LLULL, vol. 17, 1994, 117-139

LOS INICIOS DE LA METALOGICA EN LOS AÑOS TREINTA

JESUS PADILLA GALVEZ*
Departamento de Filosofía y CCEE
Universidad de León

RESUMEN

Analizo en este trabajo la propuesta metalógica llevada a cabo por autores vinculados al Círculo de Viena en los años treinta. En dichos años se lleva a cabo un análisis paralelo en tres direcciones: Por un lado, los trabajos del programa hilbertiano; por otro lado, las investigaciones del Círculo de Varsovia; y, finalmente, los resultados de K. Gödel que suponen un serio ataque al programa de Hilbert.

ABSTRACT

In this work I have analyzed the metalogical proposal presented by some authors associated with the Vienna Circle in the Thirties. During those years parallel analyses were carried out in three different directions: on the one hand, the works carried out by the Hilbertian program, on the other hand, the research done by the Varsovia Circle, and finally, the results obtained by K. Gödel which meant a serious criticism of Hilbert's program.

---

* Agradezco a los Archives of Scientific Philosophy de la Universidad de Pittsburgh (EE.UU.) el permiso para citar de sus fuentes. De acuerdo con el compromiso acordado, todos los derechos quedan reservados. Además quiero agradecer al Director del Wiener Kreis Archiv de Haarlem (Holanda), A.J. Kox, todos los derechos que me ha cedido para la publicación y traducción de los textos de la metalógica de R. Carnap que aquí se citan. Agradezco las interesantes anotaciones que han realizado los árbitros que han leido el trabajo. Algunas son fuente de nuevas indagaciones.

Recibido el 16 de diciembre de 1992

La reacción de la propuesta hilbertiana a los resultados de K. Gödel viene de la mano del intento de refutación llevada a cabo por E. Zermelo en el epistolario mantenido con K. Gödel el 21.9.1931, la contestación de Gödel el 12.X.1931 y la respuesta de Zermelo el 29.10.1931.

Mostraremos que las puntualizaciones de K. Gödel llevan el sello de la discusión mantenida en los meses anteriores en el Círculo, y se hacen eco de algunas de las propuestas de R. Carnap. Su análisis es parte de un programa más amplio, cuyo objetivo se plasmará en la Logische Syntax der Sprache *(1934) y que se propone desarrollar un método exacto con el fin de llevar a cabo el análisis lógico del lenguaje. Su propuesta asume elementos importantes del proyecto desarrollado por K. Gödel, pero puntualiza algunos conceptos que habían sido tratados indistintamente en el trabajo de este último.*

The reaction of the Hilbertian proposal to the results of K. Gödel was due to E. Zermelo's attempted refutation in his letter to K. Gödel on Sept. 21, 1931, Gödel's answer being on October 12, 1931 and Zermelo's answer to this letter coming on October 29, 1931.

We will show that K. Gödel's remarks are influenced by the discussions held during the previous months in the Circle, and echo some of R. Carnap's proposals. His analysis is just part of a wider program whose goal would be shaped in the Logische Syntax der Sprache *(1934) and which intended to develop an exact method so as to carry out the analysis of logic in language. His proposal assumes important elements in the project developed by K. Gödel but points out some concepts which had been dealt with indistinctly in the work of the latter.*

Palabras clave: Lógica, Matemáticas, Siglo XX, Correspondencia, Fuentes, Sociedades, K. Gödel, R. Carnap, D. Hilbert, E. Zermelo, A. Tarski.

1. Introducción

Mi intención en este trabajo es contribuir a aclarar la historia del desenvolvimiento del *Teorema de Gödel*. Entro de lleno en el ámbito propio de los historiadores de la ciencia, en general, y de la matemática, en particular, aunque en calidad de lógico; de manera que el modo como voy a reconstruir unos años de la historia de las matemáticas está guiado por un interés lógico y filosófico. En lo que se refiere al tema y al lapsus de tiempo con el que me voy a ocupar, se parte de unos planteamientos preconcebidos acerca de que el teorema propuesto por K. Gödel viene a ser presentado en su conocido artículo *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter*

Systeme. I., publicado en 1931, y no necesita de ningún ajuste. Con esto no quiero poner en duda la veracidad de dicho teorema, ni se me ha pasado por la mente poner en cuestión lo que los expertos sostienen acerca del mismo. Mi intención es más limitada; lo único que presentaré en las páginas siguientes es una reconstrucción, mediante una serie de fuentes inéditas, de la puntualización que se desarrolló paulatinamente sobre los resultados de Gödel.

El trabajo de K. Gödel fue recibido para su publicación el 17.11.1930 y publicado en 1931. Los especialistas en la investigación del teorema de Gödel señalan que la conclusión más importante a ensalzar es la siguiente:

"... la perspectiva de encontrar para todo sistema deductivo (y, en particular, para un sistema en que pueda expresarse toda la aritmética) una prueba absoluta de consistencia que satisfaga los requisitos finitistas propuestos por el programa de Hilbert es, aunque no lógicamente imposible, sumamente improbable"[1].

El artículo consta de cuatro apartados bien diferenciados: El primero presenta una exposición informal del argumento general. El segundo apartado presenta (i) una descripción precisa del sistema *P*; seguidamente, (ii) se lleva a cabo una asignación de los números naturales a una secuencia de signos de *P* y una asignación similar de las secuencias de las secuencias de los signos de *P*; se presenta (iii) una definición de las funciones recursivas primitivas[2]; la prueba de que todo predicado numérico-teórico recursivamente primitivo es representable de modo numérico en *P*; y la definición de ω-consistencia. El tercer apartado presenta dos resultados suplementarios de la indecidibilidad. En el apartado cuarto se deriva una consecuencia importante del teorema VI. Con dicha cita y la estructuración del trabajo queda perfectamente acotado el objeto a historiografiar. Las cuestiones a las que preferentemente voy a tratar de responder son las siguientes: ¿Qué elementos hay involucrados en el teorema de Gödel? y ¿Cómo se puede dar solución puntual a cada uno de los elementos involucrados en dicho teorema?

2. Sobre consistencia y decidibilidad en los sistemas axiomáticos

El día 15 de enero de 1931, K. Gödel presenta una conferencia (*Referat*) en el Círculo matemático que organizaba H. Hahn. Se encuentra a disposición un protocolo de la discusión mantenida a raíz de la conferencia y que lleva como título *Über Widerspruchsfreiheit und Entscheidbarkeit in Axiomensystemen* (Sobre consistencia y decidibilidad en los sistemas axiomáticos) a la que asisten, al menos, F. Kaufmann, H. Hahn, M. Schlick, como se desprende del protocolo[3]. Probablemente -aunque no se puede verificar mediante las fuentes-, la base en las que se asienta dicha discusión es la comunicación que presentó K. Gödel a H. Hahn con fecha del 23 de octubre de 1930 del resumen de la prueba de incompletud y que se publicó con el siguiente título: *Einige metamathematische Resultate über Entscheidungsdefinitheit und Widerspruchsfreiheit* (Algunos resultados metamatemáticos sobre decidibilidad efectiva y consistencia)[4]. El pensamiento gestor de la demostración de la imposibilidad de la prueba de consistencia viene a ser expuesto de la siguiente manera[5]:

"Se adjunta la consistencia de un sistema al sistema mismo - y dicha adjunción se lleva a cabo formalmente - entonces se decide en ese sistema extendido una sentencia originariamente indecidible, consecuentemente no se puede demostrar la consistencia de un sistema en el mismo sistema".

Seguidamente K. Gödel formula una *Vermutung* (conjetura), a saber[6]:

"Si hay, en suma, una prueba finita de la consistencia, entonces también se puede formalizar".

Consecuentemente, la prueba ideada por K. Gödel supone la imposibilidad de la demostración de la consistencia. Pero, ¿qué se entiende por demostración? Esta pregunta es una de las cuestiones más engorrosas de toda la propuesta de K. Gödel. La recepción que se lleva a cabo acerca de la noción de *prueba* permite diferentes interpretaciones, aunque todas difieren entre sí y conllevan fines dispares. Las dudas que suscita F. Kaufmann al respecto son sólo un prefacio de lo que más tarde ocurrirá en los años treinta. F. Kaufmann plantea la cuestión de cómo observar la consistencia de las sentencias que no tienen en común ningún par de conceptos o, aplicada a los axiomas de Peano, a qué se debe el que hay un primer y último número[7]. En la argumentación, K. Gödel se distancia claramente de un tipo de consistencia de carácter informal asumiendo un concepto de consistencia de carácter formal. La conjetura crucial se centra alrededor de la cuestión de si hay dichos sistemas elementales en los que concretamente resulten sentencias indecidibles de un modo transparente. K. Gödel asienta su refutación en un tipo de argumentación evidente. Según su propuesta, depende del sistema en el que se exponga el sistema. Acto seguido, recuerda algunos momentos clave de su argumentación y llama la atención sobre el hecho de que su planteamiento se construye gracias a un recurso decisivo (*entscheidenden Kunstgriff*)[8]:

"La representación isomorfa de las figuras deductivas de la consecuencia f_2 a partir de las sucesiones numéricas de f_1 que permite ante todo formular internamente la demostración, denomina por tanto, por ejemplo $S(f_2)$ una figura deductiva $l(f_2)$ la "longitud" de la cadena pertinente, entonces se escribe la demostración de f_1

$$\mathrm{Dem.}f_1 \equiv (\exists f_2)\{S(f_2) \& f_2[l(f_2)]=f_2\}$$

De este modo, se puede dar por satisfecho o descomponer más el símbolo *S*".

Otro tema tratado en la discusión es el papel que juega la aplicación del sistema axiomático de A. Heyting[9]. Según K. Gödel, el sistema de Heyting es más restringido que el de B. Russell[10]. Si es consistente, entonces se pueden presentar en dicho sistema sentencias incompletas. Ahora bien, el intuicionismo, siguiendo el punto de vista de L.E.J. Brouwer, no se altera por su trabajo, ya que no se contiene en ningún sistema formal[11].

Otro de los temas que salen a relucir en la discusión, debido sobre todo a las cuestiones que propone H. Hahn, es el de la *diagonalización*. H. Hahn le hace anotar a K. Gödel que el pensamiento fundamental de la prueba de que no hay una totalidad de lo construible en sentido absoluto juega un papel importante en la teoría de conjuntos, sobre todo en lo que tiene que ver con el principio de *inducción transfinita* de G. Cantor (*Cantorschen Diagonalverfahren*)[12]. K. Gödel hace anotar que la aplicación del pensamiento, como viene a ser formulado por Hahn de manera general, es también cuestionable, si la totalidad de todas las pruebas intuicionistas encuentran su lugar en un sistema formal. Seguidamente H. Hahn plantea una serie de cuestiones que han quedado abiertas[13]. La primera se apoya en la nítida distinción que lleva a cabo N.N. Lusin en la prueba de la existencia para los conjuntos de Borel de clases de orden superior. H. Hahn quiere saber si la inducción transfinita se efectúa o no[14]. La segunda pregunta cuestiona si de la prueba gödeliana se puede excluir la inducción transfinita. Gödel afirma que la fórmula incompleta presentada se puede construir y que su contenido es finito, como el de las conjeturas de Goldbach o de Fermat[15].

3. Intermezzo metateórico: la propuesta de R. Carnap

R. Carnap presenta una serie de conferencias sobre metalógica en el *Mathematischen Institut* durante los días 11. 6. 1931, 18. 6. 1931 y el 25. 6. 1931, que aclararán algunos conceptos clave del trabajo de K. Gödel. Poseemos una fuente excepcional del trabajo realizado: en los diarios aparecen escuetas anotaciones de los días en que trabaja sobre metalógica. Así pues, un día antes de presentar la primera conferencia, el miércoles 10 de junio, recibe la visita de K. Gödel por la tarde y hablan sobre metalógica. El día de la primera conferencia pasa sin pena ni gloria y apunta: "*[A las] siete y media [se ha celebrado el] Círculo. Mi conferencia (1ª) sobre metalógica (en el Instituto* *de Matemáticas) hablo sin discusión hora y media*"[16]. La segunda conferencia no varía el resultado. Desde el lunes trabaja sobre metalógica y el jueves 18 de junio resume: "*... [por la tarde] tarde [se ha celebrado el] Círculo. Mi segunda conferencia sobre metalógica, todo el tiempo [he estado] hablando, sin discusión*"[17]. Finalmente, el 2 de julio presenta su última conferencia, planteándose a sí mismo una cuestión retórica: "*Tres y media [llevé a cabo las] clases prácticas ... [hubo] discusión [en el] Círculo sobre mi metalógica. último Círculo. (¿Para mí definitivamente el último?)*"[18]. No será el último, y las anotaciones de ese año indican que seguirá trabajando ininterrumpidamente sobre estos temas[19]. Vale la pena reseñar dos visitas que recibe R. Carnap a la semana siguiente. El viernes 10 de julio tiene una entrevista con F. Waismann y anota en su diario lo siguiente[20]:

"... él pregunta diversas cosas sobre metalógica. [Él es de la opinión,] Ella misma no es una teoría, sino otro cálculo. Yo: Sí, [creo que es] como en geometría, un cálculo con un ámbito de aplicación privilegiado".

El paralelismo y la ejemplificación demuestran las dificultades que debían de existir para comprender adecuadamente el ámbito de estudio de la metalógica. Una última nota de los diarios nos realzará la importancia de estas conferencias para el Círculo de Viena, en particular, y para la discusión y el origen de la metalógica, en general. El domingo, 12 de julio de 1931, K. Gödel visita a R. Carnap en su apartamento. Una breve nota en el diario de éste hace que estas conferencias recobren una relevancia inusitada, R. Carnap anota[21]:

"Por la tarde Gödel [estuvo] aquí. [Hablamos] Sobre mi metalógica; [Llegó al resultado de que] es consistente; por lo tanto, no contiene la matemática clásica sino básicamente la intuicionista".

Dicha aclaración habrá de ser trabajada con cuidado. ¿Qué significa que la metalógica es consistente, si contiene esencialmente la matemática intuicionista y no la clásica? Para dar una solución puntual a dicha cuestión y otras, vamos a analizar puntualmente la propuesta desarrollada por R. Carnap en sus conferencias sobre *Metalógica*. La primera conferencia introduce la siguiente definición[22]:

"Por metalógica entiendo la teoría de las formas que aparecen en un lenguaje, es decir, la exposición de la sintaxis del lenguaje".

El interés por estas investigaciones viene a ser resumido por R. Carnap de la siguiente manera: (*A*) por un lado, pretende conocer cuáles son los cambios que se pueden llevar a cabo en el lenguaje russelliano y, (*B*) por otro lado, desea indagar la forma que ha de tener una metalógica, es decir, se propone investigar si hay *enunciados sobre enunciados* y qué *sentido* tienen, desea saber si son *enunciados empíricos o tautologías*, y si resulta una *jerarquía de lenguajes*. La sintaxis contiene una serie de consecuencias que han de satisfacer: (i) la verificación de los cuantificadores. Éstos sólo se pueden verificar, si vienen dados en un ámbito finito[23]; (ii) ha de distinguirse entre la generalización individual y específica[24]; y, (iii) han de diferenciarse sintácticamente las relaciones cualitativas de las localizativas.

Seguidamente, se caracteriza el cuantificador universal [x] como la conjunción de los enunciados del siguiente modo[25]: La presentación del ámbito de un operador universal se lleva a cabo mediante la presentación del límite superior del ámbito. Así pues, un cuantificador del tipo [n]111(P(xn)) viene a ser expuesto como la conjunción de las siguientes sentencias: P(x)&P(x1)&P(x11)&P(x111)[26]. Cuando el ámbito viene expuesto por una variable, entonces de [n]m(P(xn)) resulta una conjunción con indeterminados (pero finitos) elementos del siguiente modo: P(x)&----&----&----&----&P(xm). El cuantificador existencial [∃x] es disuelto mediante la disyunción, si el ámbito se presenta mediante indicación numeral. Así pues, [∃n]111(P(xn)) puede ser expuesto por P(x) V P(x1) V P(x11) V P(x111). De modo que vale: [∃n]m(K(xn), y que es expresado por P(x)V----V---- V----V----V P(xm)[27].

Acto seguido, se introducen determinados símbolos, con el fin de expresar la *descripción metalógica*, ya que, para escribir una sentencia metalógica sobre una fórmula, no se puede escribir dicha fórmula. De este modo, en una sentencia metalógica no puede haber ninguna fórmula lógica[28]. Esta descripción metalógica se propone exponer una comprobación empírica, en tanto que presenta el emplazamiento mediante determinadas magnitudes de estado.

Viene a ser tratado el problema de la *identidad* según la propuesta elaborada por B. Russell, según el cual: $(x=y) =_{DEF} (F(x) \rightarrow F(y))$ y elabora algunos refutaciones llevadas a cabo por L. Wittgenstein y algunas deficiencias en las críticas de C.I. Lewis[29]. Seguidamente presenta algunas definiciones de algunos conceptos metalógicos como *cifra, secuencia de cifras, elemento numérico* y *expresión numérica*[30].

La siguiente conferencia sobre metalógica sigue presentando las definiciones más relevantes de los conceptos metalógicos. Al género de los predicados aritméticos pertenecen, además del concepto de identidad I(p,q), como arriba indicamos, los siguientes predicados[31]:

$$\mathrm{Gr}(m,n) \equiv [\exists^{\mathfrak{R}}]m(\sim I(k,0)\&I(m,kn))$$
$$\mathrm{Tlb}(m,n) \equiv [\exists^{\mathfrak{R}}]m(I(m,prod)(k,n)))$$
$$\mathrm{Prim}(m) \equiv [k]m(I(k,0) \vee I(k,m) \vee \sim \mathrm{Tlb}(m,k)),$$

dichas definiciones son de tipo recursivo de determinados predicados para las relaciones *más grande* (Gr), predicados para la propiedad divisible (Tlb) y número primo (Prim). La definición recursiva consta de dos enunciados: el primero presenta el valor del functor respectivo (o el valor de verdad del predicado respectivo) para 0 como primer argumento; el segundo determina el valor para *x*, usando el valor para *x*.

Posteriormente se dará paso al análisis del modo de introducir una serie de términos básicos, con los cuales se opera en la metalógica. Las *funciones aritméticas* vienen a ser definidas, en parte, de modo recursivo[32]. Se propone definir las variables *libres* y las variables *ligadas* mediante la ayuda del concepto *fórmula*[33] Se define el concepto de *derivación*[34]. Se caracteriza el concepto de *substitución*[35]. Presenta las cuatro reglas de inferencia, a saber: la regla de substitución, de *implicación* -hoy lo caracterizamos por el *Modus ponens*-, las reglas de identidad y el principio de la inducción completa[36]. Termina haciendo algunas anotaciones sobre las *sentencias aritméticas universales*[37]. Para acabar sus consideraciones sobre el término *demostración*[38].

El término demostración recoge todos los elementos básicos de la metalógica. R. Carnap parte de la base de que sin una delimitación de la longitud de la demostración no se puede caracterizar ningún concepto correcto. Propone la siguiente puntualización: *U es demostrable en tantos y tantos pasos* ha de ser caracterizado mediante: *U es demostrable mediante tantos y tantos símbolos demostrables*[39]. Sin embargo, dicha precisión conserva algunas dificultades que son tratadas puntualmente. Para ello, propone el método de la *aritmetización de la metalógica*, como es aplicado por K. Gödel[40]. Dicho método implica una distinción entre la *metalógica descriptiva*, como ha sido tratada hasta el momento por R. Carnap, y una *metalógica aritmética*. Esta última trata las formas posibles. El origen de la distinción surge de las puntualizaciones que se ha de llevar a cabo con respecto a la longitud de la demostración. En dicha caracterización se introduce un concepto de *fórmulas posibles* con las que operar[41].

En la tercera conferencia, R. Carnap hace una disquisición general sobre el papel de los enunciados condicionales metalógicos, ya que tienen carácter analítico y son la consecuencia de la definición de *fórmula* *elemental*[42]. Vuelve a repasar la idea general: las definiciones elaboradas hasta ahora hacen sólo referencia a aquello que se encuentra en el marco de la fórmula, sin embargo el concepto de *demostración* es diferente, ya que sólo es definible mediante una aritmetización[43]. R. Carnap parte de la base de que en un lenguaje fisicalista también se ha de pasar de una simple correlación cualitativa a una cuantitativa cuyos valores son expresables mediante números naturales. Por analogía, introduce la numeración de Gödel, con el único fin de superar la metalógica descriptiva a la cual se refería en su conferencia anterior[44]. Dicho cambio de marcha es expuesto mediante ejemplos. Al final de la conferencia R. Carnap sintetiza su planteamiento general de la siguiente manera[45]:

> "Gödel puede contentarse con los conceptos aritméticos, ya que se ocupa de la aritmética. Pero ya que nosotros queremos describir las formas físicas, es decir, la combinación de los símbolos, tenemos que exponer además esos conceptos empíricos. Ya que describimos sólo formas físicas, a saber, sucesiones de símbolos lingüísticos, podemos expresar la metalógica de nuestro lenguaje natural y, precisamente de tal modo, que no contradiga los puntos de vista de Wittgenstein. No se trata aquí de sentencias sobre una especie de sentencias, sino de sentencias, en parte singulares, en parte condicionales sobre formas físicas".

La propuesta de Carnap parte de una hipótesis de trabajo que es expuesta con toda su radicalidad al final de la conferencia. El siguiente enunciado:

(*C*) *A* cree p,

no ha de ser analizado mediante la propuesta russelliana del comillado, es decir mediante "p", sino por la descripción metalógica del enunciado p, de modo que pueda desaparecer toda la apariencia de intensionalidad[46]. El problema central es el de resolver el axioma de reducibilidad como había sido expuesto por A.N. Whitehead/B. Russell en la segunda edición de los *Principia Mathematica* después de los duros ataques efectuados por L. Wittgenstein en el *Tractatus logico-philosophicus*. Este último recomendaba suponer que las funciones de proposiciones son siempre funciones de verdad y que en una proposición sólo puede aparecer una función a través de sus valores[47]. Las dificultades de este enfoque vienen a ser superadas por las propuestas de R. Carnap[48].

Al final de la conferencia se recoge la discusión habida en el Círculo. La clave de dicha discusión se encuentra en la capacidad sintetizadora de R. Carnap. Según éste, los enunciados de nuestro lenguaje pueden ser caracterizados como abstractos o concretos, descriptivos o aritméticos y decidibles e indecidibles y son expuestos mediante el siguiente esquema[49]:

	Decidibles en el cálculo	*Decidibles fuera del cálculo*	*Indecidibles con nuevos símbolos*	*Indecidibles sin nuevos símbolos*
descriptivos abstractos	Rojo(n) V ~ Rojo(n) Tautologías o contradicciones Generales.	Construibles según el método de Gödel.	Definiciones de conceptos fisicalistas.	Leyes naturales
concretos	R(17) V ~ R(17) Tautologías o contradicciones concretas.	0	Definiciones de nombres geográficos.	Enunciados con contenido.
aritméticos abstractos	m+n=n+m	El teorema de Gödel.	Definiciones de conceptos matemáticos.	? (Teorema de Fermat).
concretos	1 1 2	0	Definición de 2 2 1 1	0

Durante los meses posteriores a la publicación de los resultados de Gödel se desatan discusiones importantes de resaltar. Las interpretaciones son variopintas. Lo relevante al respecto es comprobar cómo va teniendo difusión su propuesta. Seguidamente, analizaremos las críticas efectuadas desde el programa hilbertiano.

4. La disputa entre el programa hilbertiano y los resultados de K. Gödel

La reacción de la propuesta hilbertiana a los resultados de K. Gödel viene de la mano del intento de refutación llevada a cabo por E. Zermelo en la correspondencia mantenida con K. Gödel el 21.9.1931[50]. La contestación de Gödel, con fecha del 12.X.1931, introduce puntualizaciones importantes en el marco de sus resultados que, creemos, no habrían sido posibles sin la discusión que se desata en el Círculo matemático de H. Hahn. La contestación de Zermelo el 29.10.1931 no puede ser entendida sino como un último intento de refutación improcedente.

Los planteamientos que desarrolló D. Hilbert en 1928 requerían la formalización completa de la matemática clásica[51]. Los conceptos de la matemática clásica vienen a ser reemplazados por signos gráficos, hileras (secuencias) de signos, el razonamiento por la mera manipulación combinatoria de las hileras, y la demostración por la deducción formal conforme a reglas mecánicas. Consecuentemente, dicho programa sería efectivo si se cumplían los siguientes requisitos: (i) probar la *consistencia* de dichos sistemas formales, (ii) seguidamente, extender la prueba a los cálculos funcionales de orden superior, (iii) construir sistemas axiomáticos para el análisis y la teoría de números que fuesen *completos*, y (iv) generalizar el problema de completitud, de modo que todas las sentencias válidas fuesen demostrables[52]. Dichos problemas quedaban pendientes y serían tema de los trabajos posteriores.

Las propuestas del grupo investigador vinculado a D. Hilbert se encontrarían con un grave problema, a saber, que si bien K. Gödel probaría la *completitud* de la lógica de primer orden, es decir, el cuarto problema expuesto por Hilbert en su conferencia, sin embargo, el intento de la prueba de la consistencia relativa supuso el descubrimiento de las proposiciones indecidibles. Esto tuvo como consecuencia directa la imposibilidad de probar la consistencia del análisis y la teoría de los números. Los pasos argumentativos a los que conducen sus resultados son los siguientes:

(1) Propuesta de probar la *consistencia* del análisis por métodos finitistas.

(2) Con dicho fin se lleva a cabo un análisis de la *consistencia relativa*, es decir, de aquellos casos en los que se encuentran involucrados tanto la interpretación, como la traducción y los modelos internos (concretos).

(3) Seguidamente, observó que el concepto de *verdad*, en teoría de números, no es definible en dicha teoría de números.

(4) Considerando la *demostrabilidad* formal, descubre las proposiciones indecidibles.

(5) Llega a la conclusión de que la afirmación de *consistencia* es, en sí misma, también una *proposición indecidible.*

Para nuestro análisis basta con recordar que la relevancia que confieren a las pruebas de consistencia reside, ante todo, en la relación entre los conceptos empleados en las pruebas de consistencia y los conceptos involucrados en el sistema formal cuya consistencia se prueba. Dichos conceptos pertenecen a dos familias diferentes. Por un lado, se hace uso de aquellos conceptos que se encuentran ligados al concepto semántico de *verdad*; por otro lado, se aplica satisfactoriamente a la familia de conceptos vinculados al concepto sintáctico de *demostración.* Ahora bien, si en la prueba de Gödel queremos analizar cuáles son las características y diferencias entre ambas familias, la información codificada será nula. Justamente en este complejo de problemas es donde se desenvuelven las mayores dificultades del programa hilbertiano. Es más, de no haber sido por las discusiones llevadas en el Círculo de H. Hahn, K. Gödel no habría tenido conciencia de la dificultad que encerraba la diferencia entre (3) y (4) de manera sistemática. Nuestra reconstrucción así lo indica. Pero vayamos por partes.

E. Zermelo presenta su conjetura contra la definición propuesta por K. Gödel de la clase K de números naturales que viene a ser expuesta por K. Gödel de la siguiente manera:

(1) $$n \in K \equiv \overline{\text{Bew}}\,[R(n);n],$$

en la que *Bew*(x) significa que x es una fórmula demostrable. La proposición $[R(n);n]$ consta de dos elementos: $R(n)$ expone un símbolo de clase ordenado como una secuencia y dicha fórmula designa al n-ésimo[53]. Según Zermelo, (1) pertenece al *sistema*, por lo que pregunta si es legítimo identificar la función con $R(q)$, y si es éste un símbolo de clase. La crítica la funda en el siguiente argumento: ha de suprimirse en la fórmula (1) el símbolo *Bew* y, para ello, propone definir:

(1)* $$n \in K^* \equiv \overline{[R\,(n);n\,]} \equiv S^*,$$

seguidamente, propone sustituir $S^*=R(q^*)$, por lo que se deduce que $A^*=R(q^*;q^*)$ no puede ser ni verdadero ni falso, es decir, su presuposición conduce a una *contradicción*[54]. La dificultad radica, pues, en el concepto involucrado en el sistema formal y cuya consistencia se prueba. La distinción viene a ser tratada por E. Zermelo del modo siguiente[55]:

> "El equívoco se asienta -del mismo modo que las paradojas de Richard y de Skolem- en el presupuesto (erróneo) de que todo concepto definible matemáticamente es expresable mediante una "hilera de signos finitos" (¡según un *sistema rígido*!), es decir, aquello que yo denomino el "prejuicio finitista" ".

La contestación de K. Gödel se lleva a cabo a dos niveles bien diferenciados: por un lado, las diferencias en la apreciación de las definiciones de las clases K y K^* lo cual viene a ser expuesto de la siguiente manera[56]:

> "Usted define una clase K^* mediante la estipulación: "n pertenece a K^*, si $[R(n);n]$ no es *verdadero*", mientras que yo defino una clase K mediante: "n pertenece a K si $[R(n);n]$ no es *demostrable*". El presupuesto de que K^* es expresable mediante un símbolo de clase del sistema dado conduce, por consiguiente, a una contradicción (ésta no es mi, sino su supuesto)".

Seguidamente puntualiza aún más la divergencia interpretativa en las diferentes actuaciones de K y K^*. La unión de símbolos, como han sido caracterizados por Zermelo en (1)* al caracterizar $n \in K^* \equiv \overline{[R\,(n);n\,]}$ no tiene sentido, ya que[57]

"La línea de la negación sólo tiene sentido sobre una unión de símbolos que expresan una aserción (sobre la cifra 5, por caso, no tiene sentido una línea de la negación). La unión de símbolos "[$R(n);n$]" no expresa *ninguna aserción*. "[$R(n);n$]" significa lo mismo o algo así, como la expresión (alemana) española siguiente: "aquella fórmula de los *Principia Mathematica*, que está en lugar del símbolo de clase n-ádico, al sustituir el número n por la variable". "[$R(n);n$]" no es, mismamente, esa fórmula "[$R(n);n$]" no es de modo alguno una fórmula de la Principia Mathematica, (ya que el símbolo [;] no aparece nunca en los Principia Mathematica), sino que "[$R(n);n$]" es solamente una abreviación de las expresiones (alemanas) españolas que se encuentran entrecomilladas".

El texto citado puntualiza muchos elementos que están involucrados en el argumento gödeliano y que han sido pasados por alto en la discusión, por lo que justifica su extensión. La fórmula [$R(n);n$] es, para todo número determinado -como es el caso de n- un *nombre*, o, si se prefiere, viene a caracterizar una descripción finita de una fórmula determinada, es decir, de una figura especial. La dificultad se aclara, si se tiene en cuenta que nos encontramos en ámbitos *metamatemáticos* que vienen a ser definidos del siguiente modo[58]:

"La dificultad general se asienta evidentemente en que en la metamatemática, además de los símbolos para los números, funciones , etc., también hay *símbolos para fórmulas* y que ha de diferenciarse claramente un símbolo, que designa una fórmula de esa misma fórmula".

Otro bloque de problemas, que vienen a ser tratados en dicha carta, tiene que ver con los predicados que se encuentran involucrados en el teorema de Gödel. K. Gödel nunca había llegado a formular de modo tan radical la divergencia entre los conceptos vinculados a la noción de *verdad*, como es la expresión ... *es una fórmula correcta* (que vamos a denominar [W])[59] y la noción de *demostrabilidad*, como viene a ser expresada mediante la expresión ...*es una fórmula demostrable* (que vamos a denominar [B])[60], en la que se asienta el argumento. En la carta de K. Gödel aparecen dispersos los elementos de los que consta dicha diferenciación y que proponemos sistematizar de la siguiente manera[61]:

[W] (i) Los predicados [W] no se pueden reducir, sin más, a una propiedad combinatoria de las fórmulas, y por ello no cabe reducción alguna en la matemática aritmetizada a términos aritméticos simples.

(ii) El predicado ...*es un fórmula correcta* se asienta en el significado de los signos.

(iii) La clase de las fórmulas correctas no puede expresarse mediante un símbolo de clase del sistema dado.

(iv) La clase de las fórmulas correctas no tiene nunca la misma extensión que el símbolo de clase del mismo sistema.

[*B*] (i) La propiedad *...es una fórmula demostrable* es puramente combinatoria, y, por lo tanto, formal, de la que no depende el significado de los símbolos.

(ii) *A es demostrable en un sistema determinado* significa que hay una secuencia de fórmulas que comienza con alguno de los axiomas del sistema y acaba con *A* y que posee la propiedad de que toda fórmula de la secuencia resulta de alguna de las anteriores mediante la aplicación de las reglas de inferencia.

(iii) La clase de las fórmulas demostrables puede reducirse a predicados aritméticos simples.

(iv) La clase [*B*] de las fórmulas demostrables es extensionalmente igual al símbolo de clase del mismo.

Las diferencias expuestas entre [*W*](i)-(iv) y [*B*](i)-(iv) permiten llegar a algunas conclusiones importantes: Hemos dicho que [*W*] y [*B*] no son extensionalmente idénticos, ya que si vale que $B \subseteq W$ entonces vale $B \subset W$, es decir, hay una fórmula correcta (verdadera) que no es demostrable. Y este es el resultado al que llega K. Gödel en su investigación.

La contestación de E. Zermelo a K. Gödel afina algunos elementos del punto de vista. Después de un agradecimiento de cortesía, reconoce que entiende mejor lo que K. Gödel propone, a saber[62]:

"Es decir, sólo para los enunciados "demostrables" de su "Sistema PM", no para sus enunciados *absolutos*, ha de tener validez su "delimitación finitista" (como yo la denomino) de la formación de tipos, mientras que para los *enunciados* del sistema permite nuevas construcciones *libres* según el modo del procedimiento de la diagonalización de Cantor. Entonces resulta, naturalmente, un sistema *no enumerable* de sentencias posibles, en el cual sólo podría ser "demostrable" un subconjunto enumerable y hay, evidentemente, sentencias "indecidibles" ".

El afán de polémica que conservó E. Zermelo durante toda su vida no le permite reconocer algunos elementos clave de la obra de K. Gödel, como de su correspondencia se desprende.

5. Conclusión

El desarrollo de las geometrías no euclídeas en el siglo XIX puso en duda el principio de *evidencia* como criterio válido para la elección de los axiomas de un sistema deductivo. Con la aparición de las antinomias de la teoría de conjuntos y el origen de una duda razonable sobre los fundamentos lógicos de las matemáticas se fortalece el esfuerzo por fundamentar la teoría de los sistemas deductivos. Con el fin de superar dichas dudas, D. Hilbert busca un fundamento para la matemática sobre la que se asentaría posteriormente el programa -el denominado programa de Hilbert- que cobra forma definitiva hacia finales de la década de los años veinte. Según D. Hilbert, el problema fundamental de la lógica matemática y, con él, el de la metamatemática, es el de decidibilidad. El programa proponía para la elección de los axiomas la satisfacción de determinados presupuestos: la consistencia, la completitud y la independencia del sistema axiomático. Resuelto el problema de decidibilidad, quedarían resueltas todas estas cuestiones. Un conjunto de expresiones S_A viene a ser denominado un sistema axiomático para un conjunto A de expresiones si vale: (i) el que el conjunto de derivaciones de S_A es idéntico al conjunto de derivaciones de A; y (ii) cada expresión puede ser decidida en una serie de pasos finitos, de acuerdo con un proceso decisorio sobre si pertenece o no pertenece a S_A.

La propuesta hilbertiana es un programa finitista. En él se propone formalizar las disciplinas matemáticas, en particular la aritmética, como sistema formal, exigiendo que la consistencia de tales sistemas fuera demostrada por medios puramente finitistas. Una alternativa, en el marco de la fundamentación matemática, es el programa recursivo. Hemos podido comprobar cómo durante 1931 se presenta una noción de recursividad esquemática que describe la manera en que se puede usar un formalismo para desarrollar una teoría matemática. En dicho proyecto se destacan cierto tipo de afirmaciones, según las cuales desarrollar una teoría consiste en ir demostrando que ciertas afirmaciones son verdaderas.

En este trabajo nos hemos centrado en considerar sólo y exclusivamente los elementos de los que consta el teorema de incompletitud de K. Gödel. A este resultado se llega por una serie de consideraciones argumentativas, que vienen a ser expuestas, durante el año 1931, de una manera ejemplar. La prueba de completitud indica que la lógica de predicados de primer orden es completa semánticamente. Sin embargo, este resultado no se puede extrapolar a los predicados de segundo orden y órdenes superiores, como demostró en 1931. La incompletitud de la lógica de predicados de segundo orden, y orden superior, no es absoluta sino relativa, es decir, relativa a determinadas interpretaciones[63]. Dicho resultado subraya la relatividad semántica del concepto de completitud: la completitud depende de los modelos presupuestos para las expresiones del sistema axiomático dado.

Otro problema viene a ser discutido en este trabajo: el de la indecidibilidad. A. Church demostraría posteriormente, mediante una tesis específica, que el cálculo de predicados de primer orden es indecidible[64]. La indecidibilidad de la lógica de predicados de primer orden, y, por lo tanto, de órdenes superiores, es un resultado indeseable para el programa hilbertiano. La reconstrucción histórica que hemos desarrollado ha sido parcial. Nos hemos centrado en analizar un proceso de conceptualización determinado. El núcleo de la prueba gödeliana -pensamos- se encuentra en la distinción terminológica entre la familia de predicados vinculados a [*W*] y la familia de conceptos en estrecha relación con [*B*]. Hemos podido comprobar cómo la elaboración carnapiana de la metalógica introduce determinados acentos en las propuestas metateóricas. Sin embargo, tenemos que esperar a la carta de E. Zermelo para poder recoger, de mano del propio K. Gödel, toda la tensión que existe entre ambos conceptos. Si bien, dicha tensión aparece en los primeros trabajos. Es interesante indicar, al respecto, que la tensión entre [*W*] y [*B*] aparece en los primeros trabajos de K. Gödel, R. Carnap la acota, pero no la elabora sistemáticamente, en parte debido a que lo que tiene *in mente* es un programa de investigación más amplio y que tres años más tarde será publicado con el título *Logische Syntax der Sprache*.

Al igual que en la historia de la matemáticas y la lógica la presentación rigurosa y sistemática de los argumentos y su acentuación en lo que denominamos *análisis matemático* requiere un periodo de gestación. La necesidad del examen crítico de sus fundamentos, de una fundamentación más sistemática y razonada surge cuando se vienen a ocupar de problemas más profundos y difíciles. Así pues, el desarrollo de una teoría precisa de una sistematización y un análisis crítico de sus fundamentos. Situarla sobre una base más firme, requiere el examen de su desarrollo conceptual. El caso de Gödel así lo atestigua.

NOTAS

1 NAGEL & NEWMAN [1970, p. 117].

2 Sobre la definición de las funciones recursivas primitivas se había llevado a cabo una serie de trabajos anteriores por DEDEKIND [1888], SKOLEM [1923], HILBERT [1925, 1927] HILBERT & ACKERMANN [1928], pero es a partir de la definición que presenta GÖDEL, K. [1931] cuando se estandariza.

3 El protocolo de dicha conferencia se encuentra en el *Wiener Kreis Archiv* de Haarlem (Holanda) bajo WK.3; Zirkelprotokoll von 15.1.1931; TD/D, pp. 1-3. La transcripción y traducción al castellano de dicho protocolo es mía.

4 GÖDEL [1930, pp. 214-215].

5 El texto original dice así: "Adjungiert man die Widerspruchfreiheit eines Systems dem System selbst - und diese Adjunktion lässt sich formal durchführen - dann wird in diesem erweiterten System ein im Ursprünglichen unentscheidbarer Satz entscheidbar, folglich kann die Widerspruchsfreiheit eines Systems im System selbst nicht gezeigt werden". [PROTOCOLO, 1931, p. 1].

6 El texto original dice así: "Wenn es einen finiten Widerspruchsbeweis überhaupt gibt, dann lässt er sich auch formalisieren". [PROTOCOLO, 1931, p. 1].

7 F. Kaufmann está haciendo alusión a los axiomas de J. Peano, según el cual, en toda clase de números hay un máximo dentro de ellos, así como un mínimo. PEANO [1889, § 3].

8 El texto que traducimos dice así: "Die isomorphe Abbildung der Schlussfiguren auf Folgen f_2 von Zahlenfolgen f_1 der [de modo correcto es "*die*"] es überhaupt erst ermöglicht, die Beweisbarkeit intern zu formulieren[,] [b]ezeichnet dann z.B. $S(f_2)$ [und] eine Schlussfigur $l(f_2)$ die "Länge" der zugehörigen Kette, dann schreibt sich die Beweisbarkeit von f_1

$$\mathrm{Bew}.f_1 \equiv (\exists f_2)\{S(f_2) \& f_2[l(f_2)] = f_2\}$$

Damit kann man sich nun begnügen oder das Symbol S weiter auflösen". [PROTOCOLO, 1931, p. 2].

9 Se hace referencia a los trabajos de HEYTING [1930, pp. 42-56; 1930a, pp. 57-71 y 158-169].

10 Se refiere, probablemente, al propuesto en WHITEHEAD & RUSSELL [1910-13].

11 Véanse al respecto los argumentos esbozados en contestación a H. Hahn y F. Kaufmann en PROTOCOLO [1931, pp. 1 y 3, respectivamente].

12 PROTOCOLO [1931, p. 1].

13 PROTOCOLO [1931, p. 3].

14 H. Hahn se refiere a los trabajos de N.N. Lusin indistintamente. Ya que se refiere al "libro", entonces está indicando: LUSIN, N.N. (1930). Seguramente H. Hahn conocería también el artículo LUSIN [1927].

15 El enunciado de Goldbach afirma que todo número par es suma de dos números primos. Véase el argumento al respecto en GÖDEL [1931, nota 61]. (El teorema de Fermat con simbolismo algebráico dice que si n es un número entero mayor que dos, y si x, y, z son números enteros no nulos, entonces la ecuación $x^n + y^n = z^n$).

16 El texto dice lo siguiente: "[Um] 1/2 8 [findet der] Zirkel [statt]. Mein Vortrag (1.) über Metalogik (im mathematischen Institut) ich spreche ohne Diskussion 1 1/2 Stunden lang". [TAGEBÜCHER, 1930-1933, p. 276. La traducción y las correcciones son mías]. (Agradezco a la Rudolf Carmap Collection. Special Collections Department. University of Pittsburgh Libraries el permiso concedido para citar los textos siguientes. Como es preceptivo, están reservados todos los derechos de conformidad en lo dispuesto en la autorización preceptiva).

17 La nota afirma lo siguiente: "... Abends [findet der] Zirkel [statt]. Mein zweiter Vortrag über Metalogik, [ich habe] die ganze Zeit gesprochen, ohne Diskussion". [TAGEBÜCHER, 1930-1933, p. 277. La traducción y las correcciones son mías].

18 La nota dice lo siguiente: "1/2 4 [führte ich] Übungen [durch] ... [Im] Zirkel [gab es eine] Diskussion über meine Metalogik. Letzter Zirkel. (Für mich überhaupt letzter?)". [TAGEBÜCHER, 1930-1933, p. 281. La traducción y las correcciones son mías].

19 De estos trabajos resultará el libro sobre la sintaxis lógica del lenguaje. La repercusión de las tres conferencias sobre CARNAP [1934] ha sido indicado escuetamente en la *Autobiografía* de R. Carnap. Véase SCHILPP [1991, p. 54]. Las diferenciaciones más acuciantes entre ambos escritos han sido analizadas en PADILLA GALVEZ [1993, pp. 467 ss.].

20 El texto reza del siguiente modo: "... Er fragt Verschiedenes zur Metalogik. [Er ist der Meinung] Sie selbst sei nicht eine Theorie, sondern wieder ein Kalkül. Ich: Ja, [ich glaube, daß sie] wie die Geometrie [ist], ein Kalkül mit einem bevorzugten Anwendungsgebiet". [TAGEBÜCHER, 1930-1933, p. 282. La traducción y las correcciones son mías].

21 El texto que traducimos dice en el original: "[Am] Nachmittag [war] Gödel hier. [Wir sprachen] Über meine Metalogik; [Er kam zu dem Ergebnis,] sie sei widerspruchsfrei; also enthält sie nicht die klassische Mathematik, sondern im Wesentlichen die Intuitionistische". [TAGEBÜCHER, 1930-1933, p. 283]. (La traducción y las correcciones son mías).

22 El original dice: "Unter Metalogik verstehe ich die Theorie der Formen, die in einer Sprache auftreten, also die Darstellung der Syntax der Sprache". [ZIRKELPROTOKOLL, 1931, I, (11.6.1931), p. 1].

23 Este tema viene a ser analizado extensamente en CARNAP [1934, § 16].

24 Esta diferenciación viene a ser recogida de nuevo en CARNAP [1934, § 16, p. 44].

25 ZIRKELPROTOKOLL [1931, I, (11.6.1931), p. 2 s].

26 Consecuentemente, el límite superior del ámbito [n]111(P(xn)) puede ser expresado como la conjunción de las siguientes sentencias: P(x)&P(x1)&P(x11)&P(x111). R. Carnap presenta una interpretación constructivista de los cuantificadores.

27 Lo mismo que para el cuantificador universal, para el cuantificador existencial se introduce una comprensión constructivista.

28 ZIRKELPROTOKOLL [1931, I, (11.6.1931), p. 3 ss].

29 Véase la reseña posterior que hace CARNAP [1934, p. 188 ss]. También se pueden consultar los trabajos de WHITEHEAD & RUSSELL [1910-13, pp. XIV y 659 ss.] y WITTGENSTEIN [1921].

30 Véase ZIRKELPROTOKOLL [1931, I, (11.6.1931), p. 6] que coincide en gran medida con CARNAP [1934, § 9, p. 24 s.].

31 ZIRKELPROTOKOLL [1931, II, (18.6.1931), p. 1]. Ninguna de estas definiciones son desechadas en su trabajo posterior, pero aparecen en ordenes diferentes. Así pues, Gr(m,n) aparece como D 9. de la siguiente manera Gr(x,y) $\equiv$(Grgl($x,y\bullet \sim (x=y)$)) y Tlb(m,n) es definido en D 10. de la siguiente manera: Tlb(x,y) $\equiv (\exists u)x(x=\mathrm{prod}(y,u))$. CARNAP [1934, p. 52]. Del mismo modo Prim(m)

es definido mediante D 11. del siguiente modo: Prim $(x) \equiv (\sim(x=0) \bullet \sim (x=1) \bullet (u)x((u=1 \vee (u=x) \vee \sim \mathrm{Tlb}(x,u)))$. [CARNAP, 1934, § 4, pp. 15/52].

32 ZIRKELPROTOKOLL [1931, II, (18.6.1931), p. 1 s].

33 ZIRKELPROTOKOLL [1931, II, (18.6.1931), p. 2].

34 ZIRKELPROTOKOLL [1931, II, (18.6.1931), p. 2 s].

35 ZIRKELPROTOKOLL [1931, II, (18.6.1931), p. 3 ss].

36 ZIRKELPROTOKOLL [1931, II, (18.6.1931), p. 6 ss].

37 ZIRKELPROTOKOLL [1931, II, (18.6.1931), p. 6 s].

38 ZIRKELPROTOKOLL [1931, II, (18.6.1931), p. 8 s].

39 ZIRKELPROTOKOLL [1931, II, (18.6.1931), p. 8].

40 ZIRKELPROTOKOLL [1931, II, (18.6.1931), p. 9].

41 ZIRKELPROTOKOLL [1931, II, (18.6.1931), p. 9].

42 ZIRKELPROTOKOLL [1931, III, (25.6.1931), p. 1].

43 ZIRKELPROTOKOLL [1931, III, (25.6.1931), p. 1 s.]. Dicha aritmetización se debe a que se opera mediante determinadas construcciones del tipo *demostrable con 1000 símbolos* que sólo son definibles mediante la aritmetización.

44 ZIRKELPROTOKOLL [1931, III, (25.6.1931), p. 2 ss].

45 El texto original dice: "Gödel kann sich mit den arithmetischen Begriffen begnügen, da er sich mit der Arithmetik befasst. Da wir aber die physikalischen Gebilde, d.h. Zeichenkombinationen, beschreiben wollen, müssen wir auch noch diese empirischen Begriffen aufstellen. Da wir nur physikalische Gebilde, nämlich Reihen von Sprachzeichen, beschreiben, können wir die Metalogik in unserer gewöhnlichen Sprache ausdrücken und zwar so, dass dies den Ansichten Wittgensteins nicht widerspricht. Es handelt sich hier nicht um Sätze über eine Art von Sätzen, sondern um Sätze, teils singuläre, teils konditionale, über physikalische Gebilde". ZIRKELPROTOKOLL [1931, III, (25.6.1931), p. 4].

46 ZIRKELPROTOKOLL [1931, III, (25.6.1931), p. 4].

47 WITTGENSTEIN 1921, 5.54 ss.

48 Este argumento merece ser tratado aparte, por lo que no va a ser analizado en este trabajo y será tematizado en otro posterior.

49 ZIRKELPROTOKOLL [1931, III, (25.6.1931), p. 7].

50 La discusión tiene un preámbulo, en el encuentro de E. Zermelo y K. Gödel en el *Jahrestagung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* que se llevó a cabo en Bad Elster en septiembre de 1931. Según la carta de E. Zermelo a R. Baer del 7.10.1931, hubo repulsa a una discusión conjunta de su conferencia con la que presentaba K. Gödel y que llevaba como título *Über die Existenz unentscheidbarer arithmetischer Sätze in der formalen Systemen der Mathematik*. Dicho encuentro fue el motor gestor de la discusión epistolar que seguidamente trataremos.

51 D. Hilbert presentó una ponencia en Bolonia sobre la fundamentación en las matemáticas. En dicha ponencia presentó cuatro problemas que aún quedaban por resolver: (i) Prueba de consistencia finita del cálculo funcional de segundo orden; (ii) extensión de dicha prueba a la teoría simple de tipos; (iii) demostración de la completitud de los sistemas axiomáticos para el análisis y la teoría de números; y, (iv) resolución de la completitud de la lógica de primer orden en el sentido de que todas las sentencias válidas son demostrables. Véase HILBERT [1928, pp. 135 ss.].

52 HILBERT [1928, pp. 135 ss.].

53 GÖDEL [1931, p. 175].

54 Véase la carta de E. Zermelo a K. Gödel escrita el 21.9.1931 en DAWSON [1985, p. 68]. El texto original dice lo siguiente: "Lassen Sie in Ihrer Formel (1) die Zeichenverbindung "*Bew*" fort und schreiben dafür

(1)* $n \in K^* \equiv \overline{[R(n);n]} \equiv S^*$,
setzen Sie dann wieder $S^*=R(q^*)$, so folgt, daß der Satz
$A^*=R(q^*;q^*)$
weder "wahr" *noch* "falsch" sein kann, d. h. Ihre Annahme führt auf einen *Widerspruch*, analog der Russel[l]'schen Antinomie". [La transcripción y corrección (entre corchetes) del manuscrito alemán es mía].

55 El texto dice: "Der Fehler beruht -ebenso wie in der Richard'schen und der Skolen'schen Paradoxie- auf der (irrigen) Voraussetzung, daß jeder mathematisch definierbare Begriff durch eine "endliche Zeichenverbindung" (nach einem *festen System*!) ausdrückbar sei, also das, was ich das "finitistische Vorurteil" nenne". [DAWSON, 1985, p. 68]. La traducción y corrección del texto alemán (entre corchetes) es mía].

56 El texto original dice: "Sie definieren eine Klasse K^* durch die Festsetzung: "*n* gehört zu K^*, wenn $[R(n);n]$ nicht *richtig* ist", während ich eine Klasse K definiere durch: "*n* gehört zu K, wenn $[R(n);n]$ nicht *beweisbar* ist". Die Annahme, dass K^* durch ein Klassenzeichen des gegebenen Systems ausdrückbar ist, führt dann auf einen Widerspruch (dies ist aber nicht meine, sondern Ihre Annahme)". [GRATTAN-GUINNESS, 1979, p. 298 s. La traducción y corrección (entre corchetes) del texto alemán es mía].

57 El texto que traducimos dice en el original: "Ein Negationsstrich hat ja nur Sinn über einer Zeichenverbindung, die eine Behauptung ausdrückt (über der Ziffer 5 etwa ist ein Negationsstrich sinnlos). Die Zeichenverbindung "$[R(n);n]$" drückt aber *keine Behauptung* aus. "$[R(n);n]$" ist ja gleichbedeutend etwa mit folgenden deutschen Worten: "diejenige Formel der Principia Mathematica, welche aus dem *n*-ten Klassenzeichen bei Ersetzung der Zahl *n* für die Variable entsteht." "$[R(n);n]$" ist nicht etwa selbst diese Formel, "$[R(n);n]$" ist ja überhaupt keine Formel der Principia Mathematica, (denn das Zeichen [;] kommt ja gar nicht in der Principia Mathematica vor), sondern "$[R(n);n]$" ist lediglich eine Abkürzung der unter Anführungszeichen stehenden deutschen Worte". [GRATTAN-GUINNESS, 1979, p. 299. La traducción es mía].

58 El texto original reza así: "Die ganze Schwierigkeit rührt offenbar daher, dass es in der Metamathematik ausser den Zeichen für Zahlen, Funktionen etc. auch *Zeichen für Formeln* gibt und dass man ein Symbol, welches eine Formel bezeichnet, deutlich unterscheiden muss von dieser Formel selbst". [GRATTAN-GUINNESS, 1979, pp. 299 s. La traducción y corrección del texto alemán es mía].

59 La denominación [*W*] se debe a la noción *Wahr* (verdad).

60 La noción [*B*] procede del término *Beweisbar* (demostración).

61 GRATTAN-GUINNESS [1979, pp. 298 ss.]. La sistematización que propongo viene esparcida por toda la carta de manera un tanto asistemática.

62 El texto que citamos dice así: "Also *nur* für die "*beweisbaren*" Sätze Ihres "PM-Systems", nicht für dessen Sätze überhaupt soll Ihre "finitistische Einschränkung" (wie ich es nenne) der Typenbildung zur Geltung kommen,

während Sie für die *Sätze* des Systems *freie* Neubildungen nach Art des Cantorschen Diagonalverfahrens zulassen. Dann erhalten Sie natürlich ein *nicht abzählbares* System möglicher Sätze, unter denen nur eine *abzählbare* Teilmenge "beweisbar" wäre, und es muss sicherlich "unentscheidbare" Sätze geben". [GRATTAN-GUINNESS, 1979, p. 302].

63 Mediante una generalización del concepto de modelo pudo demostrar L. Henkin posteriormente que también dichos sistemas lógicos son completos.

64 A. Church mostró, suponiendo la tesis de que toda función recursiva es efectivamente computable, que el sistema de lógica de predicados de primer orden desarrollado por HILBERT & ACKERMANN [1928] es indecidible. Véase CHURCH [1936, 40 s. La traducción y corrección del texto alemán es mía].

BIBLIOGRAFIA

CARNAP, R. (1934) *Logische Syntax der Sprache*. Viena, Julius Springer.

CARNAP, R. (1994) "Metalógica/Metalogik". (Edición, traducción y notas de Jesús Padilla Gálvez). *Mathesis, 10,* 19-70.

CHURCH, A. (1936) "A note on the Entscheidungsproblem". *The Journal of Symbolic Logic, 1*, 40-41.

DAWSON, J.W. (1985) "Completing the Gödel-Zermelo Correspondence". *Historia Mathematica, 12*, 66-70.

DEDEKIND, R. (1888) *Was sind und was sollen die Zahlen*. Braunschweig, Friedr. Vieweg.

GÖDEL, K. (1930) "Einige metamathematische Resultate über Entscheidungsdefinitheit und Widerspruchsfreiheit". *Anzeiger der Akademie der Wissenschaften in Wien, mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse, 67*, 214-215. [Trad. cast.: GÖDEL 1981, 42-43].

GÖDEL, K. (1930a) "Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionskalküls". *Monatshefte für Mathematik und Physik, 37*, 349-360. [Trad. cast.: GÖDEL 1981, 20-34].

GÖDEL, K. (1931) "Über formal unentscheidbare Sätze der *Principia Mathematica* und verwandter Systeme I". *Monatshefte für Mathematik und Physik, 38*, 173-198. [Trad. cast.: GÖDEL 1981, 55-89].

GÖDEL, K. (1981) *Obras completas*. (Intro. y trad. de J. Mosterín). Madrid, Alianza.

GÖDEL, K. (1986 ss.) *Kurt Gödel. Collected Works*. Vol. I/II. Oxford, Oxford Univ. Press.

GRATTAN-GUINNES, I. (1979) "In Memoriam Kurt Gödel: His 1931 Correspondence with Zermelo on his Incompletability Theorem". *Historia Mathematica, 6*, 294-304.

HEYTING, A. (1930) "Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik". *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften. Physikalisch-Mathematische Klasse II*, 42-56.

HEYTING, A. (1930a) "Die formalen Regeln der intuitionistischen Mathematik". *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften. Physikalisch-Mathematische Klasse II*, 57-71, 158-169.

HILBERT, D. (1900) "Mathematische Probleme. Vortrag gehalten auf dem internationalen Mathematiker-Kongress zu Paris". *Archiv der Mathematik und Physik, 1 (3ª serie)* 1991, 44-63, 213-237.

HILBERT, D. (1904) "Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik". En: *Verhandlungen des Dritten Internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg vom 8. bis 13. August 1904*. Leipzig, Teubner, pp. 174-185.

HILBERT, D. (1925) "Über das Unendliche". *Mathematische Annalen, 95*, 161-190.

HILBERT, D. (1927) "Die Grundlagen der Mathematik". *Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität, 6*, 65-85.

HILBERT, D./ACKERMANN, W. (1928) *Grundzüge der theoretischen Logik*. Berlín, Springer.

HILBERT, D. (1929) "Probleme der Grundlegung der Mathematik". En: *Atti del Congresso internationale dei matematici, Bologna 3-10 settembre 1928*. Bologna, vol. 1, pp. 135-141.

ŁUKASIEWICZ, J./TARSKI, A. (1930) "Untersuchungen über den Aussagenkalkül". *Sprawozdania z posiedzeń Towarzystwa Naukowego Warszawskiego, Wydzial III, 23*, 30-50.

LUSIN, N.N. (1927) "Sur les ensembles analytiques". *Fundamenta mathematicae, 10*, 1-95.

LUSIN, N.N. (1930) *Leçons sur les ensembles analytiques et leurs applications*. Paris, Gauthier-Villars.

NAGEL, E./NEWMAN, J.R. (1970) *El teorema de Gödel*. Madrid, Tecnos.

NEUMANN, J.v. (1927) "Zur Hilbertschen Beweistheorie". *Mathematische Zeitschrift, 26*, 1-46.

PADILLA GALVEZ, J. (1993) "Los presupuestos metalógicos de la Sintaxis Lógica del Lenguaje". En: *Actas del I Congreso de la Sociedad de Lógica, Metodología y Filosofía de la Ciencia en España*. Madrid, UNED, pp. 467-471.

PADILLA GALVEZ, J. (1994): "La metalógica en la propuesta de R. Carnap". *Mathesis, 10*, 1-18.

PEANO, J. (1889) *Arithmetices principia, nova methodo exposita*. Turin, Fratres Bocca.

PROTOCOLO (1931) *Über Widerspruchsfreiheit und Entscheibarkeits in Axiomensystemen*. Wechselrede z.(Referat Herrn Gödels). Protokoll am 15.I.1931. En: *Wiener Kreis Archiv*. Haarlem (Holanda), WK.3; TD/D, pp. 1-3.

SCHILPP, P.A. (1991) *The Philosophy of Rudolf Carnap*. La Salle, Ill. Open Court.

SKOLEM, Th. (1923) "Begründung der elementaren Arithmetik durch die rekurrierende Denkweise ohne Anwendung scheinbarer Veränderlichen mit unendlichem Ausdehnungsbereich". *Videnskapsselskapets skrifter, I. Matematisk-naturvidenskabelig klasse*, nº 6.

TAGEBÜCHER (1930-1933): *Carnap's* Tagebücher von 1.6.1930 bis 30.6.1933. En: *Wiener Kreis Archiv*. Haarlem (Holanda), [X.4].

TARSKI, A. (1930) "Über einige fundamentale Begriffe der Metamathematik", *C. R. Soc. Sciences Varsovie, 23*, Cl. III.

WHITEHEAD, A.N./RUSSELL, B. (1910-13) *Principia Mathematica*. Cambridge, Cambridge Univ. Press.

WITTGENSTEIN, L. (1921) "Tractatus logico-philosophicus". *Annalen der Naturphilosophie*, *14*, 185-162. [Reimpr. en: *Schriften von L. Wittgenstein*, Frankfurt a.M., Suhrkamp, 1960 ss.].

ZIRKELPROTOKOLL (1931) *Metalogik*. Zirkellprotokoll vom 11. Juni 1931, pp. 1-9; v. 18. 6. 1931, pp. 1-9; v. 25. Juni 1931, pp. 1-8. En: *Wiener Kreis Archiv*. Haarlem (Holanda), WK.14-16. Trad. cast.: [CARNAP, R. (1994), 19-70]