacionarios de vacío, al reemplazar el flujo de energía electromagnética por el de superenergía (descrito por el supervector de Poynting). Está claro que en ausencia de una definición covariante de energía, la superenergía emerge como la mejor candidata para jugar ese papel.

Por otra parte, el hecho de que la superenergía esté asociada a la vorticidad en espacio–tiempos radiactivos, refuerza todavía más la convicción de que es responsable de ese efecto en cualquier escenario general relativista.

Antes de concluir esta sección es importante resaltar que en todos los cálculos que se han hecho, la vorticidad está referida a una congruencia con un sentido físico inequívoco, a saber: la congruencia de las líneas de universo de los observadores que están en reposo con respecto a la fuente.

A continuación se menciona sin mayores detalles dos escenarios donde la superenergía (y cantidades asociadas) permite hacer inteligible las predicciones de la teoría.

6. Comportamiento dinámico de partículas de prueba en espacio–tiempos cuasiesféricos, cerca del horizonte

Como una expresión del teorema de Israel [16], las soluciones exactas axialsimétricas y estáticas de las ecuaciones de Einstein de vacío (Weyl), se bifurcan con respeto a la solución de Schwarzschild cerca del horizonte, e independientemente de cuán pequeños sean los multipolos superiores al monopolo.

Esto trae como consecuencia que el comportamiento físico de las soluciones de Weyl, cerca del horizonte presenta en algunos casos anomalías resaltantes. Un ejemplo de estas anomalías lo ilustra el comportamiento dinámico de partículas de prueba sobre el eje de simetría y cerca del horizonte en espacio–tiempos que representan correcciones cuadrupolares a la solución de Schwarzschild [17]–[18]. Se puede verificar que el comportamiento de la superenergía puede explicar dichas anomalías [19].

7. Acoplamiento de polvo sin distorsión con ER

Finalmente se menciona que en un estudio general sobre el problema del colapso cilíndrico [20], se obtuvo que los cilindros de polvo sin distorsión (*shear–free*) no pueden acoplarse de manera continua con una familia de ER que representa el estado asintótico (para grandes valores de t) de ER.

Al calcular el supervector de Poynting dentro de tales configuraciones, se encontró que tal vector es nulo, mientras que no lo es al exterior. Este resultado sugiere que la frontera de la distribución de polvo es un cascarón, lo que explicaría la imposibilidad del acoplamiento.

Referencias

[1] L. Bel, *C. R. Acad. Sci. Paris,* **247**, 1094, (1958).

[2] L. Bel, *C. R. Acad. Sci. Paris,* **248**, 1297, (1959).

[3] L. Bel, *Cahiers de Physique*, **16**, 59, (1962); *Gen. Rel. Grav.*, **32**, 2047, (2000).

[4] A. García–Parrado, Gómez–Lobo, *Class. Quantum Grav.*, **25**, 01006, (2008).

[5] A. Einstein & N. Rosen, *J. Franklin Inst.*, **223**, 43, (1937).

[6] L. Herrera, J. Carot, A. Di Prisco & N. O. Santos, *Int. J. of Theor. Phys.*, **47**, 380, (2008).

[7] L. Herrera, J.L. Hernández–Pastora, *Class. Quantum Grav.*, **17**, 3617, (2000).

[8] H. Bondi, M.G.J. van der Burg & A.W.K Metzner, *Proc. R. Soc.*, **A269**, 21, (1962).

[9] W.B. Bonnor, *Phys. Lett. A.*, **158**, 23, (1991).

[10] R.P. Feynman, R.B. Leighton & M. Sand, *Lectures on Physics* **II**, Addison–Wesley, Reading, 1964, pp. 27–28.

[11] L. Herrera, N.O. Santos & J. Carot, *J. Math. Phys.*, **47**, 052502, (2006).

[12] R. Sachs, *Proc. R. Soc.*, **A270**, 103, (1962).

[13] L. Herrera, W. Barreto, J. Carot & A. Di Prisco, *Class. Quantum Grav.*, **24**, 2645, (2007).

[14] L. Herrera, J. Carot & A. Di Prisco, *Phys. Rev. D.*, **76**, 044012, (2007).

[15] L. Herrera, G. González, L. Pachón & J. Rueda, *Class. Quantum Grav.*, **23**, 2395, (2006).

[16] W. Israel, *Phys. Rev.*, **164**, 1776, (1967).

[17] J.L. Hernández-Pastora & J. Martín, *Gen. Rel. Grav.*, **26**, 877, (1994).

[18] J.L. Hernández-Pastora & J. Martín, *Class.Quantum Grav.*, **10**, 2581, (1993).

[19] L. Herrera, J. Carot, N. Bolívar & E. Lazo, “The Dynamical Behaviour of Test Particles in Some Weyl Spacetimes and the Physical Meaning of Superenergy”, Preprint, 2008.

[20] L. Herrera, J. Ibáñez, A. Di Prisco, M.A.H. MacCallum & N.O. Santos, “A Global Approach to the Problem of Cylindrical Collapse”, Preprint, 2008.

L. Herrera
Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Central de Venezuela,
Apartado 80793, Caracas 1080A, Venezuela.
e-mail: `laherrera@cantv.net.ve`