

REVISTA SIGMA

Departamento de Matemáticas y Estadística

Universidad de Nariño

Volumen XII N^o 2 (2016), páginas 1–30

Una breve discusión sobre algunas funciones especiales

Jhon A. Arredondo¹
Alejandra Torres Manotas²

Abstract.

The special functions of mathematical physics are solutions of ordinary differential equations modelling various problems in mathematics and they are applied in physics to solve problems of Astronomy, Classical Mechanics, Quantum Mechanics, and Fluids, among others. Throughout the text, we will discuss some of these functions from the historic context, the way to find their solutions and its representation as auto-adjointed operators. Furthermore, we will show a graphic interface developed in Python that allows to easily graph these functions.

Keywords. Special functions, second order differential equations, power series solutions.

Resumen.

Las funciones especiales en física matemática, son funciones solución de ecuaciones diferenciales ordinarias, que modelan diversos problemas en matemáticas, y son aplicadas en física para abordar problemas en astronomía, mecánica clásica, mecánica cuántica y fluidos, entre otras. A lo largo del texto, se discutirán algunas de estas funciones, desde el contexto histórico, la forma de encontrar sus soluciones y su representación como ecuación autoadjunta. Además, se mostrará el desarrollo de una interfaz gráfica en Python, que permite graficar de forma sencilla estas funciones.

Palabras Clave. Funciones especiales, ecuaciones diferenciales de segundo orden, solución en serie de potencias.

1. Introducción

Por funciones especiales en física matemática se suelen denominar las soluciones de algunas ecuaciones ordinarias, en la mayoría de los casos de segundo orden que además, aparecen en

¹Corresponding author: Fundación Universitaria Konrad Lorenz, Carrera 9 Bis No. 62 - 43, Colombia.e-mail: alexander.arredondo@konradlorenz.edu.co

²Corresponding author: Fundación Universitaria Konrad Lorenz, Carrera 9 Bis No. 62 - 43, Colombia.e-mail: alejandra.torresm@konradlorenz.edu.co

la solución de diversas ecuaciones diferenciales parciales, que modelan diversos problemas en análisis armónico, mecánica cuántica, teoría de números, predicción lineal en series temporales, procesamiento de señales y mecánica celeste, entre otras. El estudio de algunas de estas funciones, inició por ejemplo, con la investigación del movimiento planetario [15][21], la solución de funciones algebraicas, el estudio de fenómenos como el de Ruge, descubierto por Carl David Tolmé Runge cuando estudiaba el comportamiento de los errores presentes al usar interpolación polinómica para la aproximación de funciones [8]; el estudio de los movimientos oscilatorio en mecánica clásica y mecánica cuántica [19][21], y el estudio de ciertas funciones en variable compleja [17].

La importancia de las funciones especiales en física matemática, radica en las múltiples aplicaciones, que no sólo se centran en el ámbito teórico de la matemática, sino que pueden ser usadas para la descripción de fenómenos de la vida diaria. Por esta razón, el objetivo de este escrito, es mostrar el desarrollo histórico, la solución y aplicación de algunas de estas funciones, junto con un aplicativo que permite graficarlas de manera sencilla, y puede ser usado como herramienta didáctica en los cursos de física matemática y ecuaciones diferenciales.

La primera parte del texto comprende conocimientos previos sobre uno de los métodos más utilizados en la solución de ecuaciones diferenciales parciales, el Teorema de Frobenius, y un poco sobre operadores autoadjuntos para ecuaciones diferenciales, todo esto, necesarios en el desarrollo de las soluciones correspondientes a cada ecuación en derivadas parciales. La segunda parte, expone el contexto histórico, solución de las diferentes ecuaciones y su representación como operador autoadjunto. Finalmente, la tercera parte del texto, presenta el algoritmo diseñado, que por medio de una interfaz gráfica, se obtienen de manera sencilla las gráficas correspondientes a cada ecuación, con la posibilidad de variar los parámetros iniciales y con esto observar su comportamiento.

2. Método de separación de variables

Separación de variables es uno de los métodos más utilizados para dar solución a algunas ecuaciones en derivadas parciales con valores en la frontera. En este método, se postula como solución el producto de n funciones de una variable correspondientes al número de variables presentes en la ecuación. Con esto se genera un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, cuya solución particular es un conjunto de n funciones linealmente independientes, y cuya solución genreal es la combinación lineal de los elementos del conjunto anterior.[21]

Como ejemplo, consideremos el problema de valores iniciales y valores homogéneos en la frontera, para la ecuación unidimensional del calor [18], dada por:

$$\begin{aligned}u_t &= \alpha^2 u_{xx}, & (2.1) \\u(0, t) &= 0, \\u(l, t) &= 0, \\u(x, 0) &= f(x),\end{aligned}$$

con $0 < x \leq l$ y $t \geq 0$.

Esta ecuación describe el flujo del calor a lo largo de una barra o alambre suficientemente delgado, es decir, con un diámetro despreciable respecto a la longitud l y con una sección transversal constante. El material de la barra está caracterizado por poseer una difusividad térmica constante α . Para su solución se propone una función de la forma $u(x, t) = X(x)T(t)$, que al sustituir en la ecuación (2.1) conduce al siguiente sistema:

$$\begin{aligned}T'(t) - AT(t) &= 0, & (2.2) \\X''(x) - BX(x) &= 0,\end{aligned}$$

donde $B = \frac{A}{c^2}$ es una constante tal que $B \in \mathbb{C}$ y las condiciones iniciales son

$$\begin{aligned} T(0) &= f(x), \\ X(0) &= 0, \\ X(l) &= 0. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Aplicando los métodos de separación de variables, se verifica que

$$U_n(x, t) = \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right) e^{-\left(\frac{cn\pi^2}{l}\right)t},$$

representa el conjunto de soluciones particulares de (2.2). Para cada n , se cumplen las condiciones iniciales heredadas de las condiciones iniciales y de frontera de la ecuación parcial (2.1). Para llegar a la solución general, aplicamos el **principio de superposición**, el cual dice (ver [24] para detalles de este resultado):

Teorema 2.1 (Principio de superposición.). *Sean y_1, y_2, \dots, y_n soluciones de la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden en un intervalo I . Entonces la combinación lineal $Y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \dots + c_ny_n(x)$, donde $c_k = 1, 2, \dots, k$, también es solución de la ecuación diferencial en el intervalo.*

Del resultado anterior se obtiene que la solución general de la ecuación del calor unidimensional es

$$U(x, t) = \sum_{i=1}^n b_i \sin\left(\frac{\pi i}{l}x\right) e^{-\left(\frac{i^2\pi^2\alpha^2}{l^2}\right)t}.$$

Esta ecuación, junto con otros ejemplos clásicos, como la ecuación de onda y la ecuación de Laplace y la ecuación de Poisson, se conocen como **ecuaciones de la física matemática**. Para dar solución a estas ecuaciones, que serán mencionadas a lo largo del texto, es preciso recordar los siguientes resultados.

2.1. Puntos singulares, puntos regulares y la ecuación indicial

Consideremos la forma general de la ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \tag{2.4}$$

para la cual se analizará el comportamiento cerca a un punto x_0 , que depende del comportamiento de las funciones coeficientes $P(x)$ y $Q(x)$ cerca a dicho punto. Considerando dos posibilidades, P y Q son funciones analíticas, es decir, tienen un desarrollo en series de potencias en torno al punto x_0 , o no lo son, dando así una clasificación para x_0 en puntos singulares y puntos regulares, respectivamente.

Definición 2.2 (Puntos singulares y regulares). *Un punto x_0 , donde $P(x)$ o $Q(x)$ o ambas son no analíticas, se llama un punto singular de la ecuación diferencial, en caso contrario se llama un punto ordinario. Además, el punto x_0 , se llama singular regular si las funciones $(x - x_0)P(x)$ y $(x - x_0)^2Q(x)$ son analíticas. [10]*

Definición 2.3 (Ecuación indicial y raíces indiciales). *Sea $x = 0$ un punto singular regular de la ecuación diferencial*

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0, \tag{2.5}$$

con $p(x) = xP(x)$ y $q(x) = x^2Q(x)$ analíticas, es decir, $p(x) = xP(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$ y $q(x) = x^2Q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots$. Se le dice ecuación indicial de la ecuación diferencial (2.5), a la ecuación de la forma $m(m-1) + a_0m + b_0 = 0$, y a sus soluciones, se les llaman raíces indiciales. [10]

2.2. Método de Frobenius y solución de ecuaciones por series de potencias

En la teoría de ecuaciones diferenciales, el método de Frobenius es un procedimiento analítico para encontrar soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden en forma de series. Este método se aplica a ecuaciones de la forma (2.4), con $P(x)$ y $Q(x)$ funciones analíticas [23]. El método se basa en el teorema de Frobenius, que lleva su nombre en honor al matemático Ferdinand Georg Frobenius (1849-1917), quien realizó aportes importantes en el estudio de las funciones elípticas y las ecuaciones diferenciales (como veremos adelante), pero su trabajo más destacado se produjo en el campo del álgebra, donde inventó y aplicó el concepto de los caracteres de grupo y demostró el teorema de las posibles extensiones del sistema de números complejos [21].

Teorema 2.4 (Método de Frobenius). [23] *Si x_0 es un punto singular de la ecuación diferencial $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$, y m_1 y m_2 son sus raíces indiciales, entonces:*

1 *Si $m_1 - m_2 \neq 0$ o $m_1 - m_2 \in \mathbb{Z}$, la ecuación diferencial tiene dos soluciones de la forma:*

$$y = x^{m_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ con } a_0 \neq 0$$

$$y = x^{m_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \text{ con } b_0 \neq 0$$

2 *Si $m_1 = m_2 = m$ entonces existen dos soluciones de la forma:*

$$y = x^m \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ con } a_0 \neq 0$$

$$y = y_1 \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \text{ con } b_0 \neq 0$$

Donde estas series convergen para ciertos radios de convergencia.

Con las soluciones obtenidas por el teorema, y reemplazando en la ecuación diferencial a resolver, se encuentran los coeficientes de la serie, y con ellos la solución de la ecuación en una vecindad del punto singular x_0 .

2.3. Ecuación autoadjunta.

Consideremos el operador diferencial lineal de segundo orden L , con coeficientes complejos $a_0(x)$, $a_1(x)$ y $a_2(x)$, que actúa sobre alguna función $f(x)$, entonces $Lf(x) = a_2(x)D^2f(x) + a_1(x)Df(x) + a_0(x)f(x)$, es la aplicación del operador sobre la función. Definamos ahora, el operador autoadjunto \bar{L} por medio de la siguiente integral

$$\begin{aligned} (Lf, g) &= \int_a^b (Lf)^* g dx \\ &= \int_a^b g [a_2^* D^2 f^* + a_1^* Df^* + a_0^* f^*] dx. \end{aligned}$$

Con

$$\begin{aligned} hD^2 f^* &= hD(Df^*) \\ &= D(hDf^*) - DhDf^* \\ &= D(hDf^* - f^* Dh) + f^* D^2 h, \end{aligned}$$

donde $kDf^* = D(kf^*) - f^* Dk$. Si $h = a_2^* g$ y $k = a_1^* g$, y f^* es la función conjugada de f . Entonces se tiene que

$$(Lf, g) = \int_a^b f^* [D^2(a_2^*g) - D(a_1^*g) + a_0^*g] dx + [ga_2^*D^2f^* - f^*D(a_2^*g) + a_1^*gf^*]_a^b. \quad (2.6)$$

El corchete de la integral de la ecuación (2.6) define el auto-adjunto de L como:

$$\bar{L}() = D^2(a_2^*()) - D(a_1^*()) + a_0^*().$$

Entonces, el operador L es autoadjunto si y sólo si $Lf = \bar{L}f$, esto es si:

$$a_2\ddot{f} + a - 1\dot{f} + a_0f = a_2^*\ddot{f} + 2\dot{a}_2^*\dot{f} + \ddot{a}_2^*f - \dot{a}_1^*f - a_1^*\dot{f} + a_2^*\dot{f} + a_0^*f,$$

igualando los coeficientes de las derivadas de la función f del mismo orden, se obtienen las siguientes conexiones entre los coeficientes a_k , independientes de la forma específica de la función $f(x)$

$$a_2 = a_2^*, \quad (2.7)$$

$$a_1 = 2\dot{a}_2^* - a_1^*, \quad (2.8)$$

$$a_0 = \ddot{a}_2^* - \dot{a}_1^* + a_0^*. \quad (2.9)$$

Ahora consideremos por separado el caso real e imaginario:

? Para el caso real, $a_1 = \dot{a}_2$ y el operador toma la forma:

$$\begin{aligned} L() &= a_0() + a_1D() + a_2D^2() \\ &= a_0() + D(A_2D()). \end{aligned}$$

? Para el caso complejo, se pueden escribir a_0 y a_1 de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} a_0 &= \alpha_0 + i\beta_0, \\ a_1 &= \alpha_1 + i\beta_1, \end{aligned}$$

con $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1 \in \mathbb{R}$.

Por las ecuaciones (2.9) se tiene que $a_2 \in \mathbb{R}$, $a_0 = \alpha_0 + \frac{i}{2}\dot{\beta}_1$ y $a_1 = \dot{a}_2 + i\dot{\beta}_1$. Entonces

$$\begin{aligned} L() &= a_0() + a_1D() + a_2D^2() \\ &= \dot{a}_2D() + a_2D^2() + a_0 + i \left[\frac{\dot{\beta}_1}{2}() + \beta_1D() \right] \\ &= D(a_2D()) + i\sqrt{\beta_1}D(\sqrt{\beta_1}()) + a_0() \\ &= \bar{L}(). \end{aligned}$$

Haciendo $\sqrt{\beta_1} = c$ obtenemos entonces la forma general del operador autoadjunto de orden dos

$$L = D(a_2D()) + icD(c()) + a_0() = \bar{L}(),$$

donde a_2, c y a_0 son funciones reales de x .

Para poder hablar del operador autoadjunto de una ecuación diferencial se utiliza el siguiente teorema:

Teorema 2.5. *Dada una ecuación diferencial no homogénea de segundo orden con coeficientes reales, es posible convertirla en una ecuación autoadjunta [20].*

3. Funciones de la física matemática

3.1. Funciones de Bessel

La ecuación diferencial ordinaria

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \alpha^2) y = 0 \quad (3.1)$$

se conoce como **la ecuación de Bessel**, con α un número real o complejo, y sus soluciones se conocen como **funciones de Bessel** [7]. Esta ecuación se emplea para modelar la vibración de membranas circulares o esféricas, el flujo de calor en un cilindro, la propagación de corriente eléctrica en conductores cilíndricos, y en la solución de la ecuación de Schrödinger para una partícula en un pozo circular o esférico, entre otras [19].

Las funciones de Bessel aparecieron en 1730 en el trabajo de Daniel Bernoulli y Euler, sobre las oscilaciones de una cadena suspendida verticalmente, también aparecieron en el artículo de Euler de 1764, sobre las vibraciones de la cabeza de un tambor circular, y Fourier las utilizó en su tratado clásico del calor (1822) [6]. Sin embargo sus propiedades fueron estudiadas por primera vez en 1824, por el matemático y astrónomo alemán Friedrich W. Bessel, en un artículo sobre la perturbación de las órbitas planetarias [15].

Para dar la solución de la ecuación de Bessel e ilustrar sus aplicaciones, consideremos un ejemplo clásico, el problema de la transmisión del calor sobre una superficie con simetría cilíndrica o azimutal, donde la ecuación del calor queda expresada de la siguiente forma:

$$\alpha^2 \left[\frac{1}{r} (rU_r)_r + \frac{1}{r^2} U_{\theta\theta} + U_{zz} \right] = U_t. \quad (3.2)$$

Aplicando el método de separación de variables se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{aligned} T'(t) - AT(t) &= 0, \\ Z''(z) - CZ(z) &= 0, \\ \Theta''(\theta) - D\Theta(\theta) &= 0, \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$r^2 R''(r) + R'(r) + (C - B)r^2 R(r) + DR(r) = 0,$$

con A, B, C y D constantes, y la ecuación diferencial ordinaria en términos de r tiene la forma de la ecuación de Bessel. La ecuación en términos de r , tiene como ecuación indicial $m^2 - \alpha^2 = 0$, con raíces $m_1 = \alpha$ y $m_2 = -\alpha$, por el Teorema 2.4, para m_1 la ecuación admite por lo menos una solución de la forma

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\alpha}.$$

Reemplazando esta expresión y sus correspondientes derivadas en (3.1.) y encontrando mediante inducción los coeficientes a_i se obtiene que:

$$y_1 = a_0 x^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^{2n} n! (\alpha + 1) \dots (\alpha + n)}. \quad (3.4)$$

Haciendo $a_0 = \frac{1}{2^\alpha \alpha!}$ y $\alpha \in \mathbb{Z}$, la ecuación (3.4) se puede escribir en la forma

$$J_\alpha(x) = \frac{x^\alpha}{2^\alpha \alpha!} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^{2n} n! \prod (\alpha + n)}. \quad (3.5)$$

Esta ecuación se llama **Función de Bessel de primera clase de orden α** (ver Figura 1). Dado que $m_1 + m_2 = 2\alpha$ se tienen dos posibilidades:

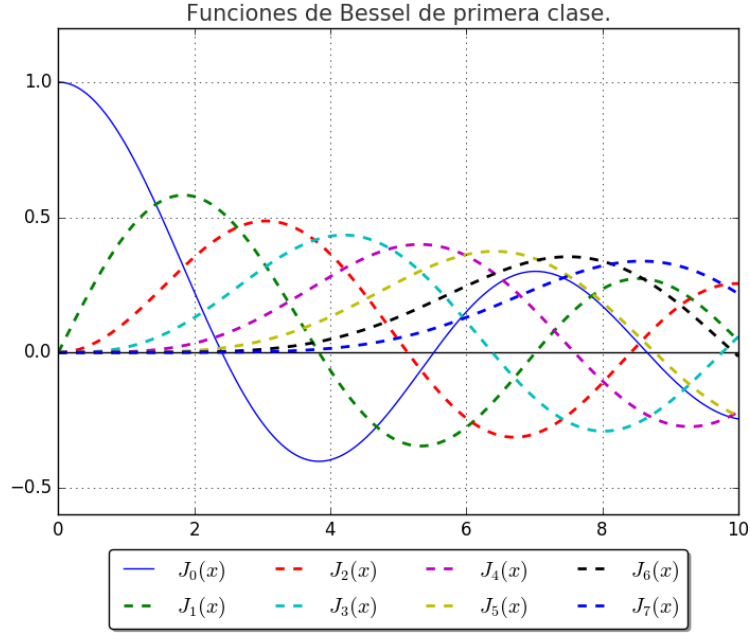


Figura 1: Funciones de Bessel de primera clase de orden $\alpha = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ y 7 .

- Si $\alpha \notin \mathbb{Z}$, por el mismo método se demuestra que existe otra solución:

$$J_{-\alpha}(x) = \frac{x^{-\alpha}}{2^{-\alpha}\alpha!} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^{2n}n! \prod(n-\alpha)}. \quad (3.6)$$

Como $J_{\alpha}(x)$ no está acotada y $J_{-\alpha}(x)$ si lo está, entonces son linealmente independientes, y por lo tanto la solución general por el principio de superposición es

$$Y = C_1 J_{\alpha}(x) + C_2 J_{-\alpha}(x). \quad (3.7)$$

Como el factorial se extiende a todos los números reales por medio de **la Función Gamma** (ver Figura 2) [12], definida como

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \quad (3.8)$$

tal que $\Gamma(n) = (n-1)!$. Finalmente, se tiene que las funciones de Bessel se escriben como

$$J_{\alpha}(x) = \frac{x^{\alpha}}{2^{\alpha}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^{2n}n! \Gamma((\alpha+n)+1)}, \quad (3.9)$$

$$J_{-\alpha}(x) = \frac{x^{-\alpha}}{2^{-\alpha}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^{2n}n! \Gamma((n-\alpha)+1)}. \quad (3.10)$$

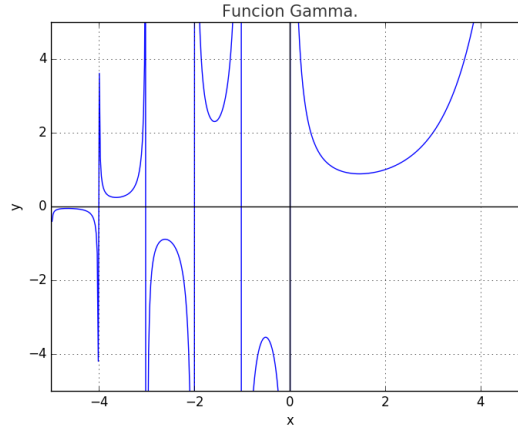


Figura 2: Función Gamma de Euler, introducida entre 1729 y 1730 por Euler. Tiene la propiedad de interpolar el factorial cada vez que el argumento de la función sea un entero.

- Si $\alpha \in \mathbb{Z}$, se demuestra con los mismos argumentos, que existe otra solución

$$Y_\alpha(x) = \frac{J_\alpha \cos(\alpha x) - J_{-\alpha}(x)}{\sin(\alpha x)}, \quad (3.11)$$

llamada **Función de Bessel de segunda clase de orden α** , con solución general (ver Figura 3)

$$Y = C_1 J_\alpha(x) + C_2 Y_\alpha(x). \quad (3.12)$$

Volviendo al sistema de ecuaciones (3.3), la solución general de la ecuación (3.1) será una combinación lineal de las soluciones generales de cada ecuación del sistema, es decir, una combinación lineal de series de Fourier y funciones de Bessel.

Ahora, de acuerdo a la teoría de operadores autoadjuntos, de la ecuación de Bessel se tiene que $a_2 = x^2$ y $a_1 = x$, es decir, $\dot{a}_2 \neq a_1$, entonces (3.1) no es una ecuación autoadjunta. Pero, si se divide la expresión (3.1) entre x , se obtiene:

$$xy'' + y' + \frac{(x^2 - \alpha^2)}{x}y = 0,$$

que es la forma autoadjunta de la ecuación de Bessel.

3.2. Funciones de Legendre

Adrien Marie Legendre fue un matemático francés, nació el 18 de septiembre de 1752 y murió el 20 de enero de 1833. Recibió su educación en el Collège Mazarin en París y defendió su tesis de física y matemáticas en 1770 [11]. Hizo aportes importantes en diferentes áreas de la matemática: en mecánica celeste desarrolló el método de mínimos cuadrados, en mecánica clásica desarrolló la transformada de Legendre, la cual es utilizada como un puente entre la formulación lagrangiana a la formulación hamiltoniana. En aritmética completó la demostración del teorema de Fermat para $n = 5$, desarrolló la ley de reciprocidad cuadrática y la conjetura sobre el teorema de los números primos. En análisis trabajó en las funciones e integrales elípticas; y estudiando la fuerza de atracción para ciertos sólidos en revolución, aparecieron por primera vez, los polinomios que llevan su nombre.

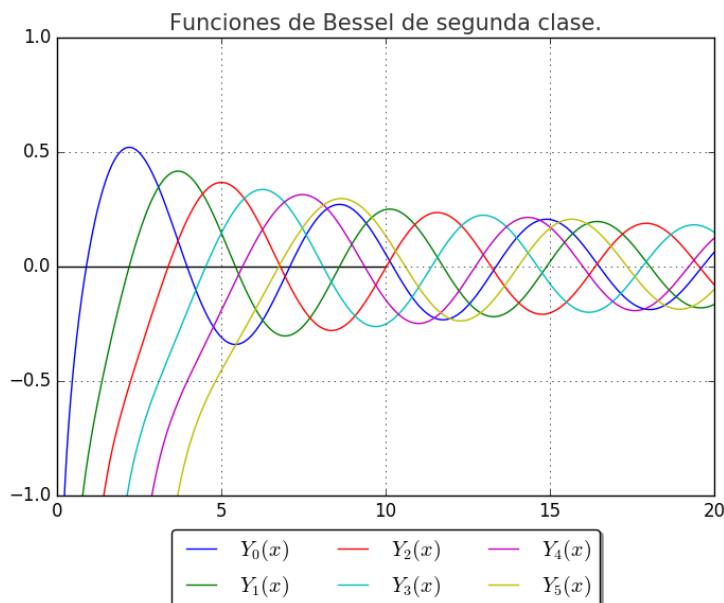


Figura 3: Funciones de Bessel de segunda clase de orden $\alpha = 0, 1, 2, 3, 4$, y 5 .

Los polinomios de Legendre se utilizan con frecuencia en aplicaciones de física e ingeniería, especialmente en los problemas que involucran simetría esférica, sobre todo, en problemas propios de mecánica cuántica donde la cuantización del momento angular es consecuencia directa del uso de coordenadas esféricas, para resolver las ecuaciones que describen la parte angular $\Psi(\theta, \varphi)$ de una función de onda Ψ . Además, con ellos es posible dar una definición de los armónicos esféricos [2]. Como se hizo para el caso de las funciones de Bessel, consideremos la ecuación

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + p(p + 1)y = 0, \quad (3.13)$$

llamada **ecuación de Legendre** [21]. Esta ecuación tiene puntos singulares en $x = \pm 1$, los cuales además son puntos singulares regulares. Estudiaremos la solución para los valores en el intervalo $(-1, 1)$ y luego la estudiaremos para $x = \pm 1$.

- Como $x = 0$ es un punto ordinario, aplicando el Teorema (2.4) en una vecindad del punto se tendrá una solución en serie de potencias de la forma

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

que al ser reemplazada en (3.13) conduce a

$$\sum_{n=0}^{\infty} [a_{n+2}(n+1)(n+2) - n(n-1)a_n - 2na_n + p(p+1)a_n] x^n = 0,$$

lo cual se cumple cuando

$$a_{n+2}(n+1)(n+2) + [(p+n+1)(p-n)] a_n = 0.$$

Analizando la fórmula de recurrencia para la expresión anterior se obtiene que:

$$y(x) = \left[1 - \frac{p(p+1)}{2!}x^2 + \frac{p(p-2)(p+1)(p+3)}{4!}x^4 + \dots \right] a_0 + \quad (3.14)$$

$$\left[x - \frac{(p-1)(p+2)}{3!}x^3 + \frac{(p-1)(p-3)(p+2)(p+4)}{5!}x^5 + \dots \right] a_1,$$

es la solución general de la ecuación de Legendre, para la cual se demuestra que tiene radio de convergencia $R = 1$. Las series que solucionan la ecuación (3.13) se conocen como **funciones de Legendre**. Un hecho interesante es que si $p > 0$ para $p \in \mathbb{Z}$, una de las series es finita y se convierte en un polinomio. Cuando esto ocurre, a estas soluciones particulares se les llama **Polinomios de Legendre** (ver Figura 5).

- Por razones prácticas las soluciones que más interesan son aquellas que están cerca del punto singular $x = 1$. Para analizar dichas soluciones hacemos la sustitución $t = \frac{t-x}{2}$, donde $x = 1$ corresponde a $t = 0$ y la ecuación de Legendre se reescribe en la forma

$$t(1-t)y'' + (1-2t)y' + n(n+1) = 0, \quad (3.15)$$

donde la prima en los superíndices indica derivación respecto al tiempo, y $n \in \mathbb{Z}$ es constante. Esta es la forma de la ecuación hipergeométrica de Gauss, de la cual hablaremos más adelante y que admite una solución de la forma $F(-n, n+1, 1, t)$. Con esta solución y algunas manipulaciones algebraicas se demuestra que el n -ésimo **polinomio de Legendre** esta dado por

$$p_n(x) = 1 + \frac{n(n+1)}{1!2} (x-1) + \frac{n(n+1)(n+1)(n+2)}{2!2^2} (x-1)^2 + \dots + \quad (3.16)$$

$$\frac{(2n)!}{n!} (x-1)^n.$$

Ahora, como $P_n(x)$ toma potencias pares o impares se obtiene que

$$P_n(x) = \frac{(2n)!}{n!2^n} \left[x^n - \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} + \dots + \right. \quad (3.17)$$

$$\left. \frac{(-1)^p n(n-1)\dots(n-2p+1)}{2^p(p!(2n-1)(2n-3)\dots(2n-2p+1)} x^{n-2p} + \dots \right], \quad (3.18)$$

aplicando las propiedades del factorial y los coeficientes notables, la expresión anterior se reescribe como

$$P_n(x) = \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^p (2n-2p)!}{2^n p! (n-p)! (n-2p)!} x^{n-2p},$$

$$= \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^p}{2^n p! (n-p)!} \frac{d^n}{dx^n} x^{2n-2p},$$

$$= \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{n!}{p! (n-p)!} (-1)^p x^{n-p},$$

$$= \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{k} (-1)^p x^{n-p},$$

donde $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ representa el entero menor o igual que n . Finalmente aplicando el teorema del binomio de Newton se obtiene

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n. \quad (3.19)$$

Este polinomio se conoce como **fórmula de Rodrigues** para los polinomios de Legendre [5], los cuales aparecen representados en la Figura 4.

Aplicando los elementos mencionados sobre la teoría de operadores del capítulo anterior, para (3.13) se tiene que $a_2 = 1 - x^2$, $a_1 = -2x$ y $a_0 = p(p+1)$, como se cumple que $a_2 = a_1$, el operador $L = (1 - x^2)D^2 - 2xD + p(p+1)$ asociado a la ecuación de Legendre es un operador autoadjunto, por lo tanto la ecuación que lleva el mismo nombre es autoadjunta.

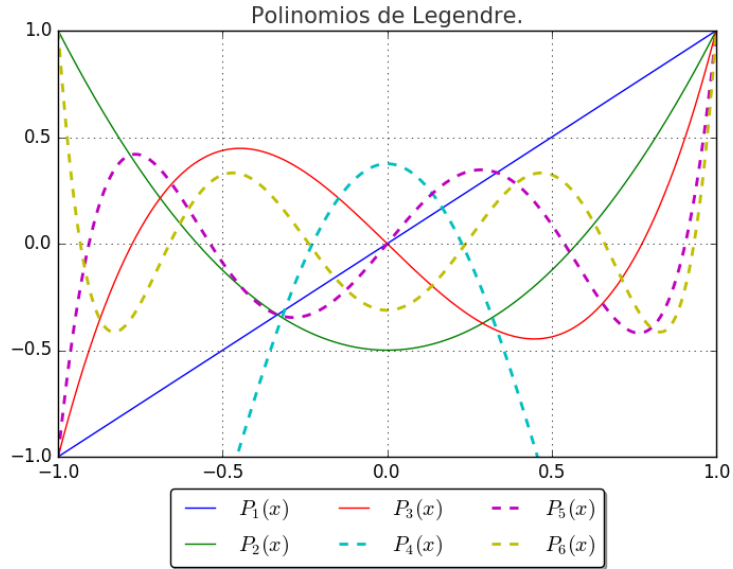


Figura 4: Polinomios de Legendre para $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

3.3. Función asociada de Legendre

Recordemos que la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas toma la forma [18]:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\sin \phi \frac{\partial U}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \phi} \frac{\partial U}{\partial \theta} = 0, \quad (3.20)$$

la cual, es una ecuación diferencial parcial de segundo orden de tipo elíptico, y recibe su nombre en honor al matemático y físico Pierre-Simon Laplace. Utilizando la identidad

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rU),$$

la expresión (3.20) puede escribirse como:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rU) + \frac{1}{r^2 \sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\sin \phi \frac{\partial U}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \phi} \frac{\partial U}{\partial \theta} = 0. \quad (3.21)$$

la solución de (3.21) se puede encontrar aplicando el método de separación de variables, esto es, se supone la existencia de una solución de la forma

$$U(r, \theta, \phi) = \frac{R(r)}{r} \theta(\theta) \Phi(\phi), \quad (3.22)$$

con la cual, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\begin{aligned} r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} - CR &= 0, \\ \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + m^2 &= 0, \\ \sin \theta \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \Theta C \sin^2 \theta - m^2 \Theta &= 0. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Nos interesa la última ecuación del sistema anterior. Mediante la sustitución $x = \cos \theta$, se obtiene la ecuación conocida como la **ecuación asociada de Legendre**

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dX}{dx} \right] + X \left(C - \frac{m^2}{1-x^2} \right) = 0, \quad (3.24)$$

donde $C = l[l+1]$, y $l, m \in \mathbb{R}$. Para dar solución a la ecuación (3.24) utilizaremos la ecuación (3.13) donde $y = P_n(x)$, derivando m veces y utilizando la fórmula de Leibniz para la derivación de un producto, se tiene

$$\frac{d^m}{dx^m} (fg) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{m!}{(m-i)!i!} \frac{d^{m-i}}{dx^{m-i}} f \frac{d^i g}{dx^i},$$

con $f = \frac{d^2 y}{x^2}$, $g = 1 - x^2$ y repitiendo para $f = \frac{dy}{dx}$ y $g = x$ se obtiene:

$$(1-x^2) \frac{d^{m+2} y}{dx^{m+2}} - 2x(m+1) \frac{d^{m+1} y}{dx^{m+1}} + [p(p+1) - m(m+1)] \frac{d^m y}{dx^m} = 0.$$

Si hacemos

$$u = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m y}{dx^m}, \quad (3.25)$$

se obtiene

$$(1-x^2)\ddot{u} - 2xi + \left[p(p+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] u = 0, \quad (3.26)$$

que es la ecuación asociada de Legendre, cuya solución denotamos como $P_l^m(x)$. Por lo tanto, de (3.25) y (3.26) se tiene

$$P_l^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x), \quad (3.27)$$

que se conocen como **las funciones asociadas de Legendre** (ver Figura 5)

Finalmente de la teoría de operadores autoadjuntos (recordar (3.24)) tenemos que $a_2 = (1-x^2)$, $a_1 = -2x$ y $a_0 = \left[p(p+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right]$. Como se cumple que $\dot{a}_2 = a_1$, la ecuación asociada de Legendre es una ecuación autoadjunta.

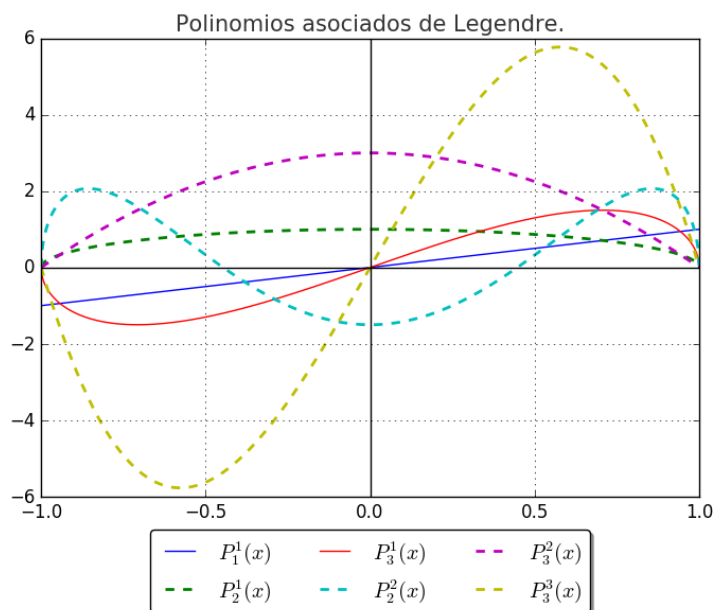


Figura 5: Polinomios asociados de Legendre para $m = 1, 2, 3$ y $n = 1, 2, 3$.

3.4. Función hipergeométrica

En 1799 aparecieron por primera vez las series hipergeométricas en la disertación doctoral hecha por Gauss, "*Nueva prueba al teorema de que toda función algebraica racional entera en una variable se puede resolver en factores reales de primer o segundo grado*". La primera parte de su trabajo consistió en una serie de análisis y refutaciones críticas de los intentos fallidos para probar el Teorema. En la segunda parte, Gauss buscaba las implicaciones físicas de la $\sqrt{-1}$, y encontró un dominio superior de funciones trascendentales, capaz de generar todas las relaciones que se encuentran en las funciones algebraicas [9].

Gauss menciona de nuevo estas series en la refutación sobre la prueba del Teorema Fundamental del Álgebra hecha por D'Alambert, quien se vale del argumento de que el método de Newton para llegar a una solución numérica para las raíces de una ecuación algebraica usando series infinitas convergentes se puede aplicar, no solo en casos en los que se buscan raíces reales, sino también en casos donde las raíces toman la forma $a + bi$. Gauss señala que D'Alambert ignora la posibilidad que series infinitas pudieran aparecer en tales casos, con lo cual, las series serían divergentes [9].

El 30 de enero de 1812, Gauss presentó un ensayo a la Real Sociedad de Ciencias de Göttingen en el que revela su trabajo sobre funciones trascendentales, demostrando que no sólo muchas funciones trascendentales simples, sino también funciones superiores, pueden representarse mediante series hipergeométricas. Además, en su *Theoria Motus* de 1809 aparecen estas series para desarrollar lo que él consideró como el método más conveniente para resolver el problema de la determinación de la órbita de Ceres [9].

Riemann también trabajó sobre la ecuación hipergeométrica [17]. Él estaba interesado en la solución de una ecuación diferencial lineal de coeficientes algebraicos desde el punto de vista conceptual. Para ello propone como solución una función de variable compleja, de la cual, estudia sus propiedades y comportamiento basándose en las pautas introducidas en su tesis de 1851 titulada "*¿Qué propiedades debe tener una función para ser solución de una ecuación diferencial? ¿puedo caracterizar dichas funciones por medio de estas propiedades?*".

En la memoria *Contribución a la teoría de las funciones representadas por series de Gauss* presentada a la real Sociedad de Ciencias de Gotinga a principios de 1857, Riemann hizo una revisión completa de las ideas de Gauss para luego presentarlas desde su punto de vista. La ecuación diferencial que estudia en la memoria es:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 s}{dz^2} + \left(\frac{1 - \alpha - \alpha'}{z - a} + \frac{1 - \beta - \beta'}{z - b} + \frac{1 - \gamma - \gamma'}{z - c} \right) \frac{dw}{dz} \\ + \left(\frac{\alpha\alpha'(a-b)(a-c)}{z-a} + \frac{\beta\beta'(b-c)(b-a)}{z-b} \right) \frac{w}{(z-a)(z-b)(z-c)} \\ + \left(\frac{\gamma\gamma'(c-a)(c-b)}{z-c} \right) \frac{w}{(z-a)(z-b)(z-c)} = 0, \end{aligned} \quad (3.28)$$

con la condición de que $\alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma + \gamma' = 1$. Como solución designa un conjunto de funciones (P-funciones) en términos de $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma, z$ y $\alpha'\beta'\gamma'$, con las siguientes propiedades:

- 1 Cada P-función tiene singularidades para los valores a, b y c .
- 2 Tres cualesquiera P-funciones P', P'' y P''' son linealmente independientes.
- 3 Las funciones se pueden escribir como

$$\begin{aligned} P &= C_\alpha P_\alpha + C_{\alpha'} P_{\alpha'}, \\ P &= C_\beta P_\beta + C_{\beta'} P_{\beta'}, \\ P &= C_\gamma P_\gamma + C_{\gamma'} P_{\gamma'}, \end{aligned}$$

donde los coeficientes son constantes, tales que para $z = a$, $P_\alpha(z-a)^\alpha$ y $P_{\alpha'}(z-a)^{\alpha'}$ sean holomorfas y no nulas.

De esta forma la ecuación hipergeométrica se reduce a $a = 0, b = \infty$ y $c = 1$. El camino que Riemann tomó para el estudio de las ecuaciones fue desde la variable compleja e hizo que el trabajo se enfocara en el estudio de las ramificaciones, ya que es en este punto, donde la función pasa de una hoja a otra en la superficies de Riemann, además por ser una función compleja es en ocasiones multivaluada y el dominio es una superficie.

Riemann encontró que al trabajar en variable compleja la función $F(a, b, c, x)$, no es necesario conocer la ecuación de la cual es solución, para estudiar el comportamiento sobre los puntos singulares. Con dos soluciones particulares linealmente independientes y estudiando los valores de x , al recorrer caminos cerrados que rodean los tres puntos singulares, es posible conocer como la solución general de la ecuación diferencial se comporta cerca de estos puntos. De esta forma Riemann estudió las transformaciones que generan dos soluciones independientes y_1, y_2 y su comportamiento en los puntos singulares. Estas transformaciones genera un grupo llamado grupo de monodromía; estudiando este grupo se pueden tener conclusiones sobre las características de la solución de la ecuación diferencial, sin mostrar de forma específica la ecuación y sin especificar una P concreta [17].

Las funciones hipergeométricas forman una vasta familia de funciones que incluye entre otras a las funciones de Bessel, la función Gamma incompleta, la función error, integrales elípticas y polinomios ortogonales. El que esto sea así, se debe a que las funciones hipergeométricas son soluciones de una clase muy general de ecuación diferencial ordinaria de segundo orden, conocida como **ecuaciones diferenciales hipergeométricas**[22], que tiene la siguiente forma

$$x(x-1)y'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]y' + \alpha\beta y = 0, \quad (3.29)$$

con $x \in \mathbb{R}$ y α, β y γ parámetros reales. Aplicando el teorema (2.4) se obtiene

$$(x - x^2) \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i(p+i)(p+i-1)x^{p+i-2} + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x] \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i(p+i)x^{p+i-1} - \alpha\beta \sum_{i=0}^{\infty} x^{p+i} = 0. \quad (3.30)$$

El mayor exponente de x para este desarrollo es $p-1$ y el coeficiente de x^{p-1} es $p(p-1)\alpha_0 + \gamma p\alpha_0$, el cual es igual a cero. Ahora, sin pérdida de generalidad se toma $\alpha_0 \neq 0$ y se obtiene la siguiente ecuación cuadrática para p ,

$$p(p-1+\gamma) = 0$$

con raíces $p_1 = 0$ y $p_2 = 1 - \gamma$. Resolviendo para cada uno de estos casos se tiene:

? Para $p = 0$, y sustituyendo en cada derivada se obtiene $\gamma\alpha_1 - \alpha\beta\alpha_0 = 0$. Si $\gamma \neq 0$ al hallar los coeficientes se tiene la serie

$$1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma} + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{2\gamma(\gamma+1)}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n)\beta(\beta+1)\dots(\beta+n)}{2\dots(n+1)\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n)}x^{n+1} + \dots \quad (3.31)$$

Esta es una solución particular de la ecuación (3.29), llamada **serie hipergeométrica** (Ver Figura 6) y se denota como $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$.

Dado que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = |x| < 1,$$

la serie converge en el intervalo $|x| < 1$.

? Para $p = 1 - \gamma$ por medio de la siguiente sustitución $y = x^{1-\gamma}w$ en la ecuación (3.29) y simplificando, se obtiene

$$x(1-x)w'' + [2 - \gamma - (\alpha + \beta - 2\gamma + 3)x]w' - (\alpha + 1 - \gamma)(\beta + 1 - \gamma)w = 0, \quad (3.32)$$

que es la ecuación diferencial hipergeométrica en los parámetros $\alpha + 1 - \gamma, \beta + 1 - \gamma$ y $2 - \gamma$. Si $a_0 = 1$ su solución en serie es

$$y = x^{1-\gamma}F(\alpha + 1, \beta + 1 - \gamma, 2 - \gamma; x), \quad (3.33)$$

con $2 - \gamma > 0$.

Por lo tanto, la ecuación hipergeométrica de Gauss tiene dos soluciones

$$y_1 = F(\alpha, \beta, \gamma; x) \quad (3.34)$$

y

$$y_2 = x^{1-\gamma}F(\alpha + 1, \beta + 1 - \gamma, 2 - \gamma; x). \quad (3.35)$$

Las funciones (3.34) y (3.35) son llamadas **funciones hipergeométricas** y forman un conjunto fundamental de soluciones.

Ahora, teniendo en cuenta que un operador es autoadjunto, si $\hat{a}_2 = a_1$. Para (3.29) se tiene que: $a_2 = x(x-1)$, es decir, $\hat{a}_2 = 2x-1$, y $a_1 = \gamma - (\alpha + \beta + 1)x$. Entonces, el operador de la forma $L = x(x-1)D^2 + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]D + \alpha\beta$ no es auto adjunto, y la ecuación (3.29) tampoco es autoadjunta, excepto en el caso en el que $\alpha + \beta = -3$ y $\gamma = -1$.

3.5. Función hipergeométrica confluyente

La **función hipergeométrica confluyente** o función de Kummer de primer tipo (ver Figura 6) se define por medio de la serie

$$F(\alpha, \gamma, z) = 1 + \frac{\alpha}{1! \gamma} z + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)2!} z^2 + \dots \quad (3.36)$$

que converge para cualquier valor finito de z y $\gamma > 0$. Para $\alpha \leq 0$ la función se reduce al polinomio de grado $|\alpha|$.

Esta función satisface la ecuación diferencial ordinaria de orden dos

$$zy'' + (\gamma - z)y' - \alpha y = 0. \quad (3.37)$$

Para el caso de la ecuación hipergeométrica confluyente (3.37), y teniendo en cuenta que $a_2 = z$ y $a_1 = \gamma - z$, y que no cumple la igualdad $a_2 = a_1$, entonces se concluye que la ecuación (3.37) es autoadjunta sólo para el caso en el que $\gamma + z = 1$ [25].

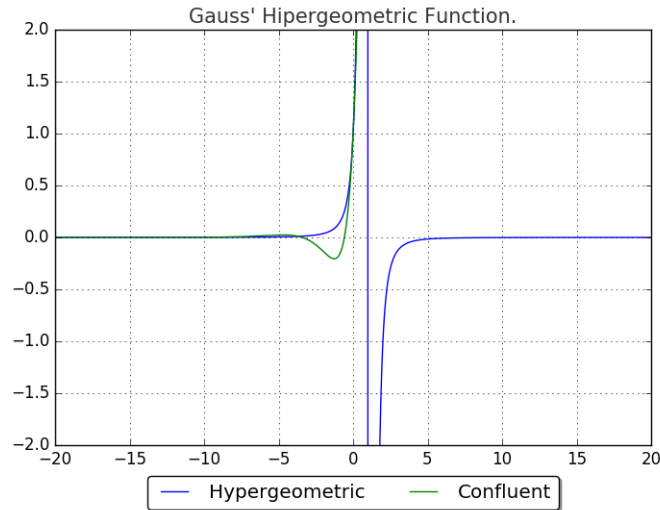


Figura 6: Función hipergeométrica y función hipergeométrica confluyente, para $\alpha = 3$, $\beta = 1$ y $\gamma = 1$.

3.6. Función de Gegenbauer

Leopold Gegenbauer nació el 2 de febrero de 1849 en Asperhofen, Austria y murió el 3 junio de 1903 en Vienna, Austria. Estudió en la Universidad de Viena entre 1869 y 1873, y luego fue a Berlín, donde estudió desde 1873 hasta 1875 bajo la guía de Weierstrass y Kronecker. Después de graduarse de Berlín, Gegenbauer fue nombrado profesor en la Universidad de Czernowitz (que actualmente es Chernovtsi, Ucrania) en 1875. Luego se trasladó a la Universidad de Innsbruck, donde fue nombrado profesor titular. Más tarde, en 1893 fue nombrado profesor titular en la Universidad de Viena, donde permaneció hasta su muerte [4].

Gegenbauer fue un algebrista, con interés en la teoría de números, la teoría de funciones y la teoría de la integración. Es recordado por los polinomios que llevan su nombre, que son una clase de polinomios ortogonales, que introdujo en su tesis doctoral de 1875, así como en muchos otros artículos. Los polinomios de Gegenbauer se obtienen a partir de la serie

hipergeométrica para los casos donde esta, es finita, además, son solución de la ecuación diferencial de Gegenbauer, y una generalización de los polinomios de Legendre [13].

Dado que estos polinomios son un caso particular de la ecuación hipergeométrica

$$z(1-z)y'' + [1 + \alpha - (\alpha + \beta + 1)z]y' + n(n + \alpha + \beta + 1)y = 0, \quad (3.38)$$

consideremos la sustitución $z = \frac{1-x}{2}$, con lo cual, se obtiene **la ecuación de Jacobi**

$$(1-x^2)y'' + [\beta\alpha - (\alpha + \beta + 2)x]y' + n(n + \alpha\beta + 1)y = 0, \quad (3.39)$$

que tiene como solución

$$P_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{\Gamma(\alpha + n + 1)}{\Gamma(\alpha + 1)n!} F\left(-n, n + \alpha + \beta + 1, \alpha + 1, \frac{1-x}{2}\right). \quad (3.40)$$

Si en la ecuación (3.39) se consideran $\alpha = \beta = \lambda - \frac{1}{2}$, obtenemos **la ecuación de Gegenbauer** [20]

$$(1-x^2)y'' + [(2\lambda + 1)x]y' + n(n + 2\lambda)y = 0, \quad (3.41)$$

cuyas soluciones se denominan **polinomios de Gegenbauer** o **funciones ultrasféricas** (ver Figuras 7 y 8), y tienen la forma

$$C_n^\lambda(x) = \frac{\Gamma(2\lambda + n)}{\Gamma(2\lambda)n!} F\left(-n, n + 2\lambda, \lambda + \frac{1}{2}, \frac{1-x}{2}\right). \quad (3.42)$$

Si $\lambda = 1/2$ se generan los polinomios de Legendre, y si $\lambda = 0$ y $\lambda = 1$, se generan los polinomios de Chebyshev (ver Figura 9).

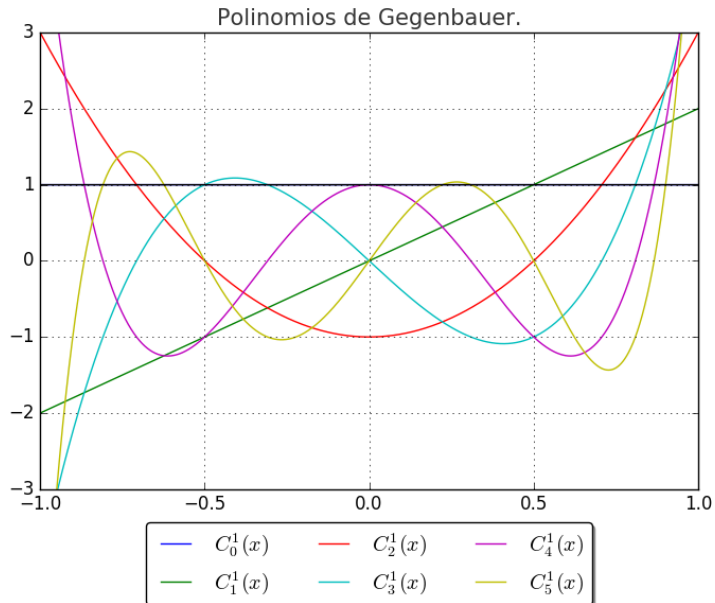


Figura 7: Polinomios de Gegenbauer para $\alpha = 1$ y $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

Ahora, recordando la teoría de operadores, de la ecuación (3.41) se tiene que $a_2 = 1 - x^2$, $a_2 = -2x$ y $a_1 = -(\alpha + \beta + 2)x$. Por lo tanto el operador que genera dicha ecuación es autoadjunto para el caso en el que $\alpha + \beta = 0$, $\alpha = -\beta$.

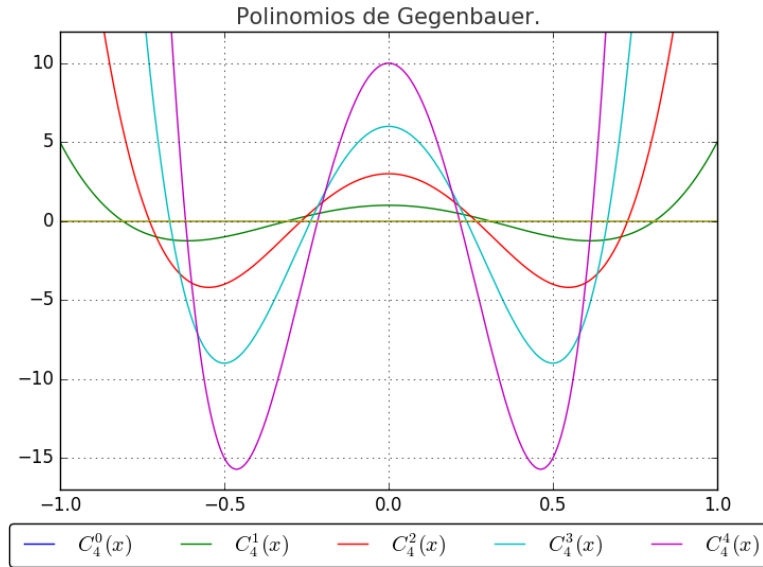


Figura 8: Polinomios de Gegenbauer para $n = 4$ y $\alpha = 0, 1, 2, 3, 4$.

3.7. Función de chebyshev I y II

Pafnuti Lvóvich Chebyshev fue un matemático ruso, nació el 16 de mayo de 1821 y murió el 26 de noviembre de 1894 en San Petersburgo. Su principal contribución en matemáticas es la desigualdad que lleva su nombre [8] la cual dice que:

Definición 3.1. Sea X una variable aleatoria no negativa y $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ una función creciente para la cual se cumple que $\mathbb{E}[f(X)] < \infty$. Entonces, para todo $x \in \mathbb{R}$ se da la siguiente desigualdad

$$f(x) \cdot \mathbb{P}(X \geq x) \leq \mathbb{E}[f(X)],$$

es decir, que la probabilidad del valor de una variable aleatoria con varianza finita está acotada por su valor esperado.

Dentro de sus trabajos se encuentran los polinomios que llevan su nombre, estos polinomios son una familia de polinomios ortogonales que están relacionados con la fórmula de De Moivre y son definidos de forma recursiva. **Los polinomios de Chebyshev**, como se conocen, son importantes en la teoría de la aproximación, ya que sus raíces de primer tipo o nodos de Chebyshev, son usadas como nodos en interpolación polinómica, minimizando, por ejemplo, el problema del fenómeno de Runge, generando de esta forma la aproximación del polinomio, como una función continua bajo la norma maximal [8].

En el estudio de ecuaciones diferenciales, los polinomios de Chebyshev, surgen como la solución de **las ecuaciones diferenciales de Chebyshev**

$$(1 - x^2)y'' - xy' + p^2y = 0, \quad (3.43)$$

y

$$(1 - x^2)y'' - 3xy' + p(p + 2)y = 0, \quad (3.44)$$

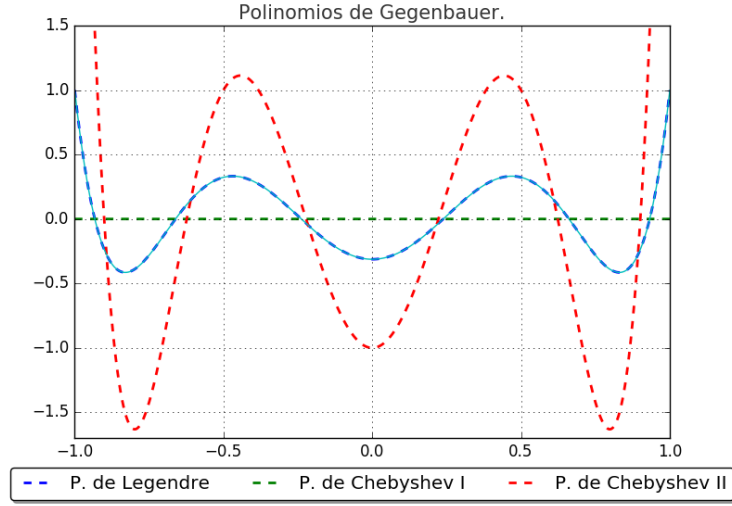


Figura 9: Polinomios de Gegenbauer para $\alpha = 0$ y $\alpha = 1$ (Polinomios de Chebyshev), y $\alpha = \frac{1}{2}$ (Polinomio de Legendre).

con p una constante no negativa. Estas ecuaciones son casos particulares de la ecuación diferencial de Sturm-Liouville. Para dar su solución, la ecuación (3.43) se transforma en una ecuación hipergeométrica con la sustitución $t = \frac{1}{2(1-x)}$, así

$$y = c_1 F\left(p, -p, \frac{1}{2}, \frac{1-x}{2}\right) + c_2 \left(\frac{1-x}{2}\right)^{\frac{1}{2}} F\left(p + \frac{1}{2}, -p + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1-x}{2}\right). \quad (3.45)$$

Se definen los polinomios de Chebyshev con respecto a la función hipergeométrica de la forma siguiente

$$T_n(x) = F\left(n, -n, \frac{1}{2}, \frac{1-x}{2}\right).$$

Partiendo del hecho que n es un entero no negativo, y recordando la fórmula de Moivre, la cual afirma que

$$\begin{aligned} \cos(n\theta) + i \sin(n\theta) &= (\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n \\ &= \cos^n(\theta) + \cos^{n-1}(\theta) i \sin(\theta) + \\ &\quad \frac{n(n-1)}{2} \cos^{n-2}(\theta) (i \sin(\theta))^2 + \dots + (i \sin(\theta))^n, \end{aligned} \quad (3.46)$$

se define así el n -ésimo polinomio de Chebyshev $T_n(x)$, como el polinomio para el cual se cumple que $\cos(n\theta) = T_n(\cos(\theta))$. Ahora, si se restringe x al intervalo $[-1, 1]$ y se considera $x = \cos(\theta)$, con $0 \leq \theta \leq \pi$, se tiene que $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$. Con estas mismas restricciones y aplicando (3.46), junto con el binomio de Newton, se obtiene

$$T_n(x) = \frac{1}{2} \left[(x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n \right] \quad (3.47)$$

y

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{n!}{(2k)!(n-2k)!} x^{n-2k} (x^2 - 1)^k. \quad (3.48)$$

Ahora bien, $y = \cos(n\theta)$ es solución de la ecuación $\frac{d^2y}{d\theta^2} + n^2y = 0$ y sustituyendo θ por x , se obtiene la ecuación (3.43), con $p = n$. Por lo tanto, $y = T_n(x)$ es solución de (3.43), pero esta solución tiene la forma de una serie hipergeométrica, más exactamente la forma $F\left(n, -n, \frac{1}{2}, \frac{1-x}{2}\right)$, y como por (3.47) se tiene que $T_n(1) = 1$ para todo n , y $F\left(n, -n, \frac{1}{2}, \frac{1-x}{2}\right) = c$, se concluye que:

$$T_n(x) = F\left(n, -n, \frac{1}{2}, \frac{1-x}{2}\right).$$

Usando la función generatriz de los polinomios de Chebyshev

$$\frac{1}{(1-2xt+t^2)^\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^\alpha(x)t^n, \quad (3.49)$$

para $|x| < 1$ y $|t| < 1$, definida como **la función generatriz de las funciones ultra esféricas o polinomios de Gegenbauer**, cuando $\alpha = 1$ y $\alpha = 0$. Ahora bien, podemos clasificar los polinomios en dos tipos:

Tipo I: Cuando $\alpha = 0$, se reduce la función generatriz a la constante 1. Para ver esto, se deriva (3.49) una vez con respecto a t , es decir,

$$\frac{x-t}{(1-2xt+t^2)^{\alpha+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2} \frac{C_n^\alpha(x)}{\alpha} t^n. \quad (3.50)$$

Y sea $C_n^0(x) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{C_n^\alpha(x)}{\alpha}$, multiplicando (3.50) por $2t$ y sumándole

$$1 = \frac{1-2xt+t^2}{1-2xt+t^2},$$

se obtiene

$$\frac{1-t^2}{(1-2xt+t^2)^{\alpha+1}} = 1 + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2} C_n^0(x)t^n. \quad (3.51)$$

Ahora definamos $T_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ \frac{n}{2} C_n^0(x) & \text{si } n > 0 \end{cases}$, sustituyendo $\alpha = 0$ en la función generatriz se obtiene

$$\frac{1-t^2}{(1-2xt+t^2)^{\alpha+1}} = T_0(x) + 2 \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x)t^n, \quad (3.52)$$

para $|x| \leq 1$ y $|x| < 1$ (Figura 10).

Tipo II Con $\alpha = 1$, $C_n^\alpha(x) = U_n(x)$, la ecuación (3.49) da como solución

$$\frac{1}{(1-2xt+t^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x)t^n, \quad (3.53)$$

conocida como **los polinomios de Chebyshev de segundo tipo** (ver Figura 11).

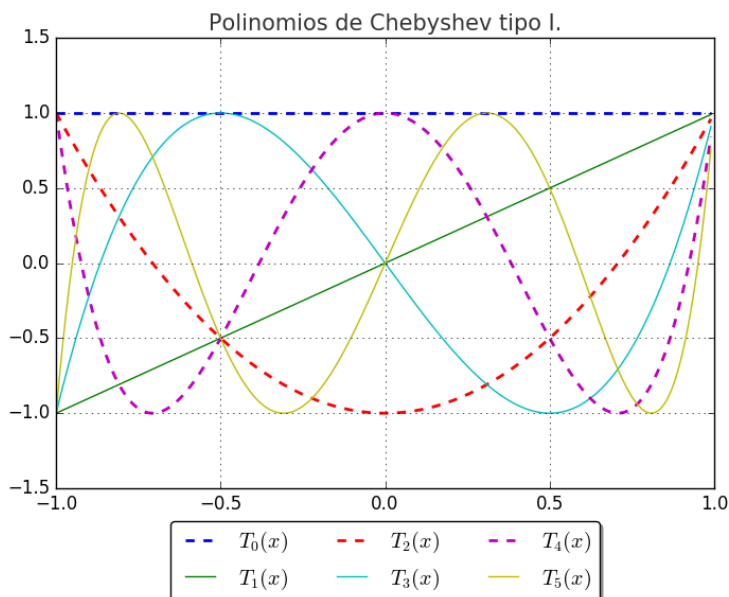


Figura 10: Polinomios de Chebyshev Tipo I, para $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

De la teoría de operadores para la ecuación (3.43) se tiene que $a_2 = 1 - x^2$, $a_1 = x$ y $a_0 = -2x$, entonces la ecuación no es autoadjunta. Pero es posible construir el operador autoadjunto, que genera una ecuación diferencial de la forma

$$\frac{d}{dx} \left((1 - x^2)^{\frac{1}{2}} y' \right) + \frac{n^2 y}{(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}} = 0, \quad (3.54)$$

la cual es autoadjunta.

3.8. Función de Laguerre

Edmond Nicolas Laguerre nació el 9 de abril de 1834 y murió el 14 de agosto de 1886. Fue un matemático francés, conocido principalmente por la introducción de los polinomios que llevan su nombre y de los cuales se hablará en esta sección. Comenzó sus estudios en la École Polytechnique. Realizó su carrera militar entre 1854 y 1864 como oficial de artillería. Luego fue tutor de la École polytechnique. Gracias al apoyo de Joseph Bertrand, obtiene la cátedra de física matemática en el Colegio de Francia en 1883, y se convierte en miembro de la Academia de Ciencias en 1885. Laguerre publicó más de 140 artículos sobre los diferentes aspectos de la geometría y del análisis. Sus obras completas fueron publicadas en diez volúmenes entre 1898 y 1905 por encargo de Charles Hermite, Henri Poincaré y Eugène Rouché [14].

Los polinomios de Laguerre son una familia de polinomios ortogonales, los cuales surgen como soluciones de **La ecuación diferencial de Laguerre**

$$xy'' + (1 - x)y' + ny = 0. \quad (3.55)$$

Para encontrar la solución de esta ecuación, se aplica el Teorema 2.4, es decir, que basado en las raíces de la ecuación indicial, se considera como solución la serie $y(x) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} a_{\alpha} x^{\alpha+k}$, con $a_0 \neq 0$. Luego, sustituyendo en (3.55) se sigue que $a_0 k^2 = 0$ y $a_{\alpha+1}(\alpha + k - 1)^2 + a_{\alpha}(-\alpha - k + n) = 0$, entonces para $k = 0$, se obtiene de la ecuación

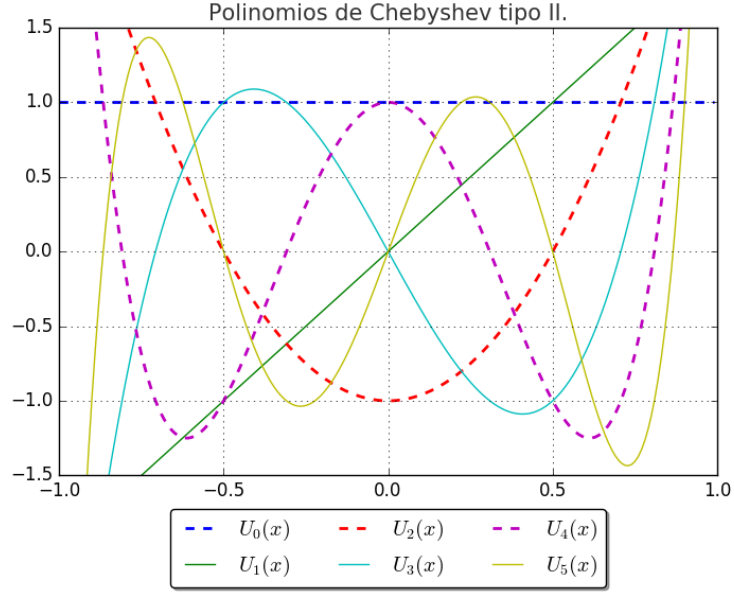


Figura 11: Polinomios de Chebyshev Tipo II, para $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

$$a_{\alpha+1} = a_{\alpha} \frac{(\alpha - n)}{(\alpha + 1)^2}. \quad (3.56)$$

De forma general,

$$a_k = \frac{(-1)^k n!}{(k!)^2 (n - k)!} a_0, \quad (3.57)$$

entonces $y(x)$ toma la forma

$$y(x) = a_0 n! \frac{(-1)^k}{(k!)^2 (n - k)!} x^k, \quad (3.58)$$

que converge para $n \in \mathbb{Z}$, cuando x tiende a infinito. Por lo tanto, al considerar $n \geq 0$ se tiene que la serie (3.58) se convierte en un polinomio de la forma

$$L_n(x) = A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2 (n - k)!} x^k, \quad (3.59)$$

de modo que, $L_n(0) = 1$, entonces, $A = n!$. Por lo tanto, para $n \geq 0$, y $n \in \mathbb{Z}$ el polinomio (3.59) toma la forma

$$L_n(x) = n! \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2 (n - k)!} x^k, \quad (3.60)$$

conocido como **polinomios de Laguerre** (ver Figuras 12 y 13) [26]. Ahora, si se aplica la fórmula de Rodrigues, se obtiene finalmente que

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}). \quad (3.61)$$

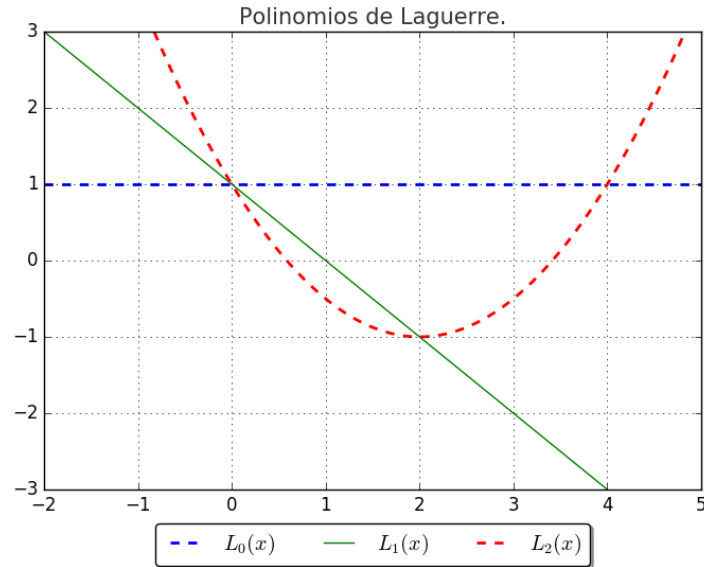


Figura 12: Polinomios de Laguerre para $n = 0, 1, 2$.

Recordando la teoría de operadores, se tiene para la ecuación (3.55), que $a_2 = x$, $a_1 = 1 - x$ y $a_0 = 0$, entonces $p = \frac{1}{a_2} e^{\int \frac{a_1}{a_2} dx} = e^x$, $q = a_2$, $r = se^{-x}$ y $r = a_0 p = 0$. En consecuencia, la ecuación autoadjunta, derivada del operador de la ecuación (3.55) es

$$\frac{d}{dx}(xe^{-x}y') + ne^{-x}y = 0. \quad (3.62)$$

3.9. Ecuación del Oscilador Armónico

Al hablar de vibraciones, se piensa en un sistema en equilibrio, el cual es perturbado y aparecen como consecuencia fuerzas que tienden a reataurar el equilibrio [21]. Este tipo de sistemas están representados con ecuaciones diferenciales de la forma

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + py = R(t), \quad (3.63)$$

conocida como la **ecuación del oscilador armónico**.

Para el estudio de este tipo de ecuaciones, consideremos una carreta con masa M sujeta por un muelle a un muro cercano, en la posición de equilibrio $x = 0$, sin la intervención de fuerzas externas. En el momento en el que el muelle es desplazado una distancia x , como se ve en la Figura 14, este ejerce una fuerza $F_s = -Kx$, con K una constante, que mide la rigidez del resorte. Por la segunda ley de Newton la ecuación que describe el sistema es

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{K}{M}x = 0, \quad (3.64)$$

con solución general

$$y = c_1 \cos\left(\sqrt{\frac{K}{M}}x\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{\frac{K}{M}}x\right), \quad (3.65)$$

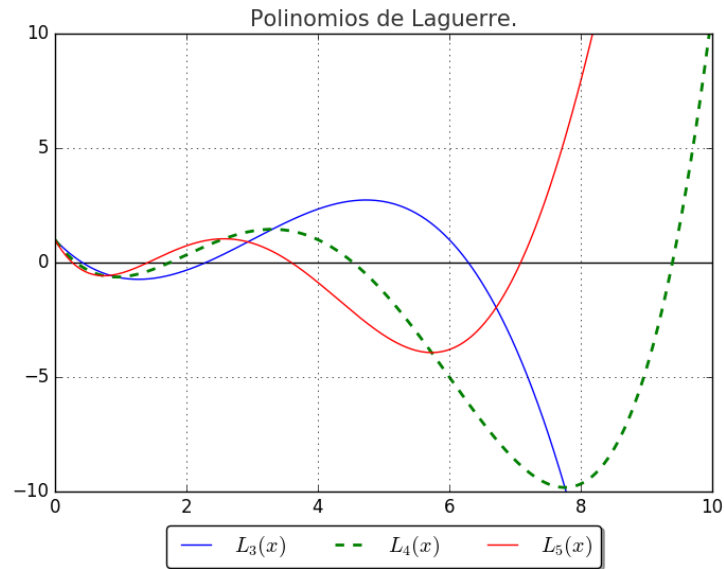


Figura 13: Polinomios de Laguerre para $n = 3, 4, 5$.

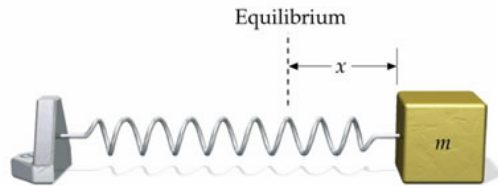


Figura 14: Sistema carreta muelle. (Imágen tomada de Wikimedia commons.)

que, corresponde a un movimiento oscilatorio como se ve en la Figura 15. Ahora, si en el sistema se considera una fuerza que va en contra del movimiento y depende del medio, es decir, una fuerza amortiguadora, $F_\alpha = c \frac{dy}{dx}$, donde c es una constante que depende del medio, el sistema estará dado por

$$M \frac{d^2 y}{dx^2} = F_s + F_\alpha, \quad (3.66)$$

es decir,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{c}{M} \frac{dy}{dx} + \frac{k}{M} y = 0. \quad (3.67)$$

Tomando $b = \frac{c}{2M}$ y $a = \sqrt{\frac{k}{M}}$, se tiene la ecuación auxiliar $m^2 + 2bm + a^2 = 0$, con raíces $m_1 = -b + \sqrt{b^2 - a^2}$ y $m_2 = -b - \sqrt{b^2 - a^2}$. Como se ha visto antes, la solución de la ecuación depende de los valores de las raíces, entonces se tienen tres casos:

? Si $b^2 - a^2 > 0$, implica que la fuerza de fricción es mayor comparada con la rigidez del resorte, por lo tanto no existe oscilación, la carretilla sólo vuelve a la posición de

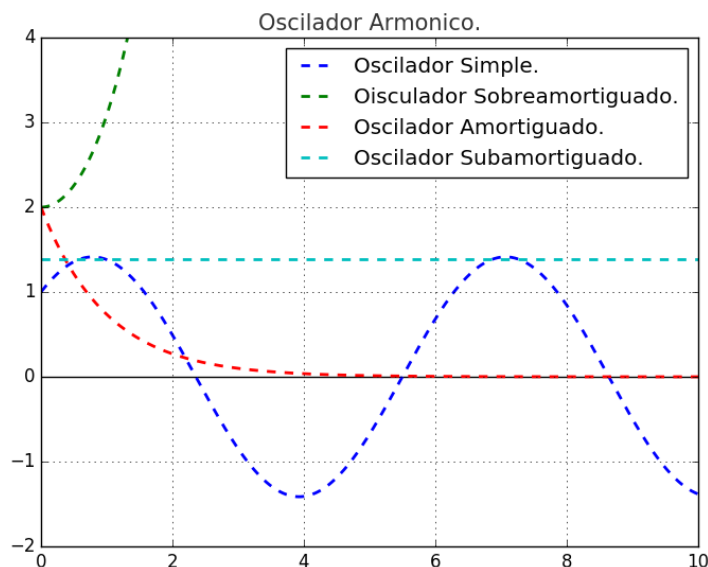


Figura 15: Representación de las diferentes soluciones para el oscilador armónico.

equilibrio una vez. Se conoce como **oscilación sobreamortiguada**. Su solución es

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}. \quad (3.68)$$

? Si $b^2 - a^2 = 0$, entonces $m_1 = m_2 = -a = -b$. Esto implica, que la fuerza de fricción es mucho mayor y el movimiento es considerado como **críticamente amortiguado**. Su solución es:

$$y = c_1 e^{-ax} + c_2 2e^{-ax}. \quad (3.69)$$

? Cuando la fuerza que depende del medio disminuye sin ser cero, pero sí genera vibración, es decir, el movimiento es **subamortiguado**. Para este caso, se tiene que $b^2 - a^2 < 0$, entonces $m_1, m_2 = -b \pm \sqrt{b^2 - a^2}$, es decir a y b son complejos conjugados. Y la solución es de la forma

$$y = e^{-bx} [c_1 \cos(\sqrt{b^2 - a^2}) + c_2 \sin(\sqrt{b^2 - a^2})]. \quad (3.70)$$

Con respecto al operador autoadjunto de la ecuación diferencial que modela el oscilador, se consideran dos casos:

? Para (3.64) se tiene que $a_2 = 1$, entonces $\dot{a}_2 = 0$, y $a_1 = p$. Con lo cual se concluye, que esta ecuación diferencial no es un operador autoadjunto.

? Para (3.67) se tiene que $a_2 = 1$, entonces $\dot{a}_2 = 0$ y $a_1 = \frac{c}{M}$. Con lo que se concluye, que esta ecuación tampoco es autoadjunta.

3.10. Función de Hermite

Charles Hermite nació el 24 de diciembre de 1822 en París y murió el 14 de enero de 1901. Fue uno de los matemáticos más eminentes del siglo XIX. Entre sus trabajos, esta

la demostración del carácter trascendente del número e , desarrolló las matrices hermiticas para dar solución a problemas de la teoría de números, las cuales, resultaron cruciales para la formulación de la mecánica cuántica por parte de Herisenberg en 1925 [16].

Otro de sus trabajos, y del cual hablaremos en este texto, son los polinomios que llevan su nombre y son solución de **la ecuación diferencial de Hermite**. Una de las aplicaciones más frecuentes de estos polinomios, es en la teoría del oscilador armónico lineal cuántico (ver Figura 16), considerado como uno de los sistemas más importante en mecánica cuántica, ya que cualquier potencial se puede aproximar por un potencial armónico cerca del punto de equilibrio estable. Además, es uno de los sistemas

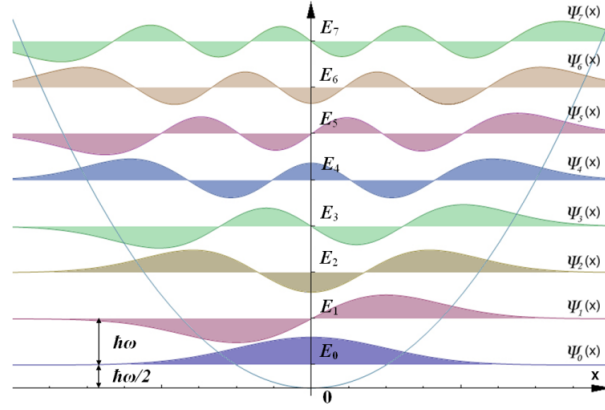


Figura 16: Oscilador armónico cuántico. Funciones de onda para los ocho primeros autoestados [Imagen tomada de Wikimedia commons].

mecánico cuánticos que admite una solución analítica sencilla y está expresado por la siguiente ecuación diferencial [16]:

$$\frac{d^2w}{dw^2} + (2p + 1 - x^2)w = 0, \quad (3.71)$$

con $p = cte$. Para hallar la solución de la ecuación, consideremos $w = ye^{-\frac{x^2}{2}}$, sustituyendo en (3.71) se tiene

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + 2py = 0, \quad (3.72)$$

que se conoce como **la ecuación diferencial de Hermite**. Aplicando el Teorema 2.4, se llega a la fórmula de recurrencia

$$a_{n+2} = \frac{2(p-n)}{(n+1)(n+2)} a_n, \quad (3.73)$$

entonces,

$$H_n(x) = a_n \left[x^n - \frac{n(n-1)}{2*2} x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2^2 + 2*4} x^{n-4} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{2^k * 2 * 4 * \dots * (2k)} x^{n-2k} + \dots \right], \quad (3.74)$$

y reescribiendo, se tiene

$$H_n(x) = a_n \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \frac{n!}{2^{2k} k! (n-2k)!} x^{n-2k}. \quad (3.75)$$

Para obtener el n -ésimo polinomio de Hermite tomamos $a_n = 2^n$, entonces

$$H_n(x) = 2^n \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \frac{n!}{2^{2k} k! (n-2k)!} x^{n-2k}. \quad (3.76)$$

En la siguientes gráficas se puede ver la forma de los primeros siete polinomios de Hermite.

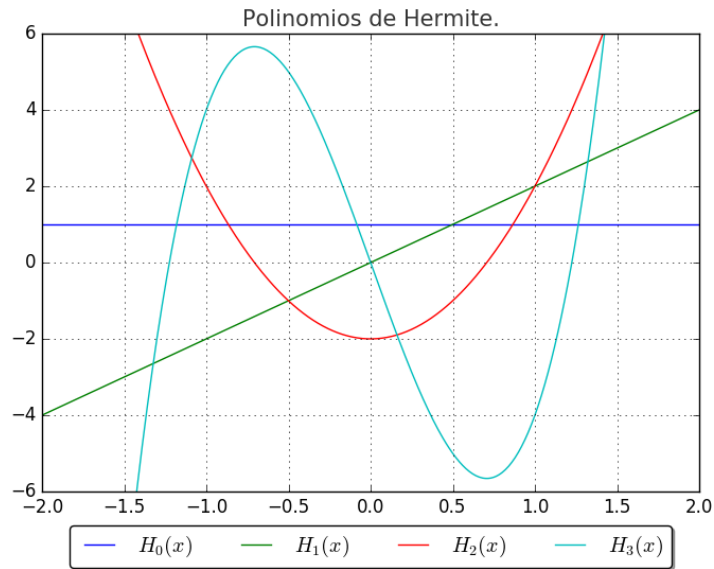


Figura 17: Polinomios de Hermite para $n = 0, 1, 2, 3$.

Según la teoría de operadores autoadjuntos, para la ecuación (3.72) se tiene que $a_2 = 1$ y $a_1 = 2p + 1 - x^2$, donde claramente se ve que el operador asociado a la ecuación no es autoadjunto. Pero es posible que lo sea si $p = \frac{x^2 - 1}{2}$.

4. Interfaz Gráfica

Como complemento de la investigación sobre funciones especiales, se realizó en Python una interfaz gráfica en la cual es posible representar las diferentes funciones que se discutieron a lo largo del texto, de una forma muy sencilla para un usuario con acceso a Python. La interfaz consiste en una ventana principal que redirige a ventanas individuales, correspondientes a cada una de las funciones, en las que sólo se requiere seleccionar o introducir los parámetros necesarios en cada caso. Su implementación necesita tener la instalación completa de Anaconda, que es una plataforma de leading open data science impulsada por Python. La ventaja de este algoritmo, es que es de libre acceso [1] y es posible conocer la forma en que fue desarrollado. Además, es un buen complemento para los cursos de ecuaciones diferenciales y física matemática, como material didáctico para la comprensión de las diferentes ecuaciones, y su comportamiento. En las siguientes dos imágenes se puede apreciar el aspecto que tiene la interfaz una vez se accede a ella.

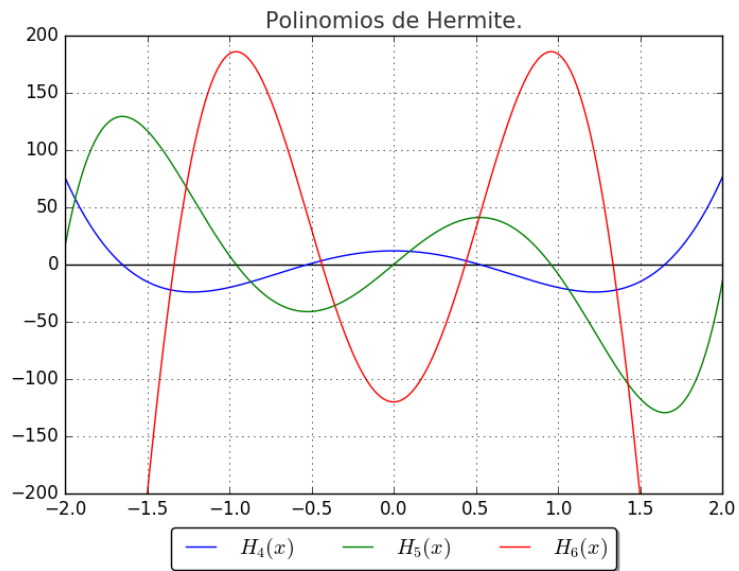


Figura 18: Polinomios de Hermite para $n = 4, 5, 6$.

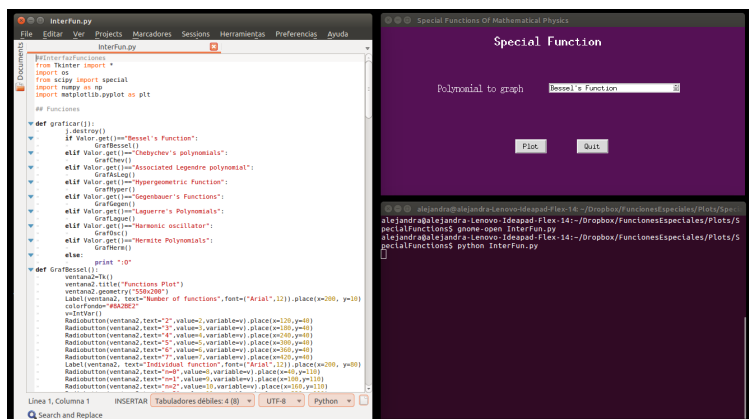


Figura 19: Ejecución de la interfaz gráfica desde la terminal.

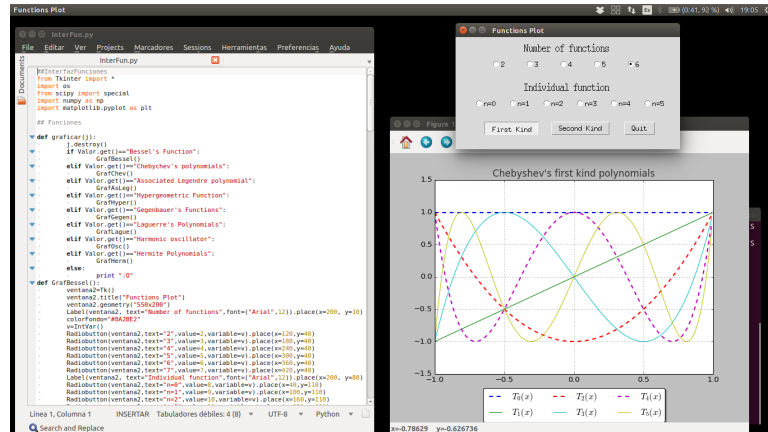


Figura 20: Ejemplo de la gráfica de un polinomio.

5. Conclusiones

Las llamadas funciones especiales tuvieron su auge de estudio en el siglo XIX y fueron desarrolladas por algunos de los más grandes matemáticos de la historia, de hecho, en aquel entonces fueron tema central de investigaciones relacionadas con teoría de números, análisis y aplicaciones en diversos problemas de ingeniería de la época. Hoy en día son especialmente utilizadas en la solución de las ecuaciones diferenciales parciales más conocidas, como la ecuación del calor o la ecuación de onda en simetrías esféricas y cilíndricas, donde se hace necesario aplicar las diversas propiedades de las funciones de Bessel y Legendre. Aunque se podría llegar a pensar que estas y las demás funciones especiales que abordamos en este documento son las únicas existentes o las únicas interesantes, ya que son las que se mencionan y utilizan en casi todos los libros de texto, el lector debe saber que existen una gran cantidad de ecuaciones diferenciales parciales y ordinarias, así como ecuaciones integrales cuya solución corresponde a un tipo de función especial, algunos casos han sido bien estudiados en años recientes parcial y totalmente y algunos otros aún no tienen la forma explícita de la solución buscada. El lector interesado en problemas abiertos en esta temática puede empezar por consultar a Berg C. [3]. Además del problema principal de encontrar estas soluciones, posteriormente viene el estudio de las propiedades de los espacios en que ellas viven, y por supuesto, las diversas implicaciones que dichas soluciones tienen en los diferentes campos de aplicación de la ecuación que resuelven, campos que hoy incluyen a la biología y la economía entre otros, es decir, el estudio de funciones especiales continúa siendo tan atractivo como hace doscientos años.

Referencias

- [1] Alejandra T. M, <https://github.com/AlejandraTM/Special-Functions>
- [2] Beaumont L. E, Éloge historique de Adrien-Marie Legendre: lu à la séance publique annuelle du 25 mars 1861, Institut impérial de France, 1861.
- [3] Berg C, Open problems, Integral Transforms Spec. Funct., vol. 26, No 2, pp. 90-95 (2015).
- [4] Biography of Gegenbauer, <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Gegenbauer.html>
- [5] Bravo Y. S, Métodos matemáticos avanzados para científicos e ingenieros, Universidad de Extremadura. Servicio de Publicaciones, 2006.

- [6] Brillouin L, Wave propagation in periodic structures: electric filters and crystal lattices, Courier Corporation, 2003.
- [7] Browman .F, Introduction to Bessel functions, Courier Corporation, 2012.
- [8] Butzer, Paul and Jongmans, François, PL Chebyshev (1821–1894): A guide to his life and work, Journal of approximation theory, Elsevier, vol. 96, No. 1, pp. 111-138 (1999).
- [9] Castillo F. A, El príncipe de las matemáticas, Apuntes de historia de las matemáticas, 2002.
- [10] De Oliveira E. C, Funciones especiales con aplicaciones, livraria da Fisica, 2005.
- [11] Duren P, Changing faces: The mistaken portrait of Legendre, Notices of the AMS, Vol. 56, No. 11, pp. 1440-1443 (2009).
- [12] Gamma Function, <http://mathworld.wolfram.com/GammaFunction.html>
- [13] Gegenbauer, L and ber einige zahlentheoretische Functionen, Sitzungber, Math.-Naturw. Cl. Akad. Wiss. Wien, 1884.
- [14] Hazewinkel M, Encyclopaedia of Mathematics: Laguerre polynomials, Springer Science, 2011.
- [15] Herschel, John F. W, A brief notice of the life, researches, and discoveries of Friedrich Wilhelm Bessel, G. Barclay, 1847.
- [16] Landau, Lev D, Lifshitz, Curso de física teórica, Reverte, Editorial SA, 2002.
- [17] Muñoz J. L, Riemann: una visión nueva de la geometría, Nivola, 2006.
- [18] Ramos A. Z, Ecuaciones Diferenciales Parciales, Universidad Autónoma Metropolitana, 2011.
- [19] Schrödinger E, An undulatory theory of the mechanics of atoms and molecules, Physical Review, APS, Vol. 28, No. 6, pp. 1049-1070 (1926).
- [20] Sepúlveda A, Lecciones de física matemática, Universidad de Aantioquia, 2004.
- [21] Simmons, George F and others, Ecuaciones diferenciales: con aplicaciones y notas históricas, McGraw-Hill Interamericana, 1993.
- [22] Slater L. J, Confluent hypergeometric functions, University Press Cambridge, 1960.
- [23] Villate J. E, Equações diferenciais e equações de diferenças, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 2011.
- [24] Vladimir I. A, Lectures on partial differential equations, Springer Science & Business Media, Moscow, Rusia, 2013.
- [25] Weisstein, Eric W. Confluent Hypergeometric Function of the First Kind."From MathWorld—A Wolfram Web Resource, <http://mathworld.wolfram.com/ConfluentHypergeometricFunctionoftheFirstKind.html>
- [26] Weisstein, Eric W. "Laguerre Polynomial."From MathWorld—A Wolfram Web Resource,<http://mathworld.wolfram.com/LaguerrePolynomial.html>

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
UNIVERSIDAD DE NARIÑO

e-mail: alexander.arredondo@konradlorenz.edu.co

e-mail: alejandra.torresm@konradloren.edu.co