LLULL, vol. 16, 1993, 587-620

NUEVOS DATOS SOBRE LOS ESTUDIOS DE GEOMETRIA SUPERIOR EN ESPAÑA EN EL SIGLO XIX: LA APORTACION MILITAR*

Mª ANGELES VELAMAZAN
Universidad Zaragoza

RESUMEN

En este artículo se analiza la aportación científica militar española a las diversas ramas de la Geometría desarrolladas en el siglo XIX -descriptiva, analítica, del movimiento, diferencial y proyectiva-. En España el Ejército de Tierra contribuyó al estudio de estas disciplinas y lo hizo normalmente a través el profesorado de sus Academias militares, que destacó en su papel investigador -Mariano Zorraquín con su unión de las Geometrías descriptiva y analítica-, docente -Fernando García San Pedro con su planteamiento didáctico de la Geometría del movimiento- e importador de nuevas teorías -Luis Felipe Alix y la perspectiva axonométrica-. Docentes o no, los militares, en general, contribuyeron con su trabajo y su abundante producción de manuales de Geometría a la difusión de esta ciencia en España.

ABSTRACT

This work analyzes the scientific military Spanish contribution to the 19th-century branches of Geometry -descriptive, analytic, motion, differential and proyective Geometry-. The Spanish Army contributed to the study of these disciplines normally through the teaching staff of its military academies. This teaching staff stood out in the field of research -Mariano Zorraquín and his unification of descriptive and analytic Geometry, in the educational aspect -Fernando García San Pedro and his didactic approach to Geometry of motion, and importing new thories -Luis Felipe Alix and axonometric perspective. Professors or not, military men contributed with their work and rich production of manuals of Geometry to the diffusion of this science in Spain.

---

* Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el Proyecto de Investigación DGICYT PB90-0592 sobre *Las Matemáticas en España en la Edad Contemporánea (1808-1936).*

Recibido el 8 de julio de 1993

Palabras clave: Matemáticas, Geometría, España, Siglo XIX, Ejército, Academias, Instituciones, Mariano Zorraquín, Educación.

La Geometría fue una asignatura presente en la formación académica de las armas facultativas del Ejército de Tierra español y hubo -sobre todo en Geometría descriptiva- bastantes militares que escribieron o bien libros de texto o bien trabajos sobre ella.

Si en la redacción de obras de Cálculo diferencial e integral sólo pueden citarse, dentro de los militares, a los ingenieros y a los artilleros[1], en el caso de la Geometría sus principales redactores fueron también de estas dos armas, pero puede citarse algún oficial del Estado Mayor y de Infantería que escribieron trabajos sobre ella.

A principios del siglo XIX los artilleros utilizaban en la enseñanza académica de la Geometría analítica el texto de Giannini, cuya redacción corresponde a finales del siglo XVIII. Posteriormente los artilleros que escribieron obras -no todas libros de texto- para estas disciplinas fueron: J. Odriozola, que publicó en 1829 el Tomo III de su *Curso Completo de Matemáticas Puras* titulado *Algebra sublime y Geometría analítica;* J. Bielsa (1846), con el *Tratado elemental de Geometría descriptiva y Sombras,* que fue el primer profesor de la Academia de Artillería que redactó un libro de texto sobre esta disciplina; F. Sanchiz y Castillo quien, al igual que Odriozola, fue un autor prolífico en textos de matemáticas y en 1851 publicó un *Tratado de Geometría analítica;* L.F. Alix -director de la revista el *Memorial de Artillería* desde 1882 a 1885-, que en 1866 publicó un texto sobre *Geometría descriptiva;* C. Sebastián (1872), que tradujo la *Geometría analítica* de C. Comberousse; J. Cabanyes (1880), autor de un texto de *Geometría descriptiva;* V. Correa y Palavicino (1881), autor también de un texto sobre *Geometría descriptiva;* A. Valcarce Quiñones (1892), con los *Elementos de la Geometría analítica* y J.J. Durán y Loriga, que publicó en 1891 *Tres capítulos de Geometría superior.*

En los ingenieros la Geometría analítica no apareció explícitamente citada en el primer plan de estudios de la Academia en el siglo XIX, aunque en el texto de Pedro Padilla, utilizado en la enseñanza, sí que había Geometría analítica -en el tomo IV de su *Curso Militar de Mathematicas* publicado en 1756-.

A principios del siglo XIX en la Academia de Ingenieros hubo un movimiento a favor de la redacción de libros de texto para la enseñanza, para lo cual se creó una comisión formada por varios oficiales. En agosto de 1807, en el informe[2] emitido por esta comisión, consta que Antonio Sangenís estaba escribiendo el *Tratado analítico de las secciones cónicas.* La Guerra de la Independencia -en la que murió Sangenís- paralizó todo el trabajo.

Después de la Guerra la situación cambió. En el año 1819 un profesor de este centro, Mariano Zorraquín, escribió el tratado de *Geometría analítico-descriptiva* -hasta la fecha el primer libro de texto sobre Geometría descriptiva escrito por un español-. Un discípulo de Mariano Zorraquín, el entonces alumno Fernando García San Pedro, realizó una pequeña Memoria sobre *Geometría analítica* que se publicó en 1821. Más tarde García San Pedro, ya como profesor de la Academia de Ingenieros, escribió el libro de texto *Principios de Geometría analítica elemental* publicado en 1840. Después escribieron sobre estas disciplinas: Angel Rodríguez Arroquía (1850), autor del *Complemento a la Geometría descriptiva;* Manuel Díez de Prado (1852) -sucesor de las clases de García San Pedro-, que redactó las *Lecciones de Trigonometría esférica y Geometría analítica;* Pedro Pedraza, autor de un texto de *Geometría descriptiva;* Pedro Pedraza y Miguel Ortega (1879), que redactaron un texto de *Geometría descriptiva*; Miguel Ortega (1885), que escribió un texto de *Geometría* enormemente reeditado; Lorenzo Gallego Carranza (1886), que escribió también un texto de *Geometría descriptiva;* J. Montero Gabutti (1887), autor de un manual de *Geometría proyectiva* y Enrique Valenzuela, quien en 1896 publicó la *Axonometría rectangular o perspectiva axonométrica rectangular.*

Algunos oficiales de Estado Mayor también escribieron textos sobre Geometría: Angel Alvárez (1849) sobre *Geometría analítica,* U. Mas y Abad (1879) con su traducción del *Curso de Geometría descriptiva* de Olivier y R. Aparici (1881) con sus *Lecciones de Geometría descriptiva.*

Finalmente, oficiales de Infantería que también redactaron textos -fundamentalmente de Geometría descriptiva- fueron: J. Jiménez y Baz (1857), A. Lozano y Ascarza (1866), E. Orozco y de la Puente (1881), J. López Torrens (1881) y J. Montemayor (1895), todos ellos sobre *Geometría descriptiva;* P.A. Berenguer (1895) sobre *Geometría analítica* y F. Salazar y de la Vega (1896) sobre *Principios y reglas fundamentales de perspectiva lineal.*

Como se observa, la Geometría que tuvo un mayor cultivo o redacción de trabajos fue la Geometría descriptiva.

Ciertamente esta ciencia era conocida en España al poco tiempo de su creación. Así, las lecciones que Gaspard Monge (1746-1818) dio en l'Ecole Normale en 1794-1795 se publicaron en el libro *Géométrie Descriptive.* Sólo unos años más tarde, en 1803, había en España una traducción al castellano de estas lecciones para el uso de los estudios de la Inspección General de Caminos.

También la Geometría analítica conoció en este final del siglo XVIII y principios del XIX un nuevo impulso, cuya paternidad, según afirma Boyer, hay que atribuirla principalmente a Monge:

"La Geometría analítica, que había permanecido eclipsada por el Cálculo durante más de un siglo, consiguió de pronto que se le reconociera un lugar por derecho propio en las escuelas; la paternidad de esta 'revolución analítica' hay que atribuirla principalmente a Monge. Entre los años 1798 y 1802 aparecieron cuatro Geometrías analíticas elementales de las plumas de Sylvestre François Lacroix (1765-1843), Jean Baptiste Biot (1774-1862), Louis Puissant y F.L. Lefrançais, todas ellas inspiradas directamente por las lecciones dadas en la Ecole Polytechnique"[3].

Los militares españoles no fueron ajenos a este impulso geométrico francés y, terminada la Guerra de la Independencia (1808-1814), cuando ingenieros y artilleros establecieron sus nuevos planteamientos de enseñanza, la Geometría analítica y la descriptiva entraron claramente en su formación académica.

Esta incorporación científica francesa tuvo su acogida en el ingeniero militar español Mariano Zorraquín, quien no se limitó a traducir las obras francesas sino que realizó un libro de texto desarrollando conjuntamente ambas geometrías. Su título fue *Geometría analítica-descriptiva* y se publicó en Alcalá de Henares en 1819.

En el prólogo de su obra Zorraquín valoró positivamente el trabajo de la Academia en sus cinco primeros años de funcionamiento -desde 1803 a 1808-, afirmando que *dejaba esperar que en breve se hubiera elevado a un grado de perfección y esplendor que rivalizase con las más acreditadas...*, pero... *los acontecimientos de 1808, la invasión de nuestro territorio, y las calamidades públicas exigieron que sacrificándolo todo se volase al socorro de la Patria amenazada de una inminente esclavitud.*

Tras el paréntesis de la Guerra, en 1815 la Academia empezó a reorganizarse. Por esto y porque el Rey les había otorgado *una dotación*, Zorraquín afirmaba que *podemos representarnos en un lisonjero porvenir el auge de esplendor y utilidad a que llegará esta institución, y la gloria del Soberano proporcional a la de los Cuerpos científicos que proteje (sic)*. Poco podía sospechar entonces Zorraquín -quien más tarde, en el Trienio Liberal, llegó a ser nombrado Ministro de la Guerra- que el lisonjero porvenir pronto se vería truncado por el Soberano protector de los Cuerpos científicos.

También en el prólogo Zorraquín comenta que una de las mayores dificultades de este centro era la falta de libros de texto en castellano que satisficiera completamente el plan de estudios propuesto en esta nueva etapa. De momento en matemáticas utilizaban la obra de José Mariano Vallejo, pero en la Academia las enseñanzas tenían más extensión que la presentada en este texto y por eso él había redactado un nuevo manual.

Otra razón que alega para escribir este libro era el reunir la Geometría descriptiva y la analítica formando de las dos un sólo cuerpo.

Sobre esta unión Zorraquín indica que estas Geometrías son la expresión algebraica y la representación gráfica de todo problema, por lo que deben combinarse en concordancia con los deseos de Monge de enseñar ambas ciencias a la vez.

Tras la presentación que M. Zorraquín realizó de su trabajo está el Informe que la Academia de Ingenieros emitió sobre él. En dicho informe participaron el jefe de estudios, Luis María de Balanzat, y los profesores Tomás de Soldevilla, Bartolomé de Amat, Vicente Montero de Espinosa y Diego Gálvez, y de él cabe destacar la afirmación de que en la primera parte de la obra -que trata de la aplicación del Algebra a la Geometría- se exponían las ideas de Carnot (1753-1823) y de que el texto de Zorraquín podía considerarse como original, puesto que en todas las obras publicadas hasta entonces sobre Geometría descriptiva *-incluida la de M. Valleé de ese año-* se hallaban expuestos sus principios independientemente de la analítica.

La conclusión de este informe decía:

"Por lo dicho, y por los métodos que ha seguido en la exposición de todos los asuntos, somos de parecer que ha llenado como podía desearse el objeto que se ha propuesto; que su obra será muy provechosa á los que se dediquen al estudio de las Matemáticas, y que nuestro establecimiento en particular sacará grandes ventajas de admitirla por texto" [pp. XVIII-XIX].

En vista de este informe el Ingeniero General, Joaquín Blake y Joyes, declaró esta obra libro de texto en la Academia.

El libro de Mariano Zorraquín[4] está dividido en dos secciones, la primera titulada *analísis determinada* -un capítulo- y la segunda *analísis indeterminada* -cuatro capítulos-.

Zorraquín indica que dos son los objetos de la Geometría analítica: resolver las cuestiones geométricas por el análisis e interpretar geométricamente o construir las fórmulas analíticas, de aquí la división de su libro en análisis determinado e indeterminado respectivamente.

El análisis determinado consta de un sólo capítulo, titulado *Construcciones y Problemas*, con cuatro apartados: *Ecuaciones de primer grado*, *Ecuaciones de segundo grado*, *Problemas* y *Signos de las cantidades en la Geometría analítica*. Cabe destacar que en este último apartado se utilizan las ideas de Carnot expuestas en la *Géométrie de position* sobre las cantidades negativas que resultan como soluciones de los problemas de geometría.

Sobre Carnot, Boyer [p. 606] explica que en 1801 había publicado su *De la corrélation des figures de la géométrie* y que con esta obra intentaba establecer para la Geometría pura un nivel de generalidad comparable al que entonces tenía la Geometría analítica[5]. En ella Carnot demostraba que varios de los teoremas de Euclides podían considerarse como casos particulares de teoremas más generales, y por lo tanto bastaba con una única demostración para todos los casos. El ejemplo citado es el siguiente: en los *Elementos* está el teorema que dice que si dos cuerdas AD y BC en una circunferencia se cortan en un punto K, entonces el producto de AK por KD es igual al producto de BK por KC (fig. 1). Después hay otro teorema que afirma que si KDA y KCB son secantes a la circunferencia por el punto exterior K, entonces el producto de AK por KD es igual al producto de BK por KC. Carnot considera estos dos teoremas como simples casos particulares, relacionados por el uso de cantidades negativas, de una propiedad general de rectas y circunferencias. El afirma que, considerando para el caso de las cuerdas CK = CB - BK y para las secantes CK = BK - CB, la relación AK·KD = CK·KB puede ser transferida de un caso al otro simplemente por un cambio de signo. Y el caso de la tangencia no es más que otro caso particular en el que B y C, por ejemplo, coinciden de manera que BC = 0.

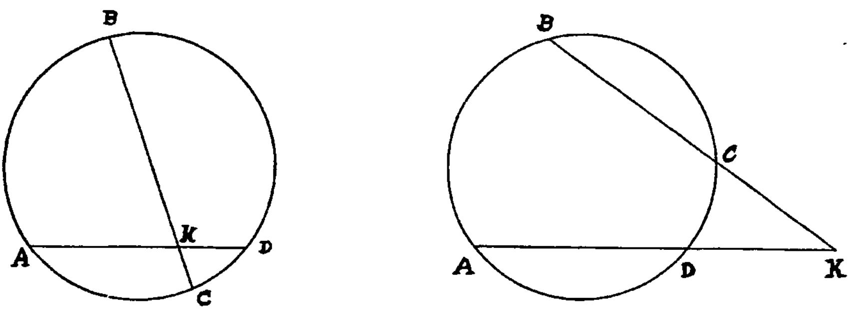


Figura 1

Zorraquín también analiza este mismo hecho, planteando la figura de la siguiente manera:

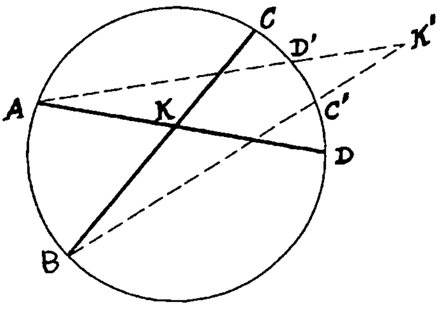


Figura 2

Primeramente él ha definido lo que es una *cantidad directa* y una *cantidad inversa*. Si en la siguiente figura (fig. 3) se comparan las dos cantidades BC, BD del sistema ABC con sus homólogas B'C', B'D del AB'C', se observa en el primero BC > BD y en el segundo B'C' > B'D; en este caso se dice que dichas cantidades están en orden directo mas si, por el contrario, la que era mayor en el primer sistema pasa a ser menor en el segundo estarán en orden inverso. Así pues la diferencia de dos cantidades es *directa o inversa* según estén en orden directo o inverso; de este modo DC = BC - BD y DC = B'C - B'D son directas mientras que DC = BC - BD y DC" = BD - BC" son inversas.

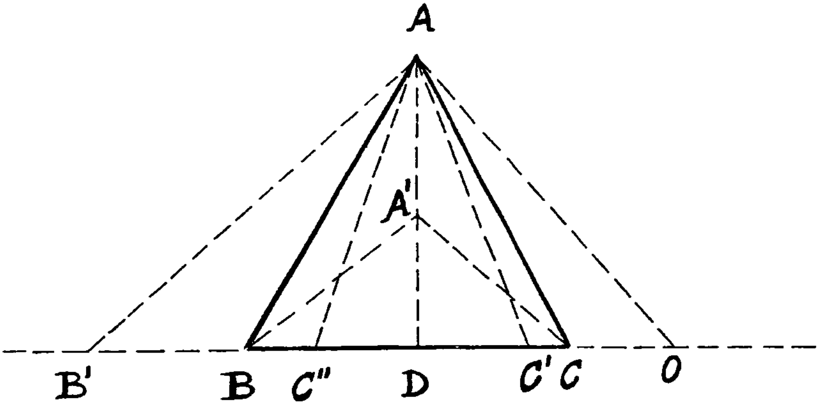


Figura 3

Concretamente para la figura 2, Zorraquín explica que la fórmula AK·DK = BK·CK indica que las cuerdas AD, BC se cortan en K. Si el sistema toma la posición AK'B será AK'·D'K' = BK'·C'K', cuyos dos términos son del mismo signo, pues si por una parte CK ha pasado a ser inversa, por otra lo es también CD.

La Geometría de posición de Carnot se publicó en 1803, por lo que la Sección I del texto de Zorraquín, que en principio era una parte clásica de las matemáticas, terminó con una aportación moderna: la introducción de las correlaciones de figuras de Carnot.

En la Sección II Zorraquín empieza justificando la Geometría cartesiana como método de trabajo más profundo que el de la Sección I.

En ella se analizan sucesivamente, en cuatro capítulos, las ecuaciones indeterminadas de primer y segundo grado entre dos o tres variables y su representación geométrica.

El primer capítulo de esta Sección II se titula *Ecuaciones de primer grado entre dos variables* y consta de cuatro apartados: el primero trata de la determinación de rectas, intersecciones y ángulos en un plano; el segundo de la obtención de los puntos notables de un triángulo -que se coloca en situación favorable respecto a los ejes, por ejemplo un vértice en el origen y un lado sobre la abscisa-; el tercero, de la transformación de coordenadas en el plano; y el cuarto, del punto y de la línea recta en el espacio, tratadas a la vez analítica y descriptivamente -un enfoque plenamente original-.

Zorraquín indica que la Geometría descriptiva tiene dos objetos: el primero establecer reglas para hacer sobre el papel construcciones que suplan las que realmente existen fuera en el espacio; y el segundo deducir de la descripción exacta de los cuerpos sus propiedades. Después añade:

"Tal es la idea que debe formarse de la Geometría descriptiva. El célebre M. Gaspard Monge ha sido el primero que ha reunido sus principios en cuerpo de doctrina, en cuya exposición ha seguido un método puramente geométrico. Si su obra prueba que puede tratarse así, y sus teorías van acompañadas de la claridad propia de la Geometría, no es menos cierto que á menudo se hace preciso suponer algunos principios que solo pueden demostrarse a lo menos con generalidad por el análisis, e interrumpir la marcha de las investigaciones por no alcanzar a otras más elevadas las fuerzas de aquel método, empleando sin embargo con utilidad cuando se suponen escasos o ningunos conocimientos analíticos. Por estas razones el citado Autor manifiesta cuan ventajoso sería que estas dos ciencias se cultivasen a un mismo tiempo; la Geometría descriptiva introduciría en los cálculos los más complicados la evidencia que les distingue, recibiendo del análisis la generalidad que la (sic) falta. Para aprender las matemáticas, dice, del modo más ventajoso es menester acostumbrarse a conocer desde el principio la correspondencia recíproca de sus operaciones, ponerse en estado de escribir en análisis todas las combinaciones y movimientos que puedan concebirse en el espacio y adquirir facilidad en representarse continuamente los sistemas que en cada expresión analítica se hallan escritos. Tal es el camino que vamos a seguir" [pp. 88-90].

La Geometría descriptiva, o método de la doble proyección ortográfica, consiste en proyectar ortogonalmente una figura sobre dos planos perpendiculares, uno horizontal y otro vertical, y a continuación girar 90º el plano vertical alrededor de la recta de intersección de ambos hasta situarlo también horizontal. De esta manera se obtiene una representación bidimensional del objeto tridimensional.

Como se observa la Geometría descriptiva no necesita de la Geometría analítica para desarrollarse, ya que su esencia está en la proyección. Por ello, lo que Zorraquín aporta de novedoso es que una vez proyectada la figura tridimensional sobre los planos perpendiculares, en dichos planos realiza Geometría analítica.

A continuación veremos la diferencia de enfoques entre Zorraquín y Monge.

Sea, por ejemplo, el siguiente problema planteado por Zorraquín: *Hallar las condiciones necesarias para que dos rectas dadas en el espacio se corten, y verificándose, determinar los puntos de intersección* [pp. 95-96].

Sean $$\left.\begin{aligned} x &= az + \alpha \\ y &= a'z + \alpha' \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} x &= bz + \beta \\ y &= b'z + \beta' \end{aligned}\right\}$$

las ecuaciones de las rectas -Zorraquín describe una recta en el espacio a través de las ecuaciones de las rectas obtenidas en sus planos de proyección-.

Como en el punto de intersección las coordenadas serán comunes a las dos rectas, las cuatro ecuaciones anteriores tendrán lugar a la vez y eliminando entre ellas las variables x, y, z se llega a que

$$(a - b)(\alpha' - \beta') = (a' - b')(\alpha - \beta)$$

que contiene la condición pedida.

De lo que llega a que las coordenadas del punto de intersección son:

$$\left.\begin{array}{lcl} z = \dfrac{\beta - \alpha}{a - b} & \text{ó} & z = \dfrac{\beta' - \alpha'}{a' - b'} \\[2ex] y = \dfrac{a'\beta' - b'\alpha'}{a' - b'}, & & x = \dfrac{a\beta - \alpha b}{a' - b'} \end{array}\right\}$$

A continuación realiza el siguiente análisis descriptivo[6]:

Si en la figura 4, *a'* representa dos puntos situados sobre la misma vertical *a''b''*, aunque en el plano horizontal tengan las mismas coordenadas no coincidirán mientras sus alturas *a''c''*, *a''b''* sean diferentes; igualmente aunque las proyecciones horizontales A'B', C'D' se corten en *m'*, no habrá intersección si la *n''* de las verticales A"B", C"D" no corresponde a *m'* por medio de una perpendicular a OZ como se ve en *m''*. Luego de aquí, puede concluirse que *dos rectas se cortan en el espacio cuando las intersecciones de sus proyecciones están sobre una perpendicular al eje coordenado.*

El siguiente problema planteado es el de *hallar el ángulo de dos rectas dadas por sus proyecciones o ecuaciones* [pp. 96-103]. Para ello Zorraquín considera la figura 5 en la que las rectas A'B', A"B" y D'E', D"E" se cortan en C' y C".

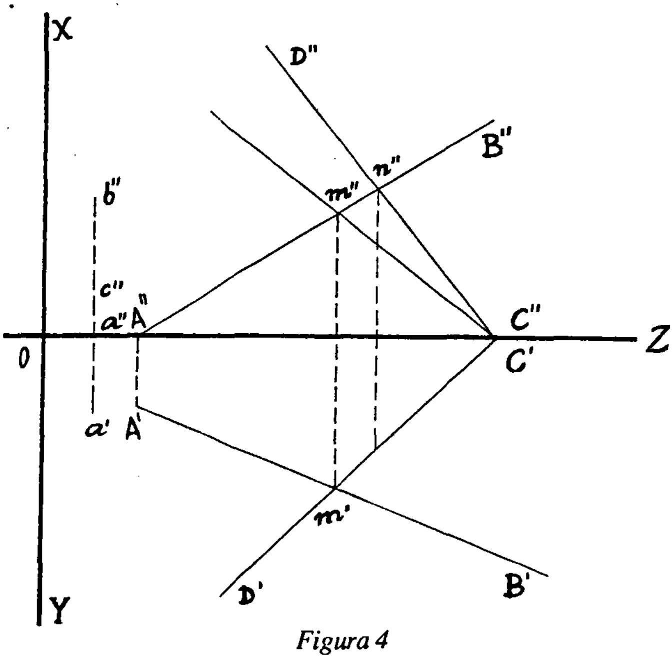


Figura 4

Estas rectas se suponen prolongadas hasta encontrar el plano horizontal en A', D'. Seguidamente se traza la recta A'D', y se hace girar el triángulo ACD -las letras sin comillas denotan una figura en el espacio- alrededor de la A'D' hasta que quede aplicado sobre el plano YOZ; cuando haya tomado esta posición tendrá su verdadera magnitud y se obtendrá el ángulo pedido. Lo que debe realizarse, pues, es un triángulo sobre A'D' igual al que existe en el espacio; para ello se traza la recta indefinida *mC'* perpendicular a A'D' por C', y se supone que por ella pasa un plano vertical; al girar el triángulo ACD, su vértice C estará constantemente en dicho plano, y en él describirá un arco de círculo cuyo centro es *m* y cuyo radio es la longitud real de la recta representada por *mC';* luego determinándola y trasladándola desde *m* hasta F las rectas D'F, A'F comprenderán el ángulo que se quiere hallar.

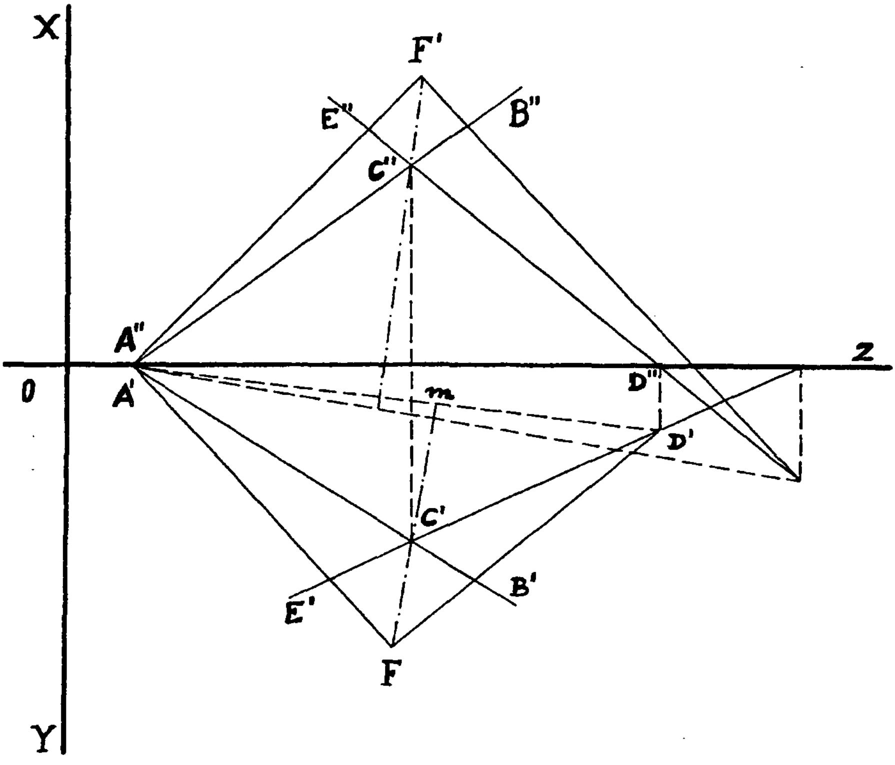


Figura 5

A continuación Zorraquín indica que la construcción se realiza del mismo modo si se considera el plano vertical y en la misma figura resuelve ambos casos.

También añade que el caso estudiado es de rectas que se cortan, pero que si sólo se cruzan, el ángulo que forman se mide por el de dos paralelas a ellas, lo que equivale a suponer que permaneciendo una fija la otra se mueve paralelamente a sí misma hasta cortar a la primera.

Después afirma que:

"Las construcciones que hemos hecho pueden escribirse analíticamente, y sin gran dificultad hallaríamos la fórmula que diese el ángulo en función de sus proyecciones, como nos han servido para determinarle gráficamente; pero vamos á deducir la que generalmente se emplea" [p. 98].

Supone una esfera de radio uno con centro en O que corta a las rectas *(Ob', Ob")* y *(Od', Od")* en los puntos *(m', m")* y *(n', n")* respectivamente (fig. 6).

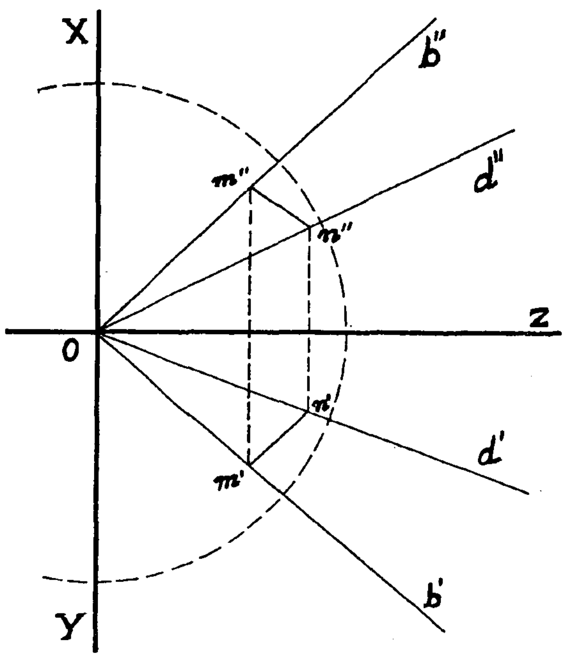


Figura 6

Sean x, y, z las coordenadas del primer punto, x', y', z' las coordenadas del segundo y sean $x = az, y = a'z; x' = bz', y' = b'z'$ las ecuaciones de Ob y Od. Aplica que.

$$\overline{Om^2} = x^2 + y^2 + z^2 = 1, \qquad \overline{On^2} = x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$$

Eliminando las coordenadas entre estas ecuaciones y las anteriores, obtiene:

$$\left.\begin{aligned} z &= \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 + a'^2}} & z' &= \frac{1}{\sqrt{1 + b^2 + b'^2}} \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{a}{\sqrt{1 + a^2 + a'^2}} & x' &= \frac{b}{\sqrt{1 + b^2 + b'^2}} \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{a'}{\sqrt{1 + a^2 + a'^2}} & y' &= \frac{b'}{\sqrt{1 + b^2 + b'^2}} \end{aligned}\right\}$$

Además la distancia mn da:

$$L^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2 = 2 - 2(xx' + yy' + zz')$$

Como mn es cuerda de un arco, puede poner:

$$mn = 2\, sen \frac{1}{2} A, \quad \text{(siendo A el ángulo que se busca)}$$

$$L^2 = 4\, sen^2 \frac{1}{2} A = 2\,(1 - cos\, A),$$

igualando los dos últimos valores de L^2 resulta:

$$cos\, A = xx' + yy' + zz'$$

y poniendo los valores de las coordenadas, obtiene (1):

$$cos\, A = \frac{1 + ab + a'b'}{(\sqrt{1 + a^2 + a'^2})\,(\sqrt{1 + b^2 + b'^2})}$$

$$sen\ A = \frac{\sqrt{(a-b)^2 + (a'-b')^2 + (ab'-a'b)^2}}{(\sqrt{1+a^2+a'^2})(\sqrt{1+b^2+b'^2})}$$

$$tang\ A = \frac{\sqrt{(a-b)^2 + (a'-b')^2 + (ab'-a'b)^2}}{1+ab+a'b'}$$

Después analiza los casos en que una de las rectas sea sucesivamente cada uno de los ejes para dar los ángulos de la recta con dichos ejes.

Por último, en la fórmula general del ángulo entre dos rectas da algunos valores concretos a ese ángulo para estudiar las condiciones de paralelismo o perpendicularidad entre dos rectas.

Si A=100º -Zorraquín considera la división de la circunferencia en 400º o partes-, entonces cos $A=0$ y por lo tanto de (1) obtiene:

$$1 + ab + a'b' = 0,$$

que contiene la condición necesaria para que dos rectas sean perpendiculares entre sí.

Si A = 0, entonces cos A = ± 1 y, por lo tanto, de (1) obtiene:

$$(a-b)^2 + (a'-b')^2 + (ab'-a'b)^2 = 0,$$

que sólo puede verificarse haciendo $a = b$ y $a' = b'$, lo que indica que las rectas son paralelas.

Esta es, pues, la forma de trabajo de Zorraquín con su unión de las dos Geometrías.

Este mismo problema es tratado en la *Septième question* del libro de *Géométrie descriptive* de Monge: *Construir el ángulo que forman dos rectas que se cortan en el espacio, estando dichas rectas dadas por sus proyecciones horizontales AB, AC y por sus proyecciones verticales ab, ac.*

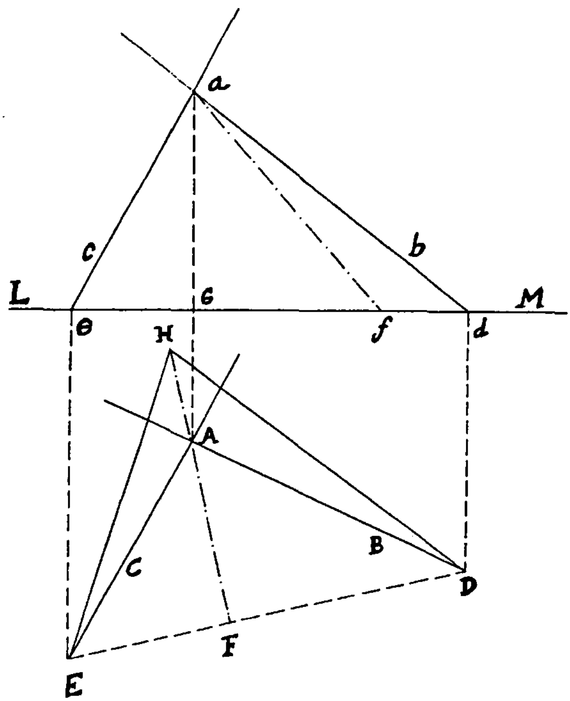


Figura 7

Antes de solucionar el problema Monge indica que como las dos rectas dadas se cortan (fig. 7), el punto A de intersección de sus proyecciones horizontales y el punto *a* de las verticales serán las proyecciones del punto en el que se cortan y estarán en consecuencia en la misma recta *aGA* perpendicular a *LM*. Si los dos puntos A y *a* no están en una misma perpendicular a LM las rectas no se cortarán.

Después soluciona el problema del ángulo. Para ello prolonga las rectas *ab* y *ac* hasta cortar a LM en dos puntos *d, e*; por estos puntos dibuja en el plano horizontal y perpendicularmente a LM dos rectas indefinidas *dD, eE,* donde D y E son los puntos de intersección de estas rectas con las proyecciones horizontales *AB, AC,* prolongadas si fuese necesario.

Traza la recta DE, y esta recta y las dos partes de las rectas dadas en el espacio comprendidas entre su punto de intersección y los puntos D y E formarán un triángulo, donde el ángulo opuesto a DE será el ángulo pedido; lo único que le queda ahora es construir ese triángulo. Para ello, después de trazar por A y perpendicularmente a DE la recta AF, si el plano del triángulo gira alrededor de su base DE hasta que se abata sobre el plano horizontal, el vértice del triángulo durante su movimiento estará en el plano vertical trazado por AF y acabará por colocarse en un punto de la prolongación AF.

Para calcular este punto, Monge considera que la proyección horizontal de esta distancia es la recta AF y la altura vertical es igual a *aG;* por ello sobre LM lleva AF, lo que da lugar a *Gf;* a continuación traza la hipotenusa *af*, que es la distancia pedida. Llevando *af* sobre AF obtiene el punto H, uniendo H con D y E construye el triángulo y el ángulo DHE es el ángulo pedido.

Como se observa el tratamiento descriptivo de este problema por parte de Monge y Zorraquín es bastante similar, pero la parte analítica sólo está presente en el texto de Zorraquín.

Los siguientes capítulos del libro de Zorraquín son fundamentalmente de Geometría analítica y cuando aplica la Geometría descriptiva proyecta y hace Geometría analítica en los planos de proyección.

Sobre la Geometría analítica, Zorraquín afirma que hasta entonces se utilizaba el texto de Mariano Vallejo[7], completando con otros manuales aquellas teorías no presentes en el texto de Vallejo y necesarias para la formación de los alumnos de la Academia. Para realizar su libro Zorraquín afirma [p. IX] haberse basado en las obras de Monge, Lacroix, Biot, Puissant, Hachette, Garnier y Boucharlat, de las que la suya *contiene todo lo esencial.* Además Zorraquín cita a lo largo de su obra a Legendre, Lagrange, Laplace, Poisson y Petit, así como algunos tomos de la *Correspondance sur l'Ecole Polytechnique.*

La división que Zorraquín realiza de los capítulos restantes es:

Capítulo III: *Ecuaciones de primer grado entre tres variables.* 1.- El plano; 2.- Problemas y teoremas; 3.- Transformación de coordenadas en el espacio.

Capítulo IV: *Ecuaciones de segundo grado entre dos variables.* 1.- Construcción y discusión de la ecuación general; 2.- Secciones cónicas; 3.- Reducción de la ecuación general, identidad de las curvas que representa con las secciones cónicas; 4.- Ecuación general de la intersección de la superficie cónica con un plano; 5.- Algunas propiedades de las secciones cónicas; 6.- Método de las tangentes; 7.- Diámetros; 8.- Teoremas y problemas; 9.- Generación de curvas; 10.- Intersecciones de curvas: raíces de las ecuaciones.

Capítulo V: *Ecuaciones de segundo grado entre tres variables.* 1.- Construcción y reducción de la ecuación general; 2.- Discusión de las reducidas; 3.- Secciones planas de las superficies; 4.- Discusión de la ecuación general; 5.- Planos tangentes; 6.- Planos diametrales; 7.- Intersecciones de superficies; 8.- Generación de superficies.

El texto de Mariano Zorraquín consta de 487 páginas y 23 láminas con un total de 216 figuras.

Esta idea del tratamiento conjunto de las dos disciplinas geométricas no tuvo la misma aceptación en los sucesivos profesores que escribieron libros sobre ellas para la enseñanza y, como veremos, cada una de estas dos disciplinas se cultivó separadamente.

José de Odriozola fue el siguiente profesor de una Academia militar que en 1829 escribió un texto de *Geometría analítica*, obra que también pertenece al impulso francés dado a esta disciplina. Odriozola no la unió con la Geometría descriptiva y en su libro cita a Monge y a Lagrange pero no a Zorraquín -quizá porque Odriozola era artillero y Zorraquín ingeniero-.

La siguiente obra que aparece sobre una de estas dos disciplinas geométricas es la de Fernando García San Pedro, que en 1840 publicó su texto titulado *Principios de Geometría analítica elemental.*

Pero antes, merece la pena detenerse a considerar la Memoria que García San Pedro redactó en el año 1819, siendo alumno de la Academia de Ingenieros, titulada *Geometría analítica*, que consta de 41 páginas y fue impresa en el año 1821 por orden del Ingeniero General, Marqués de las Amarillas.

Esta Memoria se inicia con un planteamiento didáctico: *¿Cuál es el mejor método que puede emplearse en la exposición de las Matemáticas?* La respuesta de García San Pedro va encaminada hacia la consideración del origen y la formación de las cosas, por eso él afirma que, con relación a la geometría, la idea de las líneas en general no debe separarse de la del movimiento. Concretamente se expresa del siguiente modo:

> "Es imposible formarse idea de una línea cualquiera sin imaginar al mismo tiempo una sucesión de puntos, ó lo que es lo mismo el rastro que dejase uno primero que se moviese. Por consiguiente la idea del movimiento precederá siempre á la que adquiramos de cualquier línea; y esta razon sola basta para decidirse á buscar el tratar las líneas como resultados de ciertos movimientos, ó enlazar la teoría de las primeras con la mecánica: y aun es bastante tambien para hacer conocer que dicha teoría debe estar subordinada a la ciencia del movimiento" [p. 11].

Hay un hecho que destaca en esta Memoria y es que en su exposición no ha necesitado para nada la idea de plano. Concretamente afirma:

"La idea de plano no la he necesitado absolutamente en cuanto he hablado de las líneas y sus ángulos, lo que hace mas elegante este método; porque habiendo considerado á las rectas como el resultado único y determinado del movimiento establecido sobre dos dadas por su posicion ha sido indiferente el saber que la resultante se halla en el plano de los dos, ni que es plano.

La teoría analítica del plano nace de la anterior de la línea recta, y no es mas que el caso más sencillo del movimiento de las líneas en general. Así debe establecerse" [pp. 40-41].

Esta vez y con esta Memoria García San Pedro se adelantó a su tiempo, porque la Geometría del movimiento, exceptuando a sus precursores, se desarrolló fundamentalmente en el siglo XIX con Chasles (1793-1880), Mannheim y Schoenflies, cuyos trabajos corresponden a la segunda mitad del siglo XIX.

R. Bkouche[8] trata la Geometría del movimiento en su análisis sobre la reforma de la enseñanza de la Geometría de 1902-1905. Según Bkouche dicha reforma se apoyó sobre las ideas desarrolladas por Charles Méray en su obra publicada en 1874, los *Nouveaux Eléments de Géométrie*, obra que tuvo poco impacto en su época, pero que guió a los reformadores de 1902. En este trabajo, Méray pone de manifiesto dos innovaciones: el abandono de la distinción entre la geometría plana y la geometría del espacio y la introducción explícita del movimiento en las nociones geométricas. Dichas innovaciones se situaban en la línea de valorar el carácter experimental de la geometría.

Bkouche afirma que la Geometría del movimiento -que es necesario distinguir de la mecánica- comienza cuando uno se apoya explícitamente sobre el movimiento para establecer una verdad geométrica o efectuar una construcción geométrica. Sobre dicha geometría Bkouche escribe:

"Nous terminerons ces remarques en citant l'étude purement géométrique du mouvement (c'est-à dire indépendamment de toute considération temporelle), étude qui se développe au XIXème siècle avec Chasles, Mannheim et Schoenflies; ce dans l'étude des courbes, ainsi, chez les géomètres grecs, l'étude des courbes *mécaniques* (définies par une combinaison de mouvements) telles la quadratice de Dinostrate, qui permet de quarrer le cercle et de trisecter l'angle et les spirales d'Archimède, ainsi la détermination des tangentes à une courbe par Roberval et les méthodes cinématiques d'étude des courbes. Notons que ce point de vue du mouvement géométrique constitue, avec la non-séparation du plan et de l'espace, le fondement des conceptions de l'enseignement de la géométrie de Méray et sera un des points forts de la réforme de 1902/1905" [1990, p. 8].

Siguiendo de nuevo a Bkouche. en otro comentario sobre la Geometría del movimiento indica:

"Cette histoire de la géométrie au XIXème siècle, couronnée par le Programme d'Erlangen de Felix Klein, pourrait expliquer pourquoi les deux transgressions de la tradition grecque, celle de la distinction espace/plan et celle de l'élimination du mouvement, apparaissent en même temps, montrant ainsi comment les réformateurs de 1902/1905 se situent dans un mouvement d'idées qui s'est constitué tout au long du XIXème siècle.

Reste un dernier point à étudier, cette remise en cause de la tradition euclidienne s'intègre dans ce qu'on pourrait appeler une conception empiriste de la géométrie, mettant l'accent sur le caractère expérimental de la connaissance géométrique, caractère expérimental occulté par le discours rationnel euclidien, lequel peut être lu, et a été effectivement lu, comme une auto-fondation de la géométrie" [1991, p. 14].

Finalmente Bkouche concluye su análisis sobre la reforma de la enseñanza de 1902-1905 añadiendo que ésta tuvo más éxito en la enseñanza primaria superior y en la enseñanza profesional, y que una enseñanza más conforme con la tradición volvió tras la Primera Guerra Mundial. Por último señala que la reforma de 1902-1905 planteó, y plantea todavía, una serie de cuestiones sobre la enseñanza de la geometría -y más generalmente sobre la enseñanza de las matemáticas- de las cuales la más importante es la articulación entre lo teórico y lo experimental.

Así pues ya en la Memoria que García San Pedro realizó siendo alumno de la Academia se planteaba un punto crítico de la enseñanza de cualquier disciplina: cómo enseñarla. De nuevo, y en esa generosidad de ideas que le caracteriza, él aportó una solución en las matemáticas: la consideración del movimiento en las nociones geométricas. Cuando en 1840, ya como profesor, realizó un libro de texto para esta disciplina, que es el que a continuación se analiza, esta idea del movimiento está presente en su exposición.

García San Pedro, en el Prólogo de su libro, comenta que, debido al nuevo Plan de Estudios dado a la Academia -que era el correspondiente al año 1839-, había que enseñar en la primera clase del primer año Cálculo diferencial e integral, Geodesia y Geometría analítica, lo que sólo podía hacerse reduciendo convenientemente estas disciplinas o bien aprovechando las simplificaciones que admitía el estudio de la Geometría analítica cuando le precedía el del Cálculo diferencial.

A esta última posibilidad se aplicó García San Pedro cuando escribió el texto de Geometría analítica. Su obra está dividida en cuatro partes: la primera -que trata de las líneas y superficies- es propiamente de Geometría analítica, y las otras tres partes -que tratan de las líneas y superficies de segundo grado y de las superficies en general- son aplicaciones del Cálculo diferencial a la Geometría.

En la primera parte del texto de García San Pedro los conceptos de línea recta y plano se introducen de una manera cinemática. Así, la línea recta *es el camino que recorre un punto cuando se mueve con ciertas condiciones* y el plano *es la figura engendrada por el movimiento de una recta, que siendo paralela a sí misma, se apoya en otra y recorre todos sus puntos.*

Para representar una recta en el espacio, García San Pedro utiliza las proyecciones de dicha recta sobre los tres planos coordenados. Así, considerando la figura 8, la recta OA se representa por:

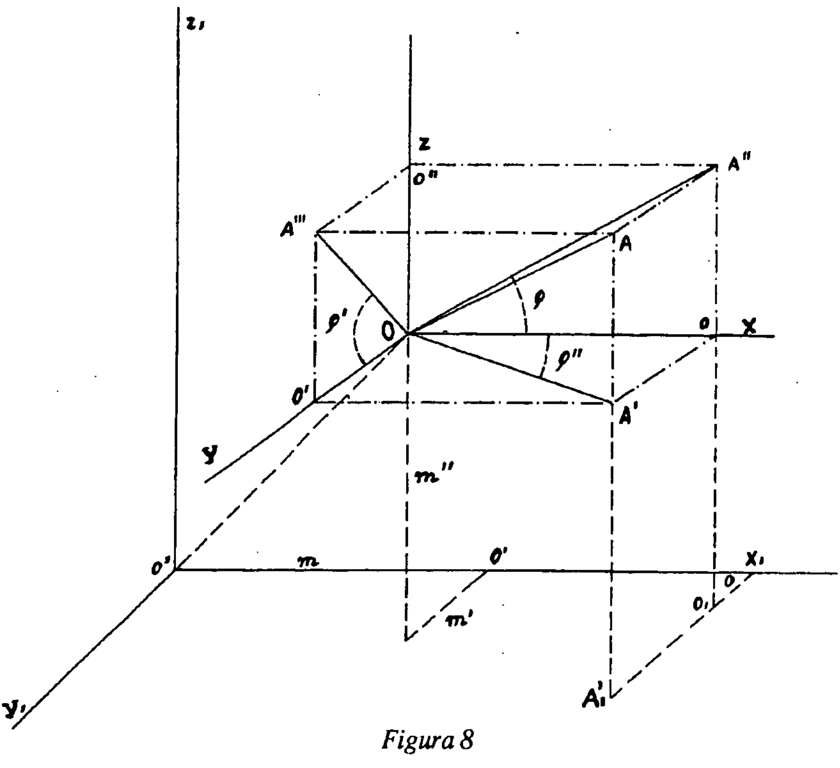


Figura 8

$$\left.\begin{aligned} z &= Ax + B \\ z &= A'y + B' \\ y &= A''x + B'' \end{aligned}\right\}$$

donde:

$$\left\{\begin{array}{lll} A = tang\,Q & \ldots & B = m'' - m\,tang\,Q \\ A' = tang\,Q' & \ldots & B' = m'' - m'\,tang\,Q' \\ A'' = tang\,Q'' & \ldots & B'' = m' - m\,tang\,Q'' \end{array}\right\}$$

A este respecto cabe citar que, según Boyer [p. 600], es en la Geometría analítica de Monge, más que en las de Clairaut y Euler, en la que aparece por primera vez un estudio sistemático de la recta en el espacio tridimensional. También indica que Monge, para resolver determinadas cuestiones, escribía las ecuaciones de las rectas dadas utilizando sus proyecciones sobre los planos de coordenadas.

Así para hallar la distancia más corta entre dos rectas que se cruzaban realizaba los siguientes cálculos:

Consideraba las ecuaciones de las proyecciones de estas dos rectas

$$\left\{\begin{array}{l} y = Ax + B \\ z = Cx + D \end{array}\right. \quad \text{y} \quad \left\{\begin{array}{l} y = A'x + B' \\ z = C'x + D' \end{array}\right.$$

y las ecuaciones de la normal común buscada, de la misma forma, como

$$\left\{\begin{array}{l} y = \alpha x + \beta \\ z = \gamma x + \delta \end{array}\right.$$

Dado que esta normal común debía cortar a las dos rectas, obtenía:

$$(\gamma - C)(\beta - B) = (\alpha - A)(\delta - D)$$
$$(\gamma - C')(\beta - B') = (\alpha - A')(\delta - D')$$

Como la normal común debía ser perpendicular a cada una de las dos rectas, escribía:

$$1 + A\alpha + C\gamma = 0$$
$$1 + A'\alpha + C'\gamma = 0$$

y resolviendo el sistema formado por las cuatro ecuaciones anteriores en $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ se determinan las ecuaciones de la normal buscada y, por lo tanto, la distancia que se quería calcular.

Este mismo problema de Monge aquí descrito se halla también presente en el texto de García San Pedro y su resolución es bastante parecida, lo que permite indicar que una de las fuentes de García San Pedro para redactar su texto pudo ser el trabajo de Monge, esta vez no tan rápidamente importado, ya que, según Boyer:

"La mayor parte de los resultados de Monge sobre la Geometría analítica de rectas y planos aparecían ya en memorias del año 1771. En su ordenación sistemática del material en las *Feuilles d'analyse* de 1795, y especialmente en la memoria de 1802 con Hachette, nos encontramos con la mayor parte de la Geometría analítica del espacio y de la Geometría diferencial elemental que se suelen incluir en los textos para subgraduados" [pp. 600-601].

Las otras tres partes en que García San Pedro dividió su libro son ya de Geometría diferencial. En ellas siguió considerando para el Cálculo diferencial su método de los incrementos ideales[9].

García San Pedro no nombra en todo su texto a ningún matemático ni nacional ni extranjero, pero su ubicación debe situarse en el entorno que Boyer define de la siguiente manera:

"La nueva rama de la Geometría que inició Gauss en 1827 se conoce como Geometría diferencial, y puede considerarse quizá como incluida en el análisis más bien que en el campo tradicional de la Geometría. En realidad desde la época de Newton y Leibnitz los matemáticos habían aplicado sistemáticamente el cálculo al estudio de curvas planas, y en cierto sentido estas aplicaciones constituían ya, evidentemente, un anticipo de la Geometría diferencial. Euler y Monge, por su parte, habían extendido este campo para incluir el estudio analítico de las superficies, y por lo tanto se les considera a veces como los verdaderos padres de la geometría diferencial. Sin embargo, hasta que apareció el tratado clásico de Gauss, *Disquisitiones circa superficies curvas* (1827), no se dispuso de un volumen exhaustivo dedicado exclusivamente al tema" [p. 652].

Pues bien, analizando el texto de García San Pedro, y en concreto los capítulos dedicados a la curvatura de una superficie en un punto, no aparece la definición de curvatura gaussiana o total, y el tratamiento de estos capítulos es bastante similar al que Monge efectúa en su libro *Application de l'Analyse a la Géométrie* -texto cuya primera edición correspondió al año 1795[10]-.

El texto de García San Pedro consta de 167 páginas y 2 láminas con un total de 15 figuras.

Siguiendo con el orden cronológico, otro profesor que también escribió un libro de texto de Geometría para un centro militar fue el artillero José Bielsa, quien en 1846 redactó para el Colegio de Caballeros Cadetes de

Artillería su *Tratado elemental de Geometría descriptiva y Sombras*. Después de Zorraquín, Bielsa es el siguiente militar matemático que escribió sobre Geometría descriptiva, pero a diferencia del primero su libro es exclusivamente de esta disciplina. Bielsa afirma haber utilizado [p. II] para la elaboración de este manual la última edición del texto de Leroy -quien había sido profesor de Geometría de l'Ecole Polytechnique desde 1816 hasta 1848- y para la teoría de sombras el texto de Cloquet. Otro autor que Bielsa cita en su libro [p. 105] es Olivier -profesor de Geometría descriptiva de l'Ecole Centrale des Arts et Manufactures desde 1829 hasta 1853-.

Indudablemente Bielsa utilizó para elaborar su propio manual no sólo textos de autores importantes en el terreno de la Geometría descriptiva, sino también recientes, ya que Leroy y Olivier[11] habían comenzado a publicar libros de Geometría descriptiva en 1842[12] es decir, cuatro años antes de que el autor español publicara su obra.

También los ingenieros redactaron otro libro de texto para esta disciplina, el profesor Angel Rodríguez Arroquía publicó en 1850 su texto *Complemento a la Geometría descriptiva*. Su aportación novedosa es el empleo de un sólo plano de proyección, es decir, de los dos planos del sistema ortogonal se suprime el plano vertical de proyección, con lo que dado un punto se sustituye esta proyección por el valor numérico de la proyectante horizontal, valor que, tomado a escala, se llama cota del punto y da a este método el nombre de *sistema de acotaciones*.

También en la mitad del siglo XIX la Geometría analítica tuvo sus cultivadores. Así el oficial de Estado Mayor Angel Alvárez en 1849, el artillero Francisco Sanchiz y Castillo en 1851 y el ingeniero Manuel Díez de Prado en 1852 escribieron textos sobre esta disciplina para sus respectivas Academias. Los tres son textos bastante semejantes a la Geometría analítica de Mariano Zorraquín y en ellos no se utiliza el Cálculo diferencial.

De hecho Díez de Prado -sucesor de las clases de García San Pedro-, en el Prólogo de su obra, indica la necesidad de tener un texto de Geometría analítica separado del Cálculo diferencial debido a la dificultad que el estudio de este último presentaba a los alumnos de su Academia. Así se expresaba:

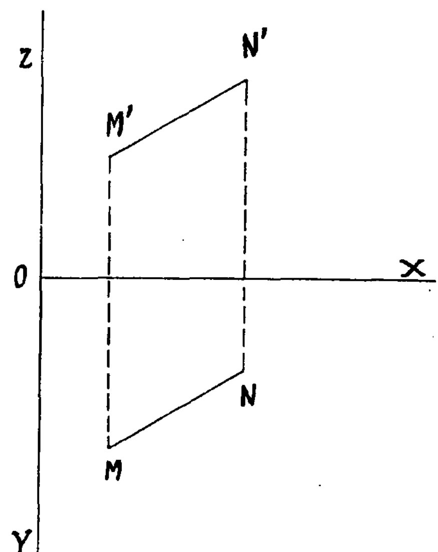
> "La esperiencia (sic) demostró luego que era poco el término de un año para estudiar con fruto en la 1ª clase tantas materias, y mucha la resistencia que encontraban los discípulos a empezar el curso por el de cálculos, para entrar así preparados en el de Geometría analítica escrita al intento. En su consecuencia dispuso el Ingeniero General[13] precediese el estudio de la Geometría analítica al de los cálculos, y promovió además la sabia resolución de que se hiciese el de la Geodesia en el 4º año" [p. VIII].

El texto de Díez de Prado consta de dos partes, la Trigonometría esférica y la Geometría analítica. A su vez esta última se dividía en *Análisis determinada* y *Análisis indeterminada*, y esta segunda se repartía en tres apartados: *Líneas y superficies de primer grado, Líneas de segundo grado* y *Superficies de segundo grado*.

Díez de Prado basó su obra en el resultado de escoger lo expuesto en otros libros de Geometría analítica -entre ellos el de Zorraquín- sin hacer uso del Cálculo diferencial y adoptar en la enseñanza los métodos más generales, puesto que opinaba que éstos eran también los más sencillos y los más breves.

En la parte de *Análisis determinado* se hallan propuestos los mismos tipos de problemas que en Zorraquín, salvo alguna excepción; así los expresados en el libro de Díez de Prado en la lección II con los números 1, 2, 3, 5, 6 y 8 eran los correspondientes del texto de Zorraquín con los números V, IX, VI, III, II y IV, y en la lección III, el 2 y el 3 se corresponden respectivamente con el XVII y el VIII.

En el *Análisis indeterminado* Díez de Prado expresa una recta en el espacio por las ecuaciones correspondientes a sus proyecciones MN y M'N' sobre los planos coordenados XOY, XOZ, en una extraña referencia a la Geometría descriptiva (fig. 9):



$$\left.\begin{aligned} y &= Ax + B \\ z &= A'x + B' \end{aligned}\right\}$$

Figura 9

En general, Zorraquín realiza un planteamiento más estructurado y ordenado, con más finura y conceptos, siendo en cambio Díez de Prado más conciso.

El libro de Díez de Prado consta de 291 páginas y 4 láminas y está escrito separando la teoría de las ecuaciones, lo que indica que a mitad del siglo XIX en la Academia de Ingenieros todavía se utilizaba el método de pizarras en la enseñanza.

La Junta de Profesores de la Academia aprobó esta obra como libro de texto para la enseñanza de la Geometría analítica y dejó la de García San Pedro -que era de Geometría diferencial- como parte integrante de las aplicaciones del Cálculo.

También Zorraquín, junto con Monge y Lacroix, fueron los autores citados en el texto que José Jiménez y Baz, profesor del Colegio de Infantería, redactó en 1857 sobre los *Elementos de Geometría descriptiva, Trigonometría rectilínea y Topografía* para los alumnos del Colegio. Su breve exposición de la Geometría descriptiva -sólo consta de 34 páginas- la concluye remitiéndose a las obras de los tres autores anteriormente citados para cualquier ampliación o aclaración.

Más interés va a tener el próximo libro de Geometría descriptiva escrito por un artillero, Luis Felipe Alix. Como se observaba en el anterior libro de esta disciplina escrito por un artillero, el de Bielsa, las fuentes de su trabajo eran autores franceses más cercanos en el tiempo que Monge -citaba, por ejemplo, a Leroy y a Olivier-. Luis Felipe Alix escribió en 1866 el *Tratado elemental de Geometría descriptiva. Perspectiva y Sombras*, donde cita, además de a Leroy, a La Gournerië (1814-1883) y a Adhemar.

La teoría de las acotaciones del texto de Alix había sido ya incorporada al de Bielsa en su segunda edición (1855). En cambio, parece ser gran novedad la introducción de la perspectiva axonométrica -es decir, la proyección ortogonal sobre un plano oblícuo- .

A este respecto cabe señalar que Eduardo Torroja -que ocupó la cátedra de Geometría descriptiva de la Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Madrid desde 1876 hasta 1916- publicó sus primeros trabajos de Geometría en la *Revista de la Sociedad de Profesores de Ciencias* publicada en Madrid (1874 y 1876) y en los *Anales de la construcción y de la industria*, donde aparecieron una serie de artículos sobre perspectiva axonométrica, recogidos después en un libro de 1879. Pues bien, el dictamen favorable que sobre este texto emitió el Consejo de Instrucción Pública de ese mismo año dice:

" (...) la materia de que trata, si no completamente nueva, es por lo menos desconocida en nuestro país.

De algunos principios de la Axonometría se ocupó ya Lambert en 1759 pero de una manera incidental, sin que nadie reparase en el fruto que aquella semilla contenía y fue preciso aguardar al año 1840, para que apareciese ya un cuerpo de doctrina, muy limitado en sus explicaciones prácticas, y solo al caso de la perspectiva isométrica. En 1857 fue cuando se dio grande importancia en Alemania a las ventajas que ofrecía esta representación axonométrica para las Artes de construcción, sin que hasta ahora se haya publicado nada sobre este punto en nuestra vecina Francia, y sí en Bélgica por Breittient bajo un punto de vista distinto del seguido por el profesor de la Universidad Central (...)"[14].

La ignorancia del Consejo de Instrucción Pública le valió a Torroja alcanzar la categoría de ascenso como catedrático y una *medalla* más en su palmarés de *importador de teorías*, eso sí, a costa del olvido de Alix.

En el último cuarto de siglo que falta por analizar los militares siguieron escribiendo libros para todas las ramas de la Geometría hasta aquí citadas.

Así, los ingenieros Pedro Pedraza y Miguel Ortega, profesores de su Academia, escribieron conjuntamente la Geometría descriptiva de rectas y planos, y Pedraza redactó la Geometría descriptiva de las superficies. Ambos manuales, junto a los textos de Rodríguez Arroquía para los planos acotados, de Leroy para la parte correspondiente de *Sombras y Perspectiva* y de Adhemar para el *Corte de Piedras*, están indicados como libros de texto de esta disciplina en la Academia de Ingenieros en los años 1880 y 1892.

En la Academia de Artillería el libro de texto elegido para esta disciplina en el año 1892 era el de Cabanyes.

Para la Academia General Militar en 1892 los libros de texto elegidos para la Geometría descriptiva y sus aplicaciones fueron: para la *Geometría descriptiva de rectas y planos* el texto de Pedraza y Ortega; para la *Geometría descriptiva aplicada a las superficies*, el de Pedraza; para la *Perspectiva*, Aranaz; para la *Teoría de Sombras*, Govantes y para los *Planos acotados*, Gállego Carranza.

La Geometría analítica no parece ser un tema especialmente cultivado por los profesores de la Academia de Ingenieros desde el punto de vista de la producción de obras para su enseñanza: el libro de texto propuesto para esta asignatura en los años 1880 y 1892 fue el de Sonnet.

También los artilleros en los comienzos de los años setenta prefirieron inclinarse para esta asignatura hacia la traducción de un texto francés, y en este caso el autor elegido fue Charles Comberousse, traducido en el año 1872, como reza el título, *expresamente para servir de texto en la Academia de Artillería* por C. Sebastián, comandante capitán de Artillería.

El principal motivo para traducir la obra de Comberousse lo basa el autor en que en ese momento éste era el libro de texto en las principales escuelas de Francia y Bélgica. Además, comparándola con la Geometría analítica de Biot, Fourcy, Cirodde y Sonnet, C. Sebastián considera superior y más completo el texto de Comberousse. Unicamente señala que este libro es superado por la Geometría analítica del catedrático de Dublín, Sanson, obra que sin embargo no podía utilizarse aún en la enseñanza elemental. Así se expresaba C. Sebastián en el prólogo de su obra:

"Pero donde raya á mayor altura M. Comberousse, es en la Geometría analítica, pudiendo asegurarse, sin temor de ser desmentidos, que está muy por encima de todas las publicadas hasta el día; pues si bien la dada á luz en Inglaterra por el sabio catedrático de Dublin M. Sanson, es superior á la de M. Comberousse, no puede adaptarse aún a la enseñanza elemental, tanto por su elevación de conceptos que la hacen eminentemente clásica, como por la gran novedad de sus teorías, de las cuales ni aun los nombres tienen cabida en los elementos" [p. VIII].

Posteriormente, en 1892, el capitán de Artillería A. Valcarce Quiñones redactó el texto titulado *Elementos de Geometría Analítica.*

La Geometría diferencial también tuvo sus cultivadores, como el ingeniero Antonio Vidal y Rúa con sus dos libros sobre las aplicaciones del Cálculo a la Geometría. Uno de ellos, el *Cálculo diferencial aplicado a la Teoría de líneas y superficies*, era libro de texto en la Academia de Ingenieros en el año 1892.

También sobre la perspectiva axonométrica antes citada el ingeniero Enrique Valenzuela escribió en 1896 un manual, titulado *Axonometría rectangular o perspectiva axonométrica rectangular*, en el que incluye la perspectiva caballera y las sombras.

Mención aparte merece la Geometría proyectiva en este último cuarto de siglo que nos ocupa. Sobre esta disciplina, y refiriéndose a España, A. Millán[15] escribe:

"En los años ochenta se produjo un interesante intento de modernizar la enseñanza universitaria de la Geometría aprovechando el pequeño margen de maniobra permitido por las modificaciones antes citadas de la regulación legal.

Precisamente el carácter que esta regulación imprimía a las enseñanzas de la facultad de ciencias provocó una especial receptividad hacia las matemáticas producidas en el ámbito de los centros de enseñanza técnicos europeos en los años setenta y ochenta, particularmente, lo que se da en llamar Geometría aplicada: los estudios de Geometría proyectiva ligados a métodos gráficos, especialmente la estática gráfica de Culmann, desarrollados en Alemania e Italia -y prolongados a los llamados métodos grafomecánicos-, y sucesivamente otros temas, como los estudios de Geometría cinemática liderados por Manheim en el entorno de la Ecole Polytechnique. El relieve dado en el país a la función de las matemáticas en la formación de cuadros técnicos permitió, como se verá a continuación, que la actividad matemática relacionada con esta función social tuviera un canal de entrada relativamente fluido. Al propio tiempo, la penetración de este tipo de temas permitió acceder a una corriente de investigación de naturaleza puramente teórica, la Geometría proyectiva sintética: la importancia asignada al cultivo de estos estudios condicionó decisivamente -en el aspecto doctrinal- el incipiente proceso de consolidación de una investigación matemática independiente en España".

Una de las obras que Millán [pp. 132-133] señala que incorporaba a la enseñanza elementos de Geometría proyectiva era el *Traité de Géométrie élémentaire* de Eugène Rouché -profesor de Liceo y *répétiteur* en la Ecole Polytechnique- y Charles Comberousse -profesor de la Ecole Centrale y del Collège Chaptal-, cuya primera edición francesa había aparecido en 1865.

En la Academia de Ingenieros el texto propuesto de Geometría para la preparación del examen de ingreso al Curso Preparatorio del año 1878 era el *Tratado de Geometría elemental* de Rouché-Comberousse.

Posteriormente, en el año 1880, de nuevo el texto de Rouché-Comberousse es el elegido para las clases de Geometría del Curso Preparatorio. Por otra parte, en el Segundo año de la Academia de Ingenieros se recomienda el texto de Levy para una de las anteriormente citadas Geometrías aplicadas, la Estática gráfica, ya en 1880, nueve años antes de que el ingeniero catalán Carlos Mª de Moÿ clamara por el establecimiento de esta materia en las Escuelas de Ingenieros:

> "(...) el estudio de la Estática gráfica es ya hoy indispensable, y que lo mismo que en las demás naciones es preciso establecer en España cursos completos de la misma en nuestras Escuelas de Ingenieros" [16].

Así, aunque la Estática gráfica no figura como asignatura en los planes de estudio de la Academia de Ingenieros, los textos de Levy sobre el Cálculo gráfico y la Estática gráfica aparecen recomendados en dicha Academia en los años 1880 y 1892.

Más adelante el texto francés de Rouché-Comberousse fue sustituido para la preparación de la Geometría por el del militar español Miguel Ortega y Sala. La *Geometría* de Ortega, cuya primera edición apareció en 1885, fue un libro muy utilizado en la enseñanza militar, llegando a realizarse veintidós ediciones hasta el año 1951. Como el mismo autor afirma, en cada edición procuraba mejorar o aumentar el contenido de la anterior. Concretamente en la novena edición (1901) el Apéndice 3, *Teorías diversas de Geometría superior*, sí que desarrolla Geometría proyectiva.

También otro ingeniero militar, J. Montero Gabutti, redactó en 1887 un texto de Geometría proyectiva titulado *Teorías de la homografía e involución seguidas de otros varios apuntes de Geometría.* Este libro, en principio, no estaba destinado a las Academias militares: como el mismo autor afirma estaba redactado para poner de acuerdo el tratado de Geometría elemental de E. Rouché y Ch. de Comberousse con el programa oficial de ingreso en la Escuela General Preparatoria de Ingenieros y Arquitectos.

Finalmente el último militar, en este caso artillero, que cabe citar es Juan Jacobo Durán y Loriga, cuya pequeña obra *Tres capítulos de Geometría superior* (1891) es calificada por Millán [p. 137] de exposición de nivel elemental de las nociones básicas de Geometría proyectiva.

* * *

Como conclusión de este trabajo puede afirmarse que cualquier estudio serio que se realice sobre la ciencia española del siglo XIX tiene que contar inevitablemente con la aportación militar. Porque su contribución a la ciencia no es escasa ni menor. En algunas disciplinas geométricas los militares contribuyeron con su propia investigación, y en la mayoría de ellas los militares fueron los importadores o, al menos, matemáticos pioneros que dieron a conocer estas disciplinas en España.

NOTAS

1 Para más información sobre esta disciplina véase: VELAMAZAN, Mª A. & AUSEJO, E. (1993) "De Lagrange a Cauchy: El cálculo diferencial en las Academias Militares en España en el siglo XIX". *Llull, Revista de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas*, *16*(30), 327-370.

VELAMAZAN, Mª A. & AUSEJO, E. (1991) "La enseñanza de las Matemáticas en la Academia de Ingenieros en España en el siglo XIX". En: Manuel Valera & Carlos López Fernández (eds.), *Actas del V Congreso de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas.* Murcia, Promociones y Publicaciones Universitarias, vol. 2, pp. 1307-1317.

VELAMAZAN, Mª Angeles (1990) "L'Enseignement des Mahématiques dans les Ecoles Militaires en Espagne au XIXème siècle". En: Elena Ausejo (ed.), *Science and Society in Contemporary Spain. Proceedings of the XVIIIth International Congress of History of Science (Hamburg-Munich, 1-9 August 1989)*. "Cuadernos de Historia de la Ciencia", 6. Zaragoza, Seminario de Historia de la Ciencia y de la Técnica de Aragón, Facultad de Ciencias, Universidad de Zaragoza, pp. 23-38.

VELAMAZAN, Mª A. & AUSEJO, E. (1989) "Los planes de estudio en la Academia de Ingenieros del Ejército de España en el siglo XIX". *Llull, Revista de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas, 12*(23), 415-453.

2 Véase *Estudio histórico del Cuerpo de Ingenieros del Ejército* (1911). Madrid, Establecimiento Tipográfico Sucesores de Rivadeneyra. Reedición de 1987, Tomo II, p. 34.

3 BOYER, C.B. (1986) *Historia de la Matemática*. Madrid, Alianza Editorial, pp. 601-602.

4 El análisis de la obra geométrica de Zorraquín y Díez de Prado se inició en el Curso de Doctorado que sobre *Temas de Historia de la Geometría* impartió el Profesor Luis Español González durante el año académico 1988-89 en la Universidad de Zaragoza.

5 Siempre según Boyer, Carnot consiguió extender considerablemente su correlación entre figuras en su obra *Géométrie de Position* (1803).

6 En lo sucesivo XOZ, YOZ representan los planos de proyección.

7 Sobre la figura de Vallejo, véase HERNANZ, C. & MEDRANO, J. (1990) "José Mariano Vallejo: notas para una biografía científica". *Llull, Revista de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas, 13*(25), 427-446.

8 BKOUCHE, R. (1990) *De la Géométrie et des transformations*. I.R.E.M. de Lille.

BKOUCHE, R. (1991) *Variations autour de la réforme de 1902/1905*. I.R.E.M. de Lille.

9 VELAMAZAN, Mª A. & AUSEJO, E. (1993) "De Lagrange a Cauchy: El cálculo diferencial en las Academias Militares en España en el siglo XIX". *Llull, Revista de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas, 16*(30), 327-370.

10 Respecto al desconocimiento de la obra gaussiana por parte de García San Pedro cabe señalar, en primer lugar, que ésta no era un libro de texto -punto de referencia principal de los autores hasta aquí considerados- y conviene tener en cuenta además que, probablemente, según los datos conocidos sobre su formación, García San Pedro no sabía latín.

11 Para más información sobre el trabajo de Leroy y Olivier, véase SAKAROVITCH, J. (1989) *Theorisation d'une pratique, pratique d'une theorie. Des traités de coupe des pierres à la géométrie descriptive*. Ecole d'Architecture de Paris/La Villette.

12 Olivier había publicado ya antes de 1842 algún artículo sobre Geometría en revistas, concretamente desde el año 1834. Véase SAKAROVITCH, J. (1989) *Op. Cit.*, p. 266.

13 El Ingeniero General al que hace referencia era Antonio Remón Zarco del Valle.

14 Citado en: MILLAN GASCA, A. (1991) "Los estudios de Geometría superior en España en el siglo XIX". *Llull, Revista de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas, 14*(26), 117-187, especialmente 147-148.

15 MILLAN GASCA, A. (1991) *Op. Cit.*, p. 138.

16 MILLAN GASCA, A. (1991) *Op. Cit.*, p. 140.

BIBLIOGRAFIA

ADHEMAR, J.A. (1840) *Traité de la coupe des pierres.* 2ème edition, Paris.

ALIX, L. F. (1866) *Tratado elemental de Geometría Descriptiva.* Valencia, Imp. Ferrer.

____. (1867) *Geometría Descriptiva. Atlas.* Valencia.

____. (1867) *Tratado elemental de Geometría Descriptiva.* Valencia, Imp. Ferrer.

____. (1874) *Tratado completo de matemáticas elementales.* Madrid, Imp. Ondero, Tomo I.

ALVAREZ, A. (1849) *Geometría Analítica.*

APARICI, R. (1881) *Lecciones de Geometría descriptiva. Láminas.* Madrid, Imp. Fortanet.

____. (1884) *Lecciones de Geometría descriptiva.* Madrid, Imp. Gutenberg.

BERENGUER, P. A. (1895) *Lecciones de Geometría Analítica.* Toledo, Imp. Peláez.

BIELSA Y CIPRIAN, J. (1846) *Tratado elemental de Geometría Descriptiva y Sombras.* Segovia, Imp. Espinosa.

____. (1857) *Tratado de Geometría Descriptiva.* Segovia, Imp. Espinosa.

____. (1878) *Geometría Descriptiva. Atlas.*

CABANYES, J. (1880) *Geometría Descriptiva. Aplicaciones a la construcción de las sombras y al dibujo de los cuerpos.* Barcelona, Imp. Tasso.

CARNOT, L. (1803) *Géométrie de position.* Paris

COMBEROUSSE, Ch. (1872) *Elementos de Geometría analítica.* Madrid, Establecimiento tipográfico de P. Abienzo. Traducción de C. Sebastián.

CORREA Y PALAVICINO, V. (1881) *Lecciones de Geometría Descriptiva.* Segovia, Imp. Rueda.

DIEZ DE PRADO, M. (1852) *Lecciones de Trigonometría Esférica y Geometría Analítica.* Madrid, Imp. Memorial de Ingenieros.

DURAN LORIGA, J. J. (1891) *Tres capítulos de Geometría superior.*

_____. (1899) *Tres capítulos de Geometría superior.* La Coruña, Imp. Puga, (3ª parte de la obra).

GALLEGO CARRANZA, L. (1886) *Sistema de acotaciones. Complemento a la Geometría descriptiva.* Toledo, Imp. Fando.

____. (1897) *Sistema de acotaciones. Complemento a la Geometría descriptiva.* Toledo, Imp. Peláez.

GARCIA SAN PEDRO, F. (1821) *Geometria Analítica. Memoria que presentó a la Academia Nacional de Ingenieros su alumno Don Fernando García San Pedro,* *en su último curso de estudios año de 1819, e impresa de orden del Excelentísimo Sr. Ingeniero General Marqués de las Amarillas.* Madrid, Imp. Ibarra.

____. (1840) *Principios de Geometría Analítica elemental destinados a la enseñanza de la Academia Especial del Cuerpo de Ingenieros del Ejército.* Madrid, Imp. Nacional.

GIANNINI, P. (1779) *Curso matemático para la enseñanza de los Caballeros Cadetes del Real Colegio Militar de Artillería.* Madrid, Imp. Joachin Ibarra. Tomo I: Elementos de Geometría plana y sólida, propiedades de las líneas trigonómetricas y de las secciones cónicas.

____. (1784) *Prácticas de Geometría y Trigonometría para la enseñanza de los Caballeros Cadetes del Real Colegio Militar de Artillería.* Segovia, Imp. Antonio Espinosa.

JIMENEZ Y BAZ, J. (1857) *Elementos de Geometría descriptiva, Trigonometría rectilínea y Topografía.* Madrid, Imp. Cea.

LACROIX, S.F. (1846) *Tratado elemental de trigonometría rectilínea y esférica, y de aplicación del Algebra a la Geometría.* 8ª edición, Madrid.

LEROY, C.F.A. (1862) *Traité de Stéréotomie comprenant les applications de la Géométrie descriptive à la Théorie des ombres, la perspective linéaire, la Gnomonique, la Coupe des Pierres et la Charpente.* 3ème édition revue et annotée par M.E. Martelet, Paris, Mallet-Bachelier, Imprimeur-Libraire.

LEVY, M. (1874) *La statique graphique et ses applications aux constructions.* Paris

LOPEZ TORRENS, J. (1881) *Nociones de Geometría elemental y descriptiva.* Granada, Imp. Sabatel.

LOZANO Y ASCARZA, A. (1866) *Lecciones fundamentales de Geometría descriptiva.* Toledo, Imp. Romerò.

MERAY, Ch. (1874) *Nouveaux Eléments de Géométrie.* Paris, Savy. Reedición en 1903

MONGE, G. (1803) *Geometría descriptiva. Lecciones dadas en las Escuelas Normales en el año tercero de la República.* Madrid, Imp. Real. Traducción al castellano para el uso de los estudios de la Inspección General de Caminos.

____. (1809) *Application de l'analyse a la Géométrie, a l'usage de l'Ecole Impériale Polytechnique.* 4ª édition, Paris, Bernard, .

____. (1922) *Géométrie descriptive.* Paris, Gauthier-Villars, 2 Vols. Reproducción de la cuarta edición de 1820 que contiene, además de la Geometría descriptiva, la Teoría de sombras y la Perspectiva.

MONTEMAYOR, J. (1895) *Apuntes de Geometría descriptiva.* Toledo, Menor Hermanos.

MONTERO GABUTTI, J. (1887) *Teorías de la homografía e involución seguida de otros varios apuntes de Geometría.* Madrid.

ODRIOZOLA, J. (1827) *Curso completo de Matemáticas puras.* Madrid, Imp. García. Tomo II: Geometría elemental y Trigonometría. 1ª edición.

____. (1829) *Curso completo de Matemáticas puras.* Madrid, Imp. García. Tomo III: Algebra sublime y Geometría analítica. 1ª edición.

____. (1843) *Curso completo de Matemáticas puras.* Madrid, Imp.Jordan. Tomo II: Geometría elemental y Trigonometría. 2ª edición.

____. (1844) *Curso completo de Matemáticas puras.* Madrid, Imp. Jordan. Tomo III (reformado): Segunda parte del Algebra y Geometría analítica. 2ª edición.

____. (1849) *Colección primera de compendios de Aritmética, Geometría y Mecánica.* Madrid, Imp. Aguado. Tomos I, II, y III.

____. (1852-1855) *Curso completo de matemáticas puras.* Segovia, Imp. Baeza. Tomo I: Aritmética y Algebra; Tomo II: Geometría elemental.

OLIVIER, T. (1879) *Curso de Geometría descriptiva.* Madrid, Imp. La Guirnalda. Traducción de U. Mas y Abad.

OROZCO Y DE LA PUENTE, E. (1881) *Nociones de Geometría descriptiva.* Madrid, Imp. Laforga.

ORTEGA, M. (1885) *Geometría.* Guadalajara, Imp. Provincial.

____. (1901) *Geometría.* 9ª edición, Toledo, Imp. Peláez.

PADILLA ARCOS, P. (1753) *Curso Militar de Mathematicas.* Madrid, Antonio Marín. Tomo II: Geometría elemental.

____. (1756) *Curso Militar de Mathematicas.* Madrid, Antonio Marín. Tomo IV: Geometría superior o de las curvas y Cálculo Diferencial e Integral o Methodo de las fluxiones.

PEDRAZA, P. & ORTEGA, M. (1895) *Geometría descriptiva. Atlas.* Toledo, Imp. Peláez.

____. (1912) *Lecciones de Geometría Descriptiva. Rectas y planos.* 8ª edición, Madrid, Librería de los Sucesores de Hernando. Primera edición en 1879.

PEDRAZA Y CABRERA, P. (1879) *Geometría descriptiva. Atlas.* Madrid, Lit. Rodán.

____. (1879) *Lecciones de Geometría descriptiva.* Madrid, Imp. Memorial de Ingenieros.

____. (1880) *Lecciones de Geometría Descriptiva.* Madrid, Imp. Memorial de Ingenieros.

____. (1882) *Lecciones de Geometría descriptiva. Texto y atlas.* Madrid, Imp. Memorial de Ingenieros.

____. (1887) *Geometría descriptiva.* Barcelona, Lit. Ramírez.

____.(1887) *Lecciones de Geometría descriptiva.* Guadalajara, Imp. Provincial.

____. (1909) *Lecciones de Geometría descriptiva. Superficies en general.* 5ª edición, Madrid, Imp. Memorial de Ingenieros.

RODRIGUEZ ARROQUIA, A. (1850) *Complemento a la Geometría descriptiva. Empleo de un solo plano de proyección valiéndose del sistema de acotaciones para servir de aplicación de los principios generales de la ciencia a las superficies irregulares y como preliminar a la Topografía y a la Desenfilada de las obras de fortificación.* Madrid, Imp. Boix.

____. (1865) *Complemento a la Geometría Descriptiva. Empleo de un solo plano de proyección valiéndose del sistema de acotaciones.* Madrid, Imp. Memorial de Ingenieros.

ROUCHE, E. & COMBEROUSSE, Ch. (1878) *Tratado de geometría elemental.* Madrid, Imprenta, Estereotipia y Galvanoplastia de Aribay y Cª.

SALAZAR Y DE LA VEGA, F. G. (1896) *Principios y reglas fundamentales de perspectiva lineal.* Toledo, Imp. Menor.

SANCHIZ Y CASTILLO, F. (1851) *Tratado de Geometría analítica*. Segovia, Imp. Baeza.

SONNET Y FRONTERA (1878) *Geometría analítica*. Madrid.

VALCARCE QUIÑONES, A. (1892) *Elementos de Geometría analítica*. Toledo, Imp. Menor.

____. (1896) *Elementos de Geometría analítica*. Toledo, Imp. Menor.

VALENZUELA, E. (1896) *Axonometría rectangular o perspectiva axonométrica rectangular*. Guadalajara, Imp. Provincial.

VALLEJO, J.M. (1819) *Compendio de Matemáticas puras y mixtas*. 1ª edición, Valencia, 2 Tomos.

VIDAL Y RUA, A. (1880) *Aplicación del Cálculo diferencial a la Teoría de líneas y superficies*. Madrid, Imp. Memorial de Ingenieros.

____. (1882) *Aplicaciones geométricas del Cálculo integral a la rectificación de líneas, cuadratura de superficies y cubatura de sólidos*. Madrid, Imp. Memorial de Ingenieros.

____. (1897). *Aplicación del Cálculo diferencial a la Teoría de líneas y superficies*. Guadalajara, Imp. de la Diputación.

____. (1898) *Aplicaciones geométricas del Cálculo integral a la rectificación de líneas, cuadratura de superficies y cubatura de sólidos*. Madrid, Imp. Memorial de Ingenieros.

ZORRAQUIN, M. (1819) *Geometría analítico-descriptiva*. Alcalá, Imp. Manuel Amigo.