LLULL, vol. 16, 1993, 43-114

LAS PROGRESIONES INFINITAS: EL PAPEL DEL DISCRETO Y DEL CONTINUO EN EL SIGLO XVII

JEAN DHOMBRES*
CNRS

RESUMEN

Las progresiones geométricas han desempeñado un papel históricamente importante en la comprensión del infinito, sin duda porque se podía leer en ellas tanto el discreto como el continuo. Basada en esta oposición, una de las paradojas de Zenón fue reducida por Grégoire de Saint-Vincent tras una definición irreprochable del límite de una serie (en el Opus geometricum, *un voluminoso trabajo publicado en 1647 en Amberes). A partir de textos escasamente conocidos de este autor, algunos de cuyos fragmentos son traducidos aquí, y en yuxtaposición con un escrito de Fermat sobre la cuadratura de las hipérbolas, el objetivo de este artículo es manifestar el cambio en la inspiración, en la primera parte del siglo XVII, del continuo geométrico al discreto algebraico y la vuelta al continuo.*

ABSTRACT

Geometric progressions played an important role in the past for the understanding of the infinite; this is perhaps due to the dual reading of progressions in terms of discrete quantities or of continuous ones. Based on this opposition, one of Zeno's paradox was reduced by Gregory of Saint-Vincent as he was able to provide an irreproachable definition for the limit of a series (in the Opus geometricum, *an imposing work published in Antwerp in 1647). From texts of this author, who is surprisingly not often read, confronted with a famous writing of Fermat on the quadrature of hyperbolæ, the purpose of this paper is to illustrate a sway of inspiration during the first part of the seventeenth century form the geometric continuum to discrete algebraic properties and back to the continuum.*

* Versión castellana de Benito Cuezva.

Recibido el 15 de noviembre de 1992

Palabras clave: Matemáticas, Siglo XVII, Grégorie de Saint-Vincent, Zenón, Fermat.

Las progresiones geométricas han desempeñado un papel histórico importante en la aprehensión del infinito y el continuo, papel que sería erróneo reducir a la única contribución de dar un valor finito a una suma compuesta por infinitos términos. Evidentemente, obtenida bajo una forma u otra, y para $|x|$ estrictamente menor que la unidad, la fórmula

$$\text{(G)} \qquad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{n=\infty} x^n$$

no puede dejar de ser el comienzo del estudio de las series, en primer lugar del binomio

$$(1-x)^\alpha = 1 - \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 - \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \dots,$$

para un exponente cualquiera, correspondiendo (G) a $\alpha=-1$, y más generalmente las series enteras

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Gracias a la versatilidad de su empleo, especialmente para el cálculo explícito del resto, la serie geométrica ha servido además de ejemplo típico para aproximar un número real cualquiera y de punto de partida para comprender un continuo como el conjunto de los puntos de una recta situados entre dos puntos dados sobre esta, puesto que el recurso de la escritura decimal ilimitada de un numero real cualquiera x depende de ello. Escribiendo

$$\pm \sum_{n=-N}^{n=\infty} \frac{x_n}{10^n}$$

donde x_n es un entero comprendido entre 0 y 9 para cada n y N un entero positivo o nulo, gracias a la relación (G) aplicada con x=9/10, se constata que un número para el cual el entero x_n es siempre igual a 9 a partir del rango n' tiene por valor

$$\pm \left(\sum_{n=-N}^{n=n'-1} \frac{x_n}{10^n} + \frac{1}{10^{n'-1}} \right)$$

La elección de una mirada histórica

Mi intención no es ciertamente desarrollar una larga historia de las apariciones de la serie geométrica, que podría comenzar con la leyenda del rey al que habría arruinado la promesa de ofrecer una recompensa de un grano de trigo doblado sucesivamente sobre cada escaque del tablero de ajedrez. El propósito del estudio es únicamente dar cuenta de algunas utilizaciones de esta serie, aquellas que han podido dar forma a algunos de los conceptos sobre el infinito y el continuo, reconociendo por supuesto el lado subjetivo -¿pero no es acaso la historia, toda ella, una construcción?- y confesando sin apuro extraer el material de forma muy selectiva del inmenso depósito de las matemáticas del pasado.

Desde luego que publicando la simple investigación de las determinaciones de la fórmula (G) podría preservar mi estudio contra cualquier ataque, por el flanco metodológico principalmente: a menudo se toma como pretexto la positividad del hecho matemático para hacer la narración construyendo una larga lista de participantes en el devenir de los tiempos y de artículos publicados o manuscritos. No será este el caso. Una fórmula, particularmente una fórmula analítica, rara vez es un punto de llegada, sino más bien uno de partida. ¿Cómo no pensar en el papel de la fórmula (G) en la creación de la teoría de los anillos normales, las álgebras de Banach (ideales maximales, etc.) bajo la impulsión primero de N. Wiener y después I.M. Gelfand, D.A Raikov, G.E. Chilov, etc., justo antes de la II Guerra Mundial? Otra pista sería la teoría de la estabilidad del cálculo de valores y vectores propios de matrices por el método de relajación, bautizado bajo el doble patronímico de Gauss y Seidel. A decir verdad, la fórmula (G) es suficientemente simple y general para encontrarse en el punto de partida de un buen número de teorías y prácticas matemáticas, no siendo el cálculo simbólico una de las menores. ¿No incumbe al historiador de las matemáticas -y al epistemólogo- efectuar la selección de estas filiaciones? Un trámite al cual se reconocerá que evita la insoportable intención teleológica -explicación de lo posterior por lo anterior- sin que se tenga que renunciar a la dinámica, es decir, al sentido de la visión en la investigación matemática, incluso cuando esta visión es muy raramente la objetivación pensada hoy.

Los factores históricos no son ciertamente los únicos que crean la objetividad matemática y el lógico se ocupará de manera muy distinta de una construcción en la que los matemáticos tienen en cuenta la concepción arquitectónica, la eficacia, la estética manifestada por la elegancia o, más a menudo de lo que se piensa, la revelación de lo real. No obstante, un platónico convencido apenas puede desinteresarse por el movimiento que aparta la mirada del muro de la caverna y un fenomenólogo no sabría recusar la delimitación de los estratos que hacen de una teoría matemática un ser en el cual los desarrollos se imponen objetivamente, si no ineluctablemente.

En todo caso, es la articulación entre la fórmula y algunos conceptos del continuo donde he decidido dirigir una mirada histórica. Si he adoptado preferentemente los textos del siglo XVI y de la primera mitad del siglo XVII, seguidos con atención y extensamente citados, es por que el método histórico exige esta concentración, aunque sin excluir el recurso puntual tanto a las obras de Euclides como a las de los escolásticos.

Una experiencia: La división del continuo

Quizás sea un dibujo lo que está en el origen de la composición del continuo en un autor al que todo el mundo reconoce la primera resolución matemática de la paradoja de Zenón, aquella en la que Aquiles corría desesperadamente tras una tortuga. Este autor es Grégoire de Saint Vicent (1584-1667), padre jesuita cuya formación matemática se efectúa en el Colegio Romano durante los primeros años del siglo XVII. El fue el animador principal de lo que se puede llamar escuela matemática belga, compuesta por maestros como Guldin, de la Faille o Tacquet[1].

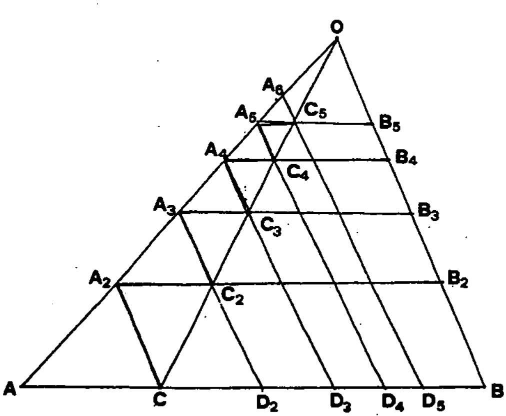


Figura 1

El dato visual es un triángulo OAB, con elección arbitraria de un punto C entre A y B, que determina la secante OC. Desde C se lleva una paralela al lado OB, cortando el lado OA en A_2. Del punto A_2 se lleva una paralela a la base AB, cortando la secante OC en el punto C_2. De C_2, de nuevo paralelamente a OB, la recta C_2A_3, después A_3C_3 paralelamente a AB y así sucesivamente. Alternativamente, sobre el lado OA y sobre la secante OC se establecen dos familias de puntos: A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, etc. y C_1, C_2, C_3, C_4, etc. Naturalmente, trazando paralelas a OB se pueden proyectar todos esos puntos sobre la recta AB, generando así una familia A, C, D_2, D_3, D_4, etc. y también, trazando paralelas a la base AB, proyectando sobre OB para obtener esta vez B_1, B_2, B_3, B_4, etc.

En esta situación, es la concatenación de los hechos lo que debió llamar la atención de Grégoire de Saint-Vincent. Por una parte, se puede ver la longitud OB completa, pero también dividida en segmentos distintos CA_2, C_2A_3, C_3A_4, etc., segmentos trasladados que corresponden a los segmentos alineados BB_2, B_2B_3, B_3B_4, etc. Por otra parte, la operación de constitución de los diferentes segmentos es repetitiva; es la misma construcción la que es sucesivamente iterada, de modo que la simplicidad de la iteración sugiere que es posible el cálculo, que una ley regular preside la composición en segmentos de la longitud OB. Se revela que esta regularidad es la de la progresión geométrica.

Para probar esta afirmación basta calcular las proporciones en una sola etapa: una figura reducida es mucho más cómoda y esta simplificación es una de las ventajas de la iteración. Adoptemos la notación de Grégoire de Saint-Vincent, que naturalmente no hace uso de índices numéricos (los hemos adoptado para simplificar), sino que utiliza el abanico de las letras del alfabeto latino para hacerse entender.

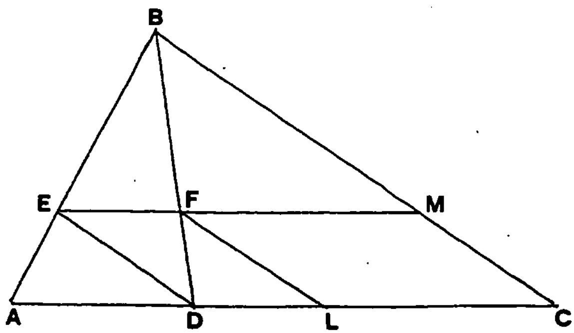


Figura 2

Aplicando dos veces el teorema de Thales se tiene

$$\frac{AD}{EF} = \frac{DB}{FB} \text{ y } \frac{DC}{FM} = \frac{DB}{FB} .$$

Puesto que el paralelogramo DEMC nos da EM=DC, se dispone de la proporción

(1) $$\frac{AD}{EF} = \frac{EM}{FM} .$$

Lo que todavía se puede escribir según una proporción haciendo aparecer sólo las longitudes llevadas sobre la base AC:

$$\frac{AD}{DL} = \frac{DC}{LC} .$$

Un cálculo del álgebra de proporciones conduce inmediatamente a

$$\frac{AD}{DL} = \frac{DC}{LC} = \frac{AD+DC}{DL+LC} = \frac{AC}{DC}$$

De lo cual se deduce:

(2) $$\frac{AD}{EF} = \frac{AC}{DC}$$

Las relaciones (1) y (2) constituyen una agrupación simple que hace comprender la permanencia de la iteración: la relación de una longitud como AD con la longitud siguiente EF es un invariante porque es igual a la relación en la cual D divide la base AC (o sea AC/DC) y lo es además en la relación en la cual el nuevo punto F divide a la nueva base EM (o sea EM/FM). Poniendo r=AC/DC=EM/FM se manifiesta a su vez que AD/EF=r. Traducido al lenguaje actual de subíndices numéricos de la figura 1, esta invariancia da:

(3) $$r = \frac{AC}{A_2C_2} = \frac{A_2C_2}{A_3C_3} = \frac{A_3C_3}{A_4C_4} = \dots .$$

Una permanencia que se puede leer también sobre la base AB:

(4) $$\frac{AC}{CD_2} = \frac{CD_2}{D_2D_3} = \frac{D_2D_3}{D_3D_4} = \dots ,$$

o incluso, gracias a la semejanza de triángulos ACA_2, $A_2C_2A_3$, $A_3C_3A_4$, etc,. sobre el lado OB:

$$(5) \qquad \frac{BB_2}{B_2B_3} = \frac{B_2B_3}{B_3B_4} = \frac{B_3B_4}{B_4B_5} = \ldots .$$

Dicho de otra forma, los puntos A, C, D_2, D_3, D_4, etc. determinan sobre el segmento AB intervalos sucesivos cuyas longitudes forman una progresión geométrica[2] y los puntos B, B_2, B_3, B_4, etc., forman a su vez sobre el segmento BO otra progresión geométrica. Otras progresiones son obtenidas con los puntos A, A_2, A_3, A_4, etc. sobre OA o los puntos C, C_2, C_3, C_4, etc., sobre OC.

Nótese además que la comparación de (1), después de su traducción sobre el eje AC, con (2) muestra que la longitud DC (figura 2) es la media geométrica de las longitudes AC y LC ($DC=\sqrt{AC.LC}$). En la abscisa (en la figura 1) este resultado podría fácilmente arrojar una progresión geométrica al revés, con los segmentos BA, BC, BD_2, BD_3, BD_4, etc. No es esta la vía seguida aquí por Grégoire de Saint-Vincent, aunque, por supuesto, la conoce[3].

Aunque se revela notable la presencia de las progresiones geométricas generadas por la iteración realizada de forma muy simple, esta *visualización* no sirve de prueba de la composición del continuo AB por $AC+CD_2+D_2D_3+D_3D_4+$etc., del OB por $BB_2+B_2B_3+B_3B_4+$etc. o del continuo OC por $CC_2+C_2C_3+C_3C_4+$etc. Grégoire de Saint-Vincent pretende llegar a obtener esta prueba: este es el objeto de la segunda parte de su libro dedicado a las progresiones geométricas.

La *experiencia* que acabamos de describir se encuentra insertada justo antes, en la primera parte del segundo libro, en la proposición 70. Este emplazamiento es totalmente premeditado, como se puede apreciar después de un rápido examen de la organización general de la obra. *L'Œuvre geométrique*[4] de Grégoire de Saint-Vincent apareció muy tardíamente en Anvers en 1647: consta de diez libros y 1225 páginas en folio, siendo uno de los textos más copiosos de todo el siglo XVII, y sin duda, de bastantes otras épocas. Los resultados esenciales estaban ya redactados en los años 1617-1625, durante los cuales el sabio revelaba las matemáticas a un público restringido de aprendices jesuitas, en Anvers primero y luego en Lovaina[5]. El contenido está inteligentemente dividido en función de las secciones cónicas: un libro para el círculo, tres para la elipse, la parábola y la hipérbola respectivamente, un libro para las superficies de segundo grado (según la terminología actual).

Pero en esta geometría de segundo grado se insertan unos libros concebidos como técnicos: el primero trata *la potencia de las líneas* poniendo en juego las proporciones y el álgebra correspondiente, el segundo está enteramente consagrado a la progresión geométrica, sobre la que retornará en el libro octavo para adaptarla a la medida de áreas y volúmenes gracias a la teória del *ductus* del séptimo libro, un capítulo muy original del *Opus geometricum* hoy totalmente olvidado[6]. El último libro de la obra es el de la vergüenza, en el sentido de que Grégoire pretende demostrar allí la posible cuadratura del círculo y, de hecho, la de las otras cónicas.

En la primera parte del segundo libro, titulado *De progressionibus geometricis* (Sobre las progresiones geométricas) Grégoire de Saint-Vincent trata de las *progresiones incoativas, es decir no terminadas, en el sentido que el término [final] de las progresiones no será por el momento tomado en consideración*[7]. Se trata por supuesto de las progresiones geométricas finitas. La exposición es *abstracta*, pero en la línea del libro quinto de los *Elementos* de Euclides, ya que si el autor utiliza magnitudes del mismo tipo, las representa todas por segmentos de recta, utilizando por consiguiente un mínimo de espacialidad; el objetivo del cálculo es la razón, es decir, la relación de dos magnitudes del mismo género.

La proposición 70, de la cual acabamos de dar el contenido, contrasta sin embargo en el conjunto de las 74 proposiciones de la primera parte. Pues la figura que allí se utiliza no es un alineamiento de segmentos, sino que hace intervenir líneas trazadas en triángulos[8], poniendo lo espacial-geométrico a trabajar. Además, es la primera vez que aparece propiamente un procedimiento iterativo al que había prometido un bello desarrollo en el resto de la obra. En todo caso, Grégoire anunciaba el papel de la iteración desde la introducción del libro 2; le había llamado particularmente la atención la expresión *Et hoc semper fiat* que aparece en Euclides, especialmente en el libro X de los *Elementos*. Así, en la proposición 1 de este libro se lee:

> "Dadas dos magnitudes desiguales, si se retira de la mayor una parte más grande que su mitad, si se retira del resto una parte mayor que su mitad y si se hace siempre lo mismo, quedará una cierta magnitud que será menor que la más pequeña de las magnitudes propuestas"[9].

Grégoire se refiere a Arquímedes, cuya formulación difiere sin embargo de la de Euclides por ejemplo en la *Cuadratura de la Parábola*[10] incluso en la *Medida del círculo*[11]. *Esta formulita picaba particularmente mi espíritu y me conducía a tristes pensamientos*[12] confesaba no sin inquietud el padre jesuita. La proposición 70 pone de manifiesto el resultado de tales *pensamientos*, de forma que esta proposición que hemos calificado de experiencia, constituye ciertamente un pivote, el paso de la progresión finita a la progresión infinita, es decir de lo interminado al terminado en palabras de Grégoire de Saint-Vincent. Este pasaje, que colocamos hoy en el dominio del análisis y que durante mucho tiempo fue considerado bajo la incumbencia del álgebra, está primeramente, al comienzo del siglo XVII, colocado bajo la bandera de la geometría.

He aquí el texto original de la proposición 70. Se notará que el enunciado literal actúa sobre unos segmentos que no están alineados, siendo el primer objetivo mostrar la estabilidad de la iteración antes de sumarlos alineándolos:

PROPOSICION LXX: Sit ABC triagulum diuisum rectâ lineâ DB, decanturq; linee DE, EF, FG, GH, HI, IK basi AC, et lateri BC parallele quot libuerit. Dico omnes AD, EF, GH, IK, item DE, FG, HI, etc, esse in eadem continuata analogia.

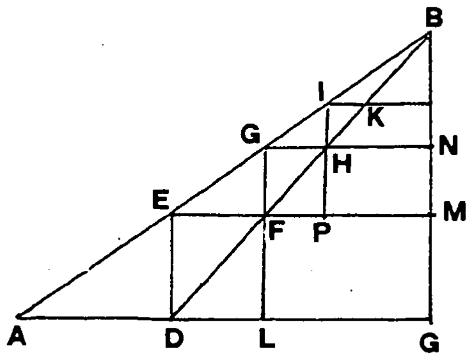


Figura 3

Una vez obtenido esto, en lugar de avanzar directamente por la vía iterativa que inaugura con la proposición setenta, Grégoire de Saint-Vincent propone primero algunas diversiones; se puede suponer que lo hace con la intención de subrayar la intrusión de la geometría, del continuo espacial, en un libro que no parecía revelar hasta allí más que álgebra, al menos la que está ligada a la teoría de proporciones cuyas reglas son precisamente independientes de la naturaleza de las magnitudes en análisis. Así, en la proposición 71 toma dos progresiones geométricas sobre dos rectas concurrentes en L. Uniendo por segmentos los términos de rango correspondiente en las dos progresiones (figura 4) Grégoire indica que las áreas de los triángulos constituyen igualmente una progresión geométrica[13], al igual que las áreas de los trapecios ABGF, BCHG, CDIH, etc. ¡Estas disgresiones no podían durar demasiado!

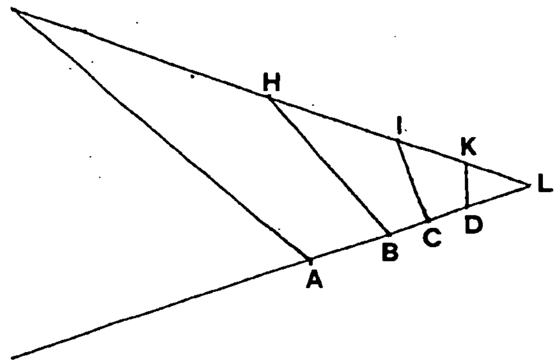


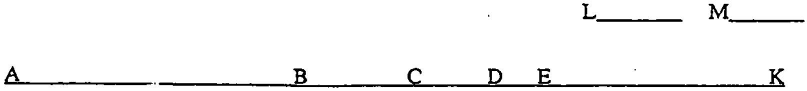
Figura 4

Formas de la fórmula (G): El continuo dividido y el discreto continuo

Si el dibujo de la proposición 70 inventa una división del continuo, el proyecto no es ni más ni menos que la composición de este continuo. A partir de la proposición 75, que es la primera de la segunda parte del libro 2, Grégoire de Saint-Vincent pone manos a la obra. Para demostrar, en primer lugar, una evidencia visual: sobre su recta respectiva los puntos A, A_2, A_3, A_4, etc., o C, C_2, C_3, C_4, etc., o incluso B, B_2, B_3, B_4, etc., quedan de un lado del punto O (figura 1). El enunciado adoptado a este efecto simplifica los datos en la medida en que basta con considerar una única progresión geométrica y sobre todo por que se puede abandonar la espacialidad de la representación figurada para volver a la linealidad de la representación de longitudes.

1. Presencia del infinito: una prueba por recurrencia

"Proposición 75: Si se tiene una magnitud AB que sea a la magnitud BK como la magnitud BC a la magnitud CK, yo digo que la proporción de AB a BC puede ser continuada en acto sin término [final] en el interior de la magnitud AK, de manera que no llega nunca a K"[14].



La conclusión de esta proposición 75 presenta una innegable connotación filosófica. Grégoire de Saint-Vincent entiende probar la continuación en acto de una progresión; es indudablemente un teorema de existencia lo que acomete. Vamos pues a revisar la prueba dada por el jesuita de Brujas a fin de comprender el puro juego algebraico que instaura por la manipulación de las proporciones y al hacerlo, vamos a familiarizarnos con ellas. Esto puede parecer fastidioso al principio, sobre todo en comparación con nuestro álgebra, pero en esta proposición 75 la recurrencia no explícita del razonamiento de Grégoire exige una bastante atención[15].

La hipótesis fija al principio los puntos extremos A y K y dos puntos intermedios B y C, de forma que

$$(1) \qquad \frac{AB}{BK} = \frac{BC}{CK} \;.$$

De hecho, el punto B se elige arbitrariamente entre A y K, mientras que el punto C está determinado por la relación (1). Así pues convendría establecer que C está efectivamente situado entre los puntos B y K, es decir, la longitud BC es inferior a BK y esto para cualquier elección posible de B. Grégoire de Saint-Vincent no hace esto y será necesario explicar tal ausencia que, de hecho, es indicio no de una falta sino más bien de un presupuesto. Volveremos sobre ello.

En todo caso, AB/BC es una razón fija y, respetando la regla que denotaremos como (G_d) para referencias posteriores, se puede construir iterativamente una progresión de puntos D, E, F, etc.

$$(G_d) \qquad \frac{AB}{BC} = \frac{BC}{CD} = \frac{CD}{DE} = \frac{DE}{EF} = \ldots \;.$$

La finalidad de la proposición es probar que todos los puntos así establecidos D, E, F, etc. están de un lado del punto K. Como para todo razonamiento por recurrencia -tal es el caso, pues hay que interpretar (G_d) como una iteración, una repetición indefinida-, Grégoire de Saint-Vincent comienza por situar el primer punto D. Porque el proceso seguido debe presentar un caracter suficientemente general, es muy cuidadoso y constructivo. Establece primero una magnitud L como tercera proporcional de las dos primeras longitudes AB y BC dadas y la inscribe de hecho en la figura, encima del segmento AK:

$$(2) \qquad \frac{AB}{BC} = \frac{BC}{L}$$

Tal construcción es lícita en el marco de la teoría de las proporciones: Clavius, el maestro de Grégoire de Saint-Vincent en el Colegio Romano, la había incorporado debidamente al corpus euclidiano en su edición latina comentada de los *Elementos*[16] en 1574. Intercambiando los términos medios en la primera proporción de (1) que define C a partir de A, B y K, Grégoire de Saint-Vincent obtiene la proporción:

$$(3) \qquad \frac{AB}{BC} = \frac{BK}{CK} .$$

Comparando (2) y (3) e intercambiando de nuevo los términos medios, dispone de

$$(4) \qquad \frac{BC}{BK} = \frac{L}{CK} .$$

La relación (4) está bien adaptada para indicar que L es una longitud estrictamente inferior a CK, puesto que ya se dijo -aunque no fue demostrado- que la longitud BC es estrictamente inferior a BK. La obtención de una desigualdad a partir de proporciones convenientemente dispuestas mantiene la pura tradición euclídea (libro V de los *Elementos*).

Nótese que el punto D no ha intervenido todavía y, de hecho, Grégoire lo construye ahora poniendo

$$CD = L ,$$

lo que asegura la posición del punto D ante el punto K gracias a que $L<CK$. Pero en este caso es necesario *probar* que el punto D así construido corresponde al punto D definido al principio por la iteración (G_d). Es fácil puesto que, simultáneamente, AB, BC, CD (según (G_d)) y AB, BC, L (por construcción) están en progresión geométrica; ahora bien, tal progresión está determinada por sus dos primeros términos[17], de ahí la igualdad $L=CD$.

Lograda esta primera etapa, es necesario ahora abordar la etapa general y todo está preparado para hacerlo por analogía con el proceso utilizado en la primera etapa. No puede ser, sin embargo, una simple repetición porque, en el camino, se ha debido utilizar la proposición (1), que fija cuantitativamente la posición de C en relación a K, aún cuando en la etapa general no se conoce *a priori* la relación que liga DK, EK, etc. con las cantidades precedentes. Así el propósito, de puro cálculo, es establecer en general una relación de la forma (1) para los puntos sucesivos. Pues, una vez logrado esto, el proceso de la primera etapa será renovable y la recurrencia debidamente probada. Con este objetivo, el punto siguiente E debe de ser considerado como *punto genérico* de la serie, mientras que D era el primer punto. Este modo de enfocar una recurrencia por un punto particular es normal, teniendo en cuenta la ausencia de notación con subíndices.

Precisamente, como en la primera etapa, Grégoire construye una longitud M que define como cuarta proporcional de tres magnitudes según:

$$(5) \qquad \frac{AB}{BC} = \frac{CD}{M},$$

magnitud M que pone a su vez en la figura, encima del segmento AK. Elidiendo la proporción intermedia $\frac{BC}{CD}$ el autor indica que el rango no cuenta y que $\frac{AB}{BC}$ interviene como razón de la progresión geométrica; es un elemento *genérico*. De manera que la evocación de una tercera proporcional en el momento de la primera etapa aparece de ahora en adelante como un suceso fortuito sujeto únicamente a la contigüidad de B y C; de hecho si $\frac{AB}{BC} = r$, sería necesario leer $r = \frac{BC}{L}$ y ahora $r = \frac{CD}{M}$; y así sucesivamente.

Como en la primera etapa, Grégoire evita hacer intervenir al nuevo punto E, aún cuando la comparación de (5) y (G_d) proporciona evidentemente la igualdad M=DE, de modo que la desigualdad a lograr M<DK fijará E, punto genérico, entre su predecesor (D en este caso) y el punto K. La táctica consiste en hacer intervenir DK y, tal como está definida en el libro V, la manipulación de las proporciones se presta perfectamente a ello. No obstante, Grégoire comienza por invertir la proporción (4) en la que L=CD, lo que es un estorbo para la recurrencia en la medida en la que esta relación no presenta un carácter genérico. Habrá que volver sobre esto. En cualquier caso, dispone de la proporción:

$$(6) \qquad \frac{BK}{BC} = \frac{CK}{CD},$$

y, puesto que BK>BC y CK>CD (hipótesis de recurrencia), Grégoire utiliza la regla llamada *dividendo*:

$$\frac{BK\text{-}BC}{BC} = \frac{CK\text{-}CD}{CD},$$

para tener

$$\frac{CK}{BC} = \frac{DK}{CD} ,$$

proporción que invierte de nuevo:

$$\frac{BC}{CK} = \frac{DK}{DK} , \tag{7}$$

La recurrencia está esta vez anclada, pues la relación (7) es el análogo exacto de la relación (1): fija cuantitativamente el punto D entre C y K, de la misma forma que el punto C queda fijada entre B y K y como B es fijo entre A y K. De manera que la analogía formal[18] con la primera etapa procura la desigualdad M<DK. El asunto es extendido:

"se podrá en consecuencia suprimir de DK una magnitud DE igual a M. Así las cuatro magnitudes AB, BC, CD, DE están en proporción continua"[19].

De esta manera la conclusión amonesta mediante un *así* la recurrencia que acabamos de obtener.

"Y así demostraremos que la proporción de AB a BC, en el interior de la línea AK puede ser continuada en acto sin término [final] de forma que no alcanza el punto K"[20],

lo que cierra un sonoro *Quod erat demonstrandum*.

2. *Horizonte discreto y horizonte continuo: análisis y síntesis*

El género al que quería pertenecer el razonammiento de Grégoire de Saint-Vincent en el curso de esta prueba es el género analítico, entendido en el sentido clásico, el de Pappus, puesto que primero se establecen los puntos B, C, D, etc. según la regla (G_d) y, supuesta su construcción, un cálculo permite establecer otras relaciones :

$$\frac{AB}{BK} = \frac{BC}{CK} = \frac{CD}{CK} = \frac{DE}{DK} = \dots ,$$

de las cuales se deducen las desigualdades CD<CK, DE<EK, etc., las cuales, a cambio, justifican el lugar anterior al punto K de los puntos C, D, E, etc. lo que constituye su propia existencia. Este método analítico es desarrollado de forma algebraica, lo hemos constatado perfectamente. Pero pronto esta

referencia al álgebra iba a caracterizar por si misma el propio proceso analítico.

Magistralmente llevada, la recurrencia analítica se desarrolla convenientemente con excepción de la posición inicial del punto C, que no es probada, y también, de lo que depende de la etapa general de recurrencia, de una intervención de la relación (3), *a priori* no genérica. De hecho, las dos excepciones conciernen a un mismo horizonte que, por oposición al proceso analítico, se puede calificar de sintético. Este horizonte está unido a la definición de serie geométrica en Grégoire de Saint-Vincent, por que es necesario distinguirla, al menos en un principio, de la de una progresión geométrica. Ciertamente, una progresión geométrica es *la sucesión de un número cualquiera de términos según la misma razón*[21], de forma que, satisfaciendo (G_d), las longitudes AB, BC, CD, etc. constituyen tal progresión. Esto es lo que clasificamos bajo la denominación de *discreto continuo*. Pero la serie geométrica es una noción más global, donde precisamente interviene *a priori* el continuo:

"Llamo serie geométrica a una cantidad finita dividida en sucesión ininterrumpida según una razón dada cualquiera"[22].

Una serie geométrica representa *a la vez* una magnitud AK y una división de esta magnitud por los puntos B, C, D, etc. según una regla iterativa que llamaremos (G_c) para resumir, donde la *c* representa la continuidad.

$$(G_c) \qquad \frac{AK}{BK} = \frac{BK}{CK} = \frac{CK}{DK} = \frac{DK}{EK} = \dots$$

Una serie, según Grégoire de Saint-Vincent, es un *continuo dividido.*

Desde el punto de vista del cálculo, las dos nociones no son ciertamente independientes, sino que una encierra lo analítico y la otra lo sintético, sus horizontes son diferentes. Ahora bien, éstos se superponen en la demostración de la proposición 75 y es esto lo que le da todo su interés pese a la complicación que parece procurar. Interés mayor, porque si el pensamiento matemático ulterior iba a borrar pronto la noción de serie como continuo en beneficio de la noción discreta de progresión -un borrado que sustituye el primer vocablo para acuñarlo en el sentido del segundo-, al menos podemos verificar que fue *necesario combinar el continuo y el discreto para llegar a una teoría de la convergencia.*

Sin embargo, no se trata de establecer aquí una la lógica. Para Grégoire de Saint-Vincent, si los dos conceptos de *serie* y de *progresión* son útiles y no constituyen unas meras definiciones nominales y desprovistas de representación matemática efectiva, es por que el cálculo explícito las liga y es este mismo cálculo el que, subyacente a la prueba de la proposición 75 del libro, la dirige de hecho. Es fácil darse cuenta de ello.

Partamos de la *serie geométrica* AK que nos lleva a

$$(G_c) \qquad \frac{AK}{BK} = \frac{BK}{CK} = \frac{CK}{DK} = \frac{DK}{EK} = \ldots$$

La regla *dividendo* de las proporciones da inmediatamente

$$\frac{AK\text{-}BK}{BK} = \frac{BK\text{-}CK}{CK} = \frac{CK\text{-}DK}{DK} = \frac{DK\text{-}EK}{EK} = \ldots ,$$

una serie de proporciones que vamos a notar como (G_i):

$$(G_i) \qquad \frac{AB}{BK} = \frac{BC}{CK} = \frac{CD}{DK} = \frac{DE}{EK} = \ldots .$$

Si ponemos *i* como subíndice es, por una parte, por que la relación iterativa (G_i) sirve de intermedio[23] en la proposición 75 y, por otra parte, el discreto y el continuo aparecen en ella simultáneamente, puesto que en el numerador están las magnitudes AB, BC, CD, etc. y en el denominador BK, CK, DK, etc., estas últimas ligadas al punto final K. Pero esto no es todo. Sólo con las relaciones (G_i) se pueden deducir las relaciones (G_d) según un cálculo que aparece frecuentemente en el libro 2. Igualmente, a partir de (G_i) solamente, se puede hallar (G_c). Vamos a demostrar estas dos aserciones.

De la primera proporción en (G_i), se deduce por cambio de medios

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BK}{CK} .$$

Con la regla de adición tan particular de las proporciones[24], la igualdad precedente proporciona:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BK}{CK} = \frac{AB+BK}{BC+CK} = \frac{AK}{BK} .$$

Se pueden sacar dos proporciones de lo precedente (2º y 4º término, 1º y 3º término):

$$(8) \qquad \frac{AK}{BK} = \frac{BK}{CK} \,,$$

y

$$(9) \qquad \frac{AB}{BC} = \frac{AK}{BK} \,.$$

Como en el cálculo efectuado para la proposición 70, las proporciones (8) y (9) establecen una estabilidad. Aunque Grégoire de Saint-Vincent no lo hace explícitamente -lo sugiere- es más claro poner r=AK/BK. Basta con desplazar un término en (G_i) para que la forma de las relaciones (8) y (9) sea respectivamente

$$\frac{BK}{CK} = \frac{CK}{DK} \ (= r) \,,$$

y

$$\frac{BC}{CD} = \frac{BK}{CK} \ (= r) \,.$$

Notable es la permanencia de la razón *r*, de modo que

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{CD} \,.$$

La iteración está ajustada y, para los puntos B, C, D, etc., aparecen dos progresiones geométricas con una misma razón. Por una parte,

$$(G_c) \qquad \frac{AK}{BK} = \frac{BK}{CK} = \frac{CK}{DK} = \frac{DK}{EK} \ \ldots\,.$$

y por otra parte

$$(G_d) \qquad \frac{AB}{BC} = \frac{BC}{CD} = \frac{CD}{DE} = \frac{DE}{EF} = \ldots \,;$$

Estas dos progresiones no difieren más que en su primer término. Para la primera se trata de AK, la totalidad, y para la segunda el primer término es AB.

Si (G_d), (G_c) y (G_i) son relaciones equivalentes[25] desde el punto de vista del cálculo, el estatus que confieren a los dos conceptos gregorianos de *serie* y de *progresión* no permite confundirlos por que en la serie se parte de una totalidad, mientras que en la progresión se excede esa totalidad sin que ella intervenga *ab ovo*. Dicho claramente, el punto K no interviene en (G_d). De ahí a pretender que este punto puede ser construido no hay, ciertamente, más que un paso, pero es el paso que inaugura una teoría de la convergencia. Para darlo es necesario adoptar una posición ontológica que corresponde a la creación de una magnitud matemática como AK, en lugar de partir de ella como un dato.

3. La ontología analítica

La doble concepción inicial de Grégoire de Saint-Vincent -*serie* y *progresión*, o discreto continuo y continuo dividido-, enunciada esta vez en términos modernos, equivale a no separar la suma en una serie representada por sus términos sucesivos (según (G_d)) de su resto explícito (según (G_c)): con AB+BC, está CK; con AB+BC+CD, está necesariamente DK, etc. Así la permanencia de la evocación de un continuo global es clara.

Esto se ve particularmente en la proposición 70, por ejemplo en la figura 2. Hay tanto estabilidad *discreta* de la razón AD/EF (es decir AC/A_2C_2 en la figura 1) como la estabilidad *continua* de la razón AC/DC (DC/LC), estabilidad confirmada por la media geométrica $DC=\sqrt{AC.LC}$.

La fuerza del razonamiento de Grégoire de Saint-Vincent, tras haber localizado claramente los dos conceptos mediante definiciones, es construir el primero por el segundo. Su éxito reducirá, de hecho, el primero al segundo. Este es el movimiento indicado por la proposición 75, donde la relación (G_d) es *in fini* examinada casi en exclusiva a expensas de la relación (G_c). Debemos añadir casi, porque subsisten las reminiscencias de (G_c) y del continuo dividido en el curso de la prueba. Así K figura *ab ovo* desde el enunciado de la proposición 75: AK es una totalidad continua que queda en el horizonte. De la misma forma, la posición del punto C entre los puntos B y K es adquirida sin discusión porque está presupuesto por Grégoire -o considerado como evidente- que se dispone de la proporción

(10) $$\frac{AB}{BC} = \frac{AK}{BK} \ ,$$

que no es otra cosa que la igualdad de razones de las dos progresiones geométricas (G_d) y (G_c). Así instituida, aunque B sea cualquiera punto entre A y K, esta proporción prueba que la longitud AK rebasa siempre a AB y de nuevo BK soprepasa a BC. De la misma forma, como AK sobrepasa a BK, AB va más allá de BC. Este resultado, no explicitado por Grégoire está sin embargo bien presente en su espíritu (decrecimiento de los términos). Finalmente, la proposición (4) con L=CD, lejos de ser particular, está pensada como genérica (lo que justifica la recurrencia) puesto que:

(G'_i) $$\frac{AB}{AK} = \frac{BC}{BK} = \frac{CD}{CK} = \frac{DE}{DK} \ \cdots ,$$

resultado que proviene también de la igualdad de las razones de las progresiones (G_d) y (G_c). Si el pensamiento es dirigido hacia (G_d), la forma (G_c) no cesa de intervenir, bajo los sustitutos eventuales (G_i) y (G'_i).

En el fondo, más valdría concebir que el dato de partida para la proposición 75 esta simultáneamente constituido por la relaciones (G_d) y (G_i), es decir, que la proporción (1) es iterada de entrada. Bajo la *única* regulación de (G_d), el juego consiste en mostrar que es efectivamente posible la construcción del punto D entre C y K, del punto E entre D y K, etc; incluso si de vez en cuando debe usarse (G_i) en el cálculo. Grégorie emplea efectivamente un giro propio de la construcción (*poterit ergo ipsi L, ex CK sumi aequalis*), giro que renueva explícitamente (*poterit ergo ipsi M, ex DK abscindei DE aequalis*), teniendo cuidado de introducir unas cantidades intermedias L, M, debidamente construidas y evaluadas con relación a los otros datos y solamente después puestas en juego e igualadas a CD y DE. Esta construcción es iterativa y vale para los puntos F, G, etc. Grégoire de Saint-Vincent no se contenta con la visualización geométrica proporcionada por la iteración en la proposición 70 (cuando la construcción por el dibujo es evidentemente realizable); prueba por el cálculo esta posibilidad hasta el infinito, garantizando pues la prosecución de la iteración (*digo que la proporción de AB a BC puede ser proseguida en acto...*).

Esta prueba analítica de la constructibilidad de los puntos D, E, F, etc., sería sin embargo redundante si tomáramos como definición de los puntos la proporcionada por las relaciones (G_i). En efecto, con esta relación, en cada etapa, por ejemplo después de la que proporciona el punto D situado estrictamente entre C y K, es lícito dividir en E el segmento restante DK según la proporción fijada por la posición del punto B:

$$\frac{DE}{EK} = \frac{AB}{BK} .$$

El punto E no coincide ni con D ni con K. Pero, de hecho, tal observación haría inútil la demostración de la proposición 75 entera, puesto que los puntos sucesivamente construidos según (G_i) están evidentemente situados ante el punto K, sin coincidir jamás con este punto. Si Grégoire proporciona una prueba y un enunciado es porque éstos tienen como papel poner de relieve la ley de progresión (G_d), ley a partir de la cual no es necesario hacer intervenir el punto final K -o la totalidad AK-, desde el momento que queda fijada la razón que hemos denotado por *r*, y que es de hecho inferior a la unidad como el cálculo ha podido probar. Aunque el dato inicial tenga en cuenta la totalidad AK -es *a priori*-, la estrategia elegida para la demostración consiste en deshacerse de ella en beneficio de la progresión (G_d), dato potencial del enunciado que es establecido *en acto*. Hasta tal punto que Grégoire de Saint-Vincent estima haber ligado el punto K a la progresión AB, BC, CD, etc.

Sin embargo, para desarrollarse, el proceso adoptado debe partir de la totalidad AK. Hay un lazo claro entre la concepción sintética del continuo en Grégoire[26] y la demostración analítica que adopta para esta proposición 75 que, según él, tiene virtud ontológica para el punto K. Si Grégoire de Saint-Vincent no piensa primero un discreto que sería suma, sino un continuo del cual sólo la división es discreta, no por ello prepara menos el camino para el discreto continuo.

El estilo analítico es, ciertamente, el estilo corriente en álgebra. Pero para un teorema de existencia la elección de este estilo es muy rara. Privilegiándo para establecer en acto la progresión infinita AB, BC, CD, DE, etc., indicando por tanto la validez del proceso algebraico, Grégoire de Saint-Vincent muestra *una desconfianza con respecto a la evidencia geométrica* de la proposición 70. *Confirmada por la definición de convergencia, un rigor ha sido puesto en marcha.*

4. El término de una progresión

Establecida la constructibilidad, queda precisamente eliminar el resto, o más exactamente, expresar la totalidad del continuo AK como suma de segmentos AB, BC, CD, DE, etc. Grégoire de Saint-Vincent elige un camino lógicamente irreprochable, el de definir en qué sentido se puede afirmar que una totalidad está descompuesta, aún cuando no se alcance nunca en una determinada etapa de la iteración. El *término* es propiamente el horizonte del viaje de la iteración, y lo más importante fue desprenderse de la forma específica del resto. Esta eliminación ha sido tanto más difícil por cuanto permanece la evidencia ligada a una *serie geométrica*, puesto que los restos de una *progresión geométrica* finita forman a su vez una progresión geométrica: con (G_d) se lee automáticamente (G_c), luego (10), que es la igualdad de las razones. Esta forma específica debe, sin embargo, ser eludida para que la teoría de la convergencia comience. Y es esto lo que tiene lugar.

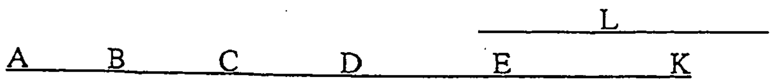
Una definición límpida aparece desde las primeras páginas del libro 2 del *Opus geometricum*, después de las de *serie geométrica* y de *progresión geométrica*, pero no ha sido utilizada todavía:

"El término de la progresión es el final de las series al cual si nos es permitido proseguir hasta el infinito, ninguna progresión puede llegar, pero al que es posible acercarse tanto como cualquier intervalo dado"[27].

Por lo arbitrario de un intervalo de longitud cualquiera, es el continuo en sí el que sirve de referencia a esta remarcable definición del *término*[28] de una progresión, de una sucesión, de un discreto. Ciertamente, desde Euclides por ejemplo, una magnitud fija cualquiera[29], permitía el juego de la demostración, pero no se había llegado a atribuir un nombre al comportamiento descrito. Aquí es un intervalo, *una cantidad LM u otra, pequeña a voluntad*[30] la que, midiendo la obtención de un límite nulo, mide *ipso facto* cualquier otro límite. La *generalidad* de la propuesta de Grégoire de Saint-Vincent merece ser subrayada aún cuando sus ejemplos son todos tomados de las series geométricas. Supo atribuir un nombre genérico a un comportamiento, esta es su originalidad.

Sin embargo, para los autores clásicos, una magnitud nula no tenía ningún sentido, en particular porque no podía sobrepasar toda magnitud dada adicionándose. Así, la expresión límite cero no podía sino parecer fuera de lugar. Grégoire de Saint-Vincent no la utiliza, como se verá claramente con ocasión de la proposición 78. Sin embargo, creando la sorpresa, en la proposición 78 encara primero lo que llamamos un límite infinito (las sucesiones en juego son crecientes), aunque la definición de tal límite tampoco está individualizada.

"Se da una proporción[31] cualquiera con desigualdad[32] menor AB a AC. Decimos que si se la continúa[33] se debe poder exhibir una magnitud superior a no importa qué magnitud dada"[34].

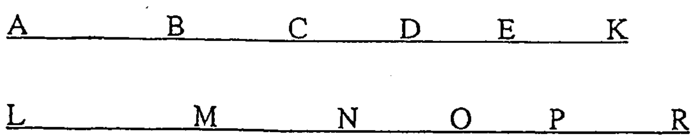


La demostración comienza así:

"Dada en efecto una magnitud cualquiera L, es patente que si se toma varias veces BC, exceso de la segunda magnitud AC sobre la primera AB, la suma se hará más grande que la magnitud L".

Como se puede esperar, para mostrar que al cabo de un cierto número de etapas la magnitud AK es debidamente superior a la magnitud L, el axioma de Eudoxo-Arquímedes interviene en la demostración, cuya continuación es fácilmente imaginable. Sabida esta proposición se acomete el caso del límite nulo -pero sin este vocabulario-:

"Que de una magnitud AK sea retirada una parte cualquiera AB y que del resto BK sea retirado BC siguiendo esta ley: que BC sea a CK como AB es a BK. Digo que si se prosigue indefinidamente este proceso, quedará de AK una cantidad menor que una cantidad dada. Esto se aplica a todos los casos relevantes de la primera proposición del libro X"[35].



Invirtiendo la razón de la progresión geométrica, es decir, construyendo otra progresión a partir de la cantidad dada, la demostración puede reposar únicamente sobre la proposición 77, que trata del límite infinito.

Después de estas consideraciones, tan claras como innovadoras, Grégoire pone un escolio epistemológicamente preciso, porque no pretende dejarse cazar por el vocabulario. Si el proceso seguido para la proposición 75 era constructivo, si probaba una existencia, en las proposiciones 77 y 78 insiste sobre el hecho de que no ha concedido ninguna existencia efectiva a una cantidad menor que una cantidad cualquiera:

"Cuando está dicho en la proposición que *si se prosigue indefinidamente este proceso de ablación quedará de AK una cantidad menor que una cantidad dada*, el sentido de esta proposición no es que después de que la ablación haya sido continuada hasta su término en el infinito, quede de AK una cantidad menor que otra dada, o que tras acabar toda la serie quede todavía una cantidad menor que una dada, sino que habiendo quitado los términos de AK según la susodicha razón, en un cierto momento de los cortes la parte residual de AK será más pequeña que una cantidad dada. Que sirva esto para contentar a algunos"[36].

La definición del término de una progresión tiene un sentido, pero no es necesario buscar más lejos y atribuir cualidades escondidas a este sentido explícito.

Ciertamente, Grégoire de Saint-Vincent se inscribe en la línea de la proposición 1 del libro X, como él mismo subraya al terminar el enunciado de la proposición 78: *est universalis primæ decimi*. En Euclides es esencialmente una desigualdad la que administra la ablación: se debe quitar solamente más de la mitad de lo que queda. Es cierto que Euclides termina su enunciado de la proposición primera del libro X evocando el caso de la igualdad: *La demostración sería la misma si las partes retiradas fueran las mitades*[37]. En Grégoire de Saint-Vincent es, por el contrario, una proporción, por tanto una igualdad, la que gestiona la iteración, siendo de algún modo el caso fronterizo de Euclides el preferido: debe retirarse siempre la misma proporción[38]. Si se toma una libertad sobre la razón de ésta[39], que no es necesariamente 1/2, Grégoire introduce una rigidez, como un privilegio adquirido por la progresión geométrica a expensas de las desigualdades y de su manejo. Esta rigidez es provisional, no aparece más que en los ejemplos a fin de fijar mejor la significación dada a la palabra término, un límite que, por contra, ha sido definido con toda generalidad.

Demostrativamente hablando la filiación de Grégoire de Saint-Vincent con Euclides es muy precisa, porque el desarrollo de la proposición 78 sigue exactamente el adoptado por el alejandrino en la proposición I del libro X. Al menos, si se reemplaza la operación de adición en Euclides por la multiplicación por una razón fija, es decir, si se adoptan otra vez las proporciones y su manipulación. La forma de proceder de Grégoire de Saint-Vincent está pues mejor adaptada que la de Euclides, puesto que este último debe finalmente comparar el entero n con 2^n. Una mejora que ha exigido una preparación. En el curso de su demostración, Euclides hace actuar al axioma (aditivo) de Eudoxo-Arquímedes, que es enunciado en una definición[40] del libro 5 de los *Elementos*: dadas dos magnitudes a y b, tales que $a<b$, existe un entero n tal que $na>b$. Grégoire de Saint-Vincent adopta un sucedáneo de este axioma o, más bien, hace intervenir un refinamiento multiplicativo. Hoy diríamos que utiliza el hecho de que cuando $\beta>1$, β^n tiende a infinito con n. Es lo que él ha expresado precisamente, en términos de progresión geométrica, en la proposición 77 que hemos descrito.

5. *El continuo recompuesto*

A fin de que en adelante todo esté listo para que se pueda trabajar con el *término* de una progresión geométrica, Grégoire presenta los resultados bajo la forma de varias equivalencias, haciendo todas ellas intervenir a la totalidad. Sin embargo, sólo retiene como conclusión la única progresión geométrica bajo la forma que hemos calificado de discreta, lo que supone un giro decisivo.

" Se da una magnitud cualquiera AK[41]. Si se tiene :
AB a BK como BC a CK[42];
AB a AK como BC a BK[43];
o AK, BK y CK están en proporción continua[44];
AB a BC como BK a CK[45];
AB a BC como AK a BK[46];
Digo que la magnitud AK es igual a la progresión completa de las magnitudes en proporción continua, de razón AB a BC continuada hasta el infinito o, lo que es lo mismo, que el término de la serie cuya razón AB a BC es continuada al infinito es K"[47].

A B C D E F I K

Las formas equivalentes que hemos denotado (G_c), (G_d) o (G_i') son reemplazadas por la forma única (G_d). Esta es la conclusión, verdadero resultado de la experiencia geométrica de la proposición 70.

Para organizar la prueba de la proposición 79, gracias a los resultados adquiridos en la proposición 75, Grégoire de Saint-Vincent parte de un continuo dado (AK) -que va a resultar ser el término (K)- continuo sobre el cual opera una descomposición iterativa con dos progresiones geométricas (G_c) y G_d). Dos y no solamente una, porque los restos juegan su papel. El carácter constructivo de la proposición 75 -el teorema de existencia- asegura que la suma de una progresión geométrica tiene un término, es decir, que la razón AB/BC iterada conduce a un término, llamémosle K'. La finalidad de la proposición 79 es establecer que este término K' coincide con K.

El razonamiento proporcionado es pues, por reducción al absurdo, muy próximo al de sus análogos antiguos utilizados para el método de exhaución[48]. Indudablemente, Grégoire de Saint-Vincent toca fondo en el rigor antiguo, al cual ha sabido adaptar sus definiciones y pruebas.

Demostración: Puesto que AB es a BK como BC a CK, la razón AB a BC podrá ser siempre continuada en los límites de la magnitud AK de manera que no alcance nunca a K (prop. 75 de este libro), es decir, que AK será siempre superior a cualquier serie finita de términos[49]. Así pues, AK no es inferior a la serie completa de la razón AB a BC. Pues, dado que AB es a BK como BC a CK, si la razón AB a BC es siempre continuada, se tendrá (prop. 76 de este libro) que lo que AB es a BK, es decir, lo que BC es a CK, CD lo es a DK y DE a EK y así hasta el infinito[50]. En consecuencia, si se continúa indefinidamente la razón AB a BC, no quedará finalmente de AK mas que una magnitud inferior a una magnitud cualquiera dada[51] (prop. 78 de este libro). Por esto AK no sabría ser superior a la serie de razón AB a BC puesto que, si fuera superior, debería serlo por un cierto exceso. Sea IK este exceso. En este caso[52], AI será igual a una serie de razón AB a CD; por lo tanto, la razón AB a BC continuada a voluntad no sobrepasa nunca a I; así también quedará de AK una cantidad siempre superior a IK; y, en consecuencia, no menor que una cantidad dada cualquiera, ¡contra lo que ya está demostrado! Por consiguiente, AK no será superior a la serie de la razón AB a BC, por lo que, puesto que se ha demostrado antes que tampoco es inferior, debe ser necesariamente igual. C.Q.F.D.[53].

Si el continuo y el discreto están imbricados en una prueba[54] que, pese al rigor buscado, da una vaga impresión de círculo vicioso[55], por sus claras conclusiones la proposición señala un momento crucial de la obra: *el paso a la analítica de las series.* Este momento no hace sin embargo más que inaugurar un paréntesis en el *Opus Geometricum* de Grégoire de Saint-Vincent pero, por corto que fuera, marcó a los sucesores del matemático jesuita.

6. El discreto continuado

En lo sucesivo, la lectura de la proposición 79 puede ser selectiva, y poner en juego solamente la serie geométrica *infinita* AB+BC+CD+DE... Una pregunta hecha a partir de la proposición siguiente indica el objetivo: *inuenire magnitudinem, quæ omnibus terminis totius seriei datæ in infinitum continuatæ, sit æqualis*[56]. Tan fuerte es la práctica geométrica que tres son las construcciones inmediatamente propuestas, allí donde más bien veríamos fórmulas, pero las pruebas provienen todas de la proposición 79, que hemos dado. Por otra parte, se trata de pruebas ya que lo que se pone en juego es una lectura orientada de la proposición 79. Grégoire de Saint-Vincent ha preparado la vía: el punto K ha recibido un nombre, su existencia está lograda y sólo queda construirlo prácticamente, lo que se desprende de la geometría ordinaria.

1º Si se pone un punto M entre A y B, de forma que AM=AB-BC (BM=BC), K se obtiene por la acción de una cuarta proporcional[57].

$$\frac{AM}{BC} = \frac{BC}{CK} .$$

A ——— M ——— B ——— C ——— K

2º K se obtiene por otra cuarta proporcional.

$$\frac{AM}{AB} = \frac{BC}{BK} \;.$$

3º K se obtiene por otra tercera proporcional.

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AB}{AK} \;.$$

Confrontado a todo este aparato demostrativo y explicativo, se entiende que un historiador[58] se haya dejado arrastrar a escribir que Grégoire de Saint-Vincent fue el primero que había tratado realmente una serie infinita, aboliendo las pertinentes observaciones de Oresme y otros en el siglo XIV a propósito de series tales como

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{n}{2^n} \;,$$

incluso olvidando la forma en la cual Arquímedes trabajaba en la *Cuadratura de la Parábola* sobre la igualdad:

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{4^{n-1}} + \frac{1}{3}\;\frac{1}{4^{n-1}} = \frac{4}{3}$$

Con $\dfrac{AB}{1 - \dfrac{BC}{AB}}$, es la tercera formulación la que mejor corresponde a la forma $\dfrac{a}{1-x}$ de la fórmula (G). Pero se constata que no se trata de la fórmula (G) explícita, ya que la única álgebra en juego es la de las proporciones y no el álgebra polinomial que permite escribir $1-x$. De forma que Grégoire debe recurrir a la construcción del punto M; al menos para reforzar el discreto que acaba de ser sumado, Grégoire de Saint-Vincent reescribe la proposición 79: es la proposición 82 la que indica que a partir de la única progresión geométrica AB, BC, CD cuya suma es AK, entonces $\frac{AB}{BK} = \frac{BC}{CK}$; $\frac{AB}{AK} = \frac{BC}{BK}$, etc. Esto no aporta nada con relación a la proposición 79, si no es una formulación liberadora. *El discreto se convierte en la referencia en el lugar del continuo.*

7. Florilegio y superación de la fórmula (G): La unidad de las matemáticas

A partir de la obtención de la proposición 79 y de la reorientación proporcionada por la proposición 82, Grégorie de Saint-Vincent se lanza a un exceso de resultados que explotan una de las formas de la proposición: haciendo entrar el álgebra de proporciones, son variaciones de cálculo para decir el contenido de la fórmula (1) sin que se escriba nunca (AK=..). Así, la proposición 84 expresa que la relación de las sumas de dos progresiones geométricas de la misma razón es la de su primer término[59]; la siguiente recuerda la suma de una progresión geométrica de razón 1/3 (fiel a su terminología, Grégoire habla de razón triple), después de razón 1/4, etc.

"Pero bastante he dicho a este respecto. Cualquiera podrá, en efecto, a partir de la proposición 80 de este libro bien comprendida , representar la serie completa de una proporción racional, es decir, de número a número y, en consecuencia, la relación de esta serie con su primer término".

Lo numérico no es lo esencial.

Porque, y esto puede sorprender, Grégoire de Saint-Vincent entiende regresar al continuo. Si en lo sucesivo usa la forma (G), digamos de la proposición 82 o de otras formas más generales del discreto, es a fin de dar propiedades del continuo y no para explorar las series en sí mismas. El paréntesis de la analítica de las series está de alguna forma terminado, lo que entraña un nuevo cambio de perspectiva: el discreto se ha convertido en un útil al servicio del continuo. Considerada en primer lugar, una pregunta evoca efectivamente la aparición de este útil: estando dada una razón, así como un continuo, ¿cómo encontrar unos puntos en progresión geométrica según esta razón de manera que como suma de los intervalos cortados nos suministren el continuo de partida[60]? Sobre este nuevo arranque aparece una proposición particularmente interesante, la 116, que afirma[61]:

"Sean dos cantidades AB y CD; sea AB dividida en E y G de tal forma que AE no sea inferior a la mitad de AB y EG no sea inferior a la mitad de EB; se divide de la misma forma CD en F y H y sean AE, EG y CF, FH proporcionales y así indefinidamente. Digo que AB completo es a CD completo como AE es a CF ".

A E G I B

C F H K O D

Gracias a una razón -la única comparación posible- de una propiedad de la discretización de dos continuos, la proposición 116 deduce un resultado que les concierne. Este enunciado general, notémoslo bien, contiene la iteración: con el *et hoc semper fieri possit* insertado en las hipótesis de la proposición 116, Grégoire de Saint-Vincent supone explícitamente que es posible proseguir indefinidamente la iteración bajo las condiciones indicadas, lo que significa que la proporción $\frac{AE}{EG} = \frac{CF}{FH}$ de la cual se dispone por hipótesis se prosigue de la misma forma para los puntos ulteriores de división E, G, I de la primera magnitud o F, H, O de la segunda, bajo la forma $\frac{EG}{GI} = \frac{FH}{HO}$, y que, además, es respetada la regla de las desigualdades (quitar más de la mitad). Cada vez que quiera utilizar esta proposición, le será preciso demostrar efectivamente la posibilidad de una dicotomía indefinida, respetando siempre las proporciones requeridas. Un método es puesto a prueba, de forma que es eliminada toda consideración *a priori* sobre la dicotomía nacida de la matemática griega. Aunque sustentado sobre el continuo, y porque actúa la discretización, Grégoire de Saint-Vincent desprecia en lo sucesivo las objeciones ontológicas en beneficio de una verificación de carácter matemático: la estabilidad algorítmica del proceso de dicotomía. Esto se corrobora por el hecho mayor de que la progresión geométrica ya no juega ningún papel en la proposición 116, porque la descomposición del continuo que interviene tanto para AB como para CD es mucho más general. Sin embargo, antes de examinar el desarrollo de la prueba de esta proposición 116 y en cierto modo para abrir boca, puede ser interesante mostrar algunas de sus consecuencias útiles. En el libro 6, consagrado a la hipérbola, Grégoire de Saint-Vincent recurre a ella para establecer un resultado importante sobre el comportamiento de las áreas hiperbólicas.

Demuestra que si se disponen puntos según una progresión geométrica sobre una de las asíntotas de una hipérbola, las áreas cortadas bajo la curva por paralelas a la otra asíntota son iguales. Esta es la proposición 130 del libro 6: las áreas de los trapecios curvilíneos $A_1A_2B_2B_1$; $A_2A_3B_3B_2$, etc. son iguales cuando las longitudes AA_1, AA_2, AA_3, AA_4, etc. están en progresión geométrica (figura 5). Este resultado indica que las áreas hiperbólicas transforman una progresión geométrica en una progresión aritmética: una de las progresiones recae sobre las longitudes y la otra sobre las áreas, pero lo realmente importante es *el comportamiento logarítmico en cuestión*[62], lo que instala en el seno de la geometría culta, por lo tanto noble, el logaritmo nacido en el segundo decenio del siglo XVII de los esfuerzos de Neper, pero confinado hasta entonces en la práctica de los calculistas y algebristas. Así, el discreto continuado de Grégoire de Saint-Vincent, perseguido como herramienta para el continuo espacial, se revela como integrador de los métodos algebraicos en geometría, un procedimiento que refuerza la unidad de las matemáticas.

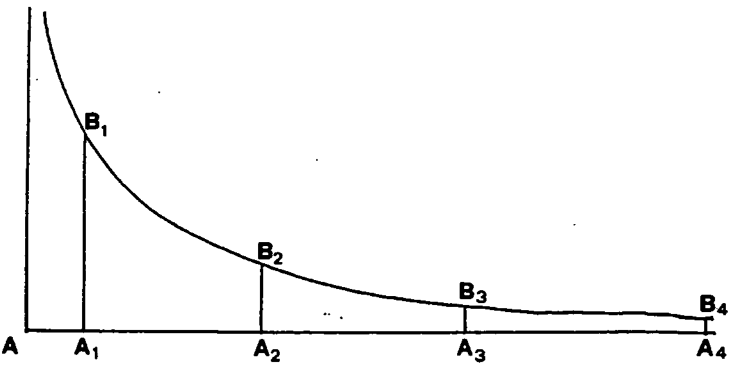


Figura 5

Sería interesante mostrar que esta *cuadratura* de la hipérbola rebasa las cuadraturas antiguas, en el sentido de que ningun área rectangular es asignada por igualdad al área de un trapecio hiperbólico, sino que se obtiene una igualdad hasta el infinito entre áreas desconocidas (aunque calculables, pero solamente por aproximación gracias a los logaritmos para los cuales se han obtenido tablas precisas[63]). Sin definición que proporcione la existencia *a priori*, sin ontología, el paso de Grégoire de Saint-Vincent le hace entrar en el cálculo integral: *de las cuadraturas pasa a la integración*. El hecho objetivo es su trabajo sobre la exponencial, función que permanecía sin nombre en su época[64]: él la define a partir de las áreas como primitiva, por enlazar su forma de proceder con algo que vendrá más tarde, y da sus reglas de cálculo.

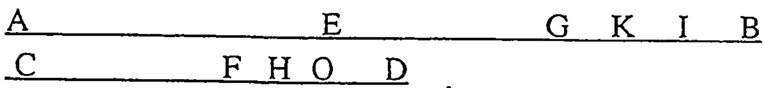
Sin embargo, precisar estas afirmaciones exigiría un desarrollo que se sale de los límites del presente estudio; es necesario regresar a las progresiones sumadas al infinito, retomando las explicaciones de la proposición 116 del libro 2, cuyos servicios son notables en toda la obra del padre jesuita, puesto que regula el método de exhaución.

8. Una prueba a la antigua: El discreto descifra el continuo

Examinemos la demostración por reducción al absurdo que propone Grégoire de Saint-Vincent en su libro segundo:

"Si, en efecto, la proporción de AB a CD no es igual a la de AE a CF, será mayor o menor. Admitamos primero que sea menor. Pongamos pues que AB es a CD en una relación más pequeña que la de AE a CF. [La cantidad] AB guardará con una cantidad menor que CD (por ejemplo CK[65]), la misma relación que AE a CF (según la proposición 8 del libro V[66]) y, puesto que será indefinidamente sustraido de las cantidades AB y CD y de sus restos no menos de su mitad, si se continúa esta sustracción algunos términos más, digamos por ejemplo tres[67], CF, FH y HO, quedará finalmente OD inferior a KD (según la primera proposición[68] del libro X). Por eso, CO será superior a CK. Si entonces se retiran de AB las mismas partes, conforme a la proporción AE, EG y GI, se tendrá por hipótesis que AE es a EG como CF es a FH y EG a GI como FH a HO. Por esto, permutando[69], lo que AE es a CF, EG lo será a FH y lo que EG es a FH, GI lo será a HO. Por lo tanto, lo que es AE (uno de los antecedentes) a CF (uno de los consecuentes), todos los antecedentes[70] (es decir la línea[71] AI) lo serán a todos los consecuentes (es decir la línea CO) (proposición 12 del libro V[72]). Pero lo que AE es a CF, por construcción, AB lo será a CK. Por consiguiente, AI es a CO como AB a CK, lo que es absurdo, como es destacado claramente en los Elementos[73]. Así pues, la proporción de AB a CD no es inferior a la de AE a CF.

Ahora sea, si es posible[74], que la proporción de AB a CD sea superior a la de AE a CF.



En estas condiciones[75], una cierta línea inferior AK tendrá frente a CD la misma relación que AE a CF (proposición 8 del libro V) y, puesto que no se retira indefinidamente menos de la mitad, tras la sustracción de cierto número de partes, por ejemplo tres, AE, EG y GI, quedará finalmente IB inferior a KB. Por eso, AI será superior a AK. Si ahora se retira lo mismo de la cantidad CD, por ejemplo las partes CF, FH y HO, se tendrá por hipótesis y por permutación que AE es a CF como EG es a FH, de la misma forma como CI es a HO. Por lo tanto, lo que AE (uno de los antecedentes) es a CF (uno de los consecuentes), todos los antecedentes (es decir la línea AI) lo serán a todos los consecuentes (es decir la línea CO) (proposición 12 del libro V). Pero, por construcción, lo que AE es a CF, AK lo será a CD; así pues, AI es a CO como AK es a CD, lo que es absurdo, como se indica claramente en los Elementos[76]. Por consiguiente, la relación de AB a CD no es superior a la de AE a CF. La verdad de la proposición es así evidente".

Innegablemente, y como podíamos esperar, esta demostración por doble razonamiento de reducción al absurdo y doble juego con las proporciones (desigualdades e igualdades) enlaza con la forma de proceder de los clásicos, con el método de exhaución lógica. El titubeo de la frase es idéntico al que figura en el empleo del método de exhaución tanto en Euclides como en Arquímedes[77]. Por otra parte, hay la misma llamada a la cuarta proporcional, como hemos remarcado en el curso de la demostración, y las referencias son explícitas al libro V de los *Elementos*. Finalmente, la igualdad se obtiene por medio de dos desigualadades contrarias, contradicción que proviene de dos desigualdades incompatibles.

La originalidad de Grégoire de Saint-Vincent no reside pues en la forma de demostrar, sino en el lugar reservado a la proposición 116. Sobreviene desde fuera de un contexto geométrico (el libro 2 es algebraico), como para localizar o mejor jalonar el recurso al razonamiento por reducción al absurdo. En segundo lugar, es la generalidad del resultado, independientemente de la naturaleza de las magnitudes en juego, lo que cuenta.

Una escritura en términos modernos[78] nos hace captar mejor esta generalidad. Sean x e y dos magnitudes, que se identifican para nosotros a números reales positivos y que representan $x=AB$ e $y=CD$. Sea α un número real cualquiera con $0<\alpha$. Se supone $\alpha = \frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \ldots = \frac{x_n}{y_n} = \ldots$ para unas magnitudes $x_1 = AE, x_2 = EG, x_3 = GK; y_1 = CF, y_2 = FH, y_3 = HO$, sujetas a las desigualdades[79]:

$$x > x_1 > \frac{x}{2} \text{ e } y > y_1 > \frac{y}{2};\ (x-x_1) > x_2 > \frac{(x-x_1)}{2} \text{ e } (y-y_1) > y_2 > \frac{y-y_1}{2};$$

y más generalmente se impone:

$$x - (x_1 + \ldots + x_n) > x_{n+1} > \frac{x-(x_1+\ldots+x_n)}{2} \quad \text{e}$$

$$y - (y_1 + \ldots + y_n) > y_{n+1} > \frac{y-(y_1+\ldots+y_n)}{2}, \ etc.$$

Este es todo el contenido analítico de las hipótesis[80] hechas en la proposición 116, y esto para todo entero $n\geq 1$. La conclusión de la proposición es:

$$\frac{x}{y} = \frac{\sum_{n=1}^{n=\infty} x_n}{\sum_{n=1}^{n=\infty} y_n} = \frac{x_1}{y_1} = \alpha.$$

El resultado es numérico, en todo caso puesto bajo la forma de una proposición, y no geométrico.

El lector moderno, que dispone de la teoría de límites de sucesiones reales, puede estar decepcionado por un resultado que le parecerá torpemente recargado de condiciones inútiles. Constata que, evidentemente, x_n, como la sucesión y_n, converge a cero y que la serie

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} x^n$$

converge a x igual que

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} y^n$$

converge a y. La convergencia de la relación se deduce fácilmente. Grégorie de Saint-Vincent no podía aislar la convergencia de

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} x^n$$

como una propiedad a partir de la cual se pudieran contruir otras: esta convergencia debe ser para él una consecuencia de la hipótesis que conviene en fijar, y asistimos a sus balbuceos: el espectáculo no puede ser más rico.

Lejos de disponer de una teoría de límites, Grégorie de Saint-Vincent contribuye a su establecimiento. El resultado descrito por la notación analítica contiene dos cosas. Por una parte, tomando unas divisiones de la magnitud inicial, hay una totalización

$$x = \sum_{n=1}^{n=\infty} x^n \quad (totam\ AB)\ .$$

Totalización a partir de una descomposición general de la cantidad continua inicial x (=AB): el hecho mayor es que no hay ninguna regla particular de formación de los x_n los unos a partir de los otros, de modo que está rebasado el estadio de la progresión geométrica y *está justificado hablar de serie*. La restricción sobre la descomposición de x en elementos que sirvan para describirlo por recomposición tiene que respetar solamente las desigualdades, que están destinadas a asegurar la convergencia. Estas explican por sí mismas que el texto contenga explícitamente: *et hoc semper fieri* *possit,* porque se pueden no poder realizar los cortes indicados (por ejemplo, si las cantidades AB y CD están a priori en una relación distinta que la inicialmente escogida de x_1 a y_1). Naturalmente, es un problema el hecho de que en la totalización la suma sea infinita. Grégoire de Saint-Vincent ha pensado en esto por la definición del término (final) de la progresión.

Por otra parte, el resultado de la proposición 116 procura el mantenimiento de la proporción $\frac{x_1}{y_1} = \alpha = \frac{x_n}{y_n} = \frac{x}{y}$, proporción además cualquiera. Dos exhauciones llevadas a cabo paralelamente sobre dos magnitudes correlacionadas por la relación de sus partes permiten concluir la estabilidad de esta relación para las mismas magnitudes. *El discreto determina el continuo.* Esta perseverancia sólo podía ser ventajosa en el nuevo mundo matemático que Grégoire de Saint-Vincent exploraba. Precisamente porque se trataba, en la medida de áreas por ejemplo, de establecer en general tal proporción. En ciertos casos, esto podía concluir en una cuadratura en el sentido antiguo, pero en otros quedaría la indicación de una relación precisa entre dos áreas de otro modo desconocidas. Así, permaneciendo al nivel de las razones, el proceso evitaba el recurso a las magnitudes en sí mismas y suprimía una etapa del método clásico de exhaución, lo que podemos calificar de exhaución de la relación. Lejos de ser una falta de rigor, esta supresión de una etapa marca la extensión del método, que se aplicaba así directamente a las razones. Estas se convertían en el centro de la demostración: hay en esto una indudable algebrización de los objetos.

En este proceder había aún otra ventaja, esta vez de orden epistemológico, ya que estaba señalada la intervención explícita de la cuarta proporcional, que faltaba en el inventario de los presupuestos euclidianos como había indicado Clavius en sus comentarios de los *Elementos* de 1574. Efectivamente, la cuarta proporcional abstracta (es decir, aparte del caso de las longitudes, bien regulado por el Teorema de Tales) interviene en la proposición 116, precisamente de la forma en que se encuentra en la antigüedad para introducir una magnitud intermedia que se compare con las magnitudes dadas. Pero esto se hace de una vez por todas, de forma que para el cálculo de áreas se puede evitar la intervención de la cuarta proporcional en las otras etapas del método de exhaución. Así se puede evitar todo recurso al procedimiento de reducción al absurdo. Es lo que podemos constatar leyendo con atención la demostración de la proposición 106 del libro 6 referida a la cuadratura de la hipérbola. Así pues, aislando el razonamiento por reducción al absurdo, Grégoire de Saint-Vincent modifica la presentación clásica del método de exhaución, permitiendo la algebrización y sobre los razonamientos.

Una paradoja de Zenón: El retorno al continuo

La algebrización por discretización permitió a Grégorie de Saint-Vincent desembarazarse además de una de las paradojas clásicas a la que estaba ligado el nombre de Zenón[81]. Lo hace para ilustrar su proposición 80, antes incluso de analizar la proposicón 110, la cual hemos visto que regulaba la exhaución espacial. Lo mejor es proporcionar la argumentación íntegra, puesto que, a menudo citado sin referencia, el texto no ha sido traducido hasta ahora, sin duda a causa de la pesadez escolástica del final (que hemos puesto en una nota)

"Escolio: Si se decide utilizar la segunda construcción de la proposición 80, se tendrá en una sola operación la proporción de la primera magnitud al resto de la serie. Si, por el contrario, utilizamos la primera construcción, obtendremos la proporción de la primera y segundas magnitudes tomadas junto al resto de la serie.

El presente tema me recuerda lo que he dicho en el prefacio, sobre la argumentación de este libro, cuando se ha hecho mención al argumento de Zenón de Elea, por el cual creía que podía rechazar toda razón [de ser] del movimiento. El nervio de este argumento ha tenido ante el autor tanta fuerza que lo juzgaba digno del nombre de *Aquiles, el más invencible de los jefes.* Estaba persuadido de que el argumento tenía tal solidez que igualaría la fuerza probatoria de todas las demostraciones filosóficas.

Tomaré el argumento de Zenón en los mismos términos que he usado en el prefacio. Constaba de dos [cuerpos] que se mueven; primero Aquiles corriendo a toda velocidad, delante de él la tortuga se arrasta tan lentamente como sea posible.

A B D E C

Que se suponga, decía, que Aquiles el más rápido de los corredores, saliendo del punto A, quiere atrapar una tortuga que se mueve por el camino BC en una carrera muy lenta. Durante el tiempo en que Aquiles va de A a B, la tortuga se ha desplazado un cierto espacio y llega a D. Así pues Aquiles todavía no ha cogido a la tortuga. De nuevo, durante el tiempo que Aquiles corre desde B para alcanzar a la tortuga que estaba en D, ésta se ha desplazado hasta E. Por lo tanto Aquiles, una vez ha llegado a D, todavía no coge a la tortuga y ¡esto se repetirá indefinidamente! Puesto que el continuo es divisible indefinidamente, Aquiles nunca atrapará a la tortuga.

Nos corresponde destruir este argumento a partir de la teoría de este libro; lo que hemos realizado, lo sabéis, puesto que hemos asignado el punto exacto donde Aquiles atrapa a la tortuga.

Para disolver este nudo Gordiano a partir de los principios de este libro suponemos que Aquiles, al igual que la tortuga, avanza uniformemente en su carrera, de manera que la velocidad adquirida en la primera parte del movimiento permanece hasta el último momento de tiempo en el cual recorren su espacio. Supongamos además (pues todo movimiento es una especie (particular) de cantidad), que estos dos movimientos, puesto que se les supone uniformes en sus partes, tienen entre ellos una cierta proporción. Es necesario que esto suceda entre todas las cantidades que pertenecen a la misma especie, como son dos movimientos rectos y uniformes.

Así pues, se supone que la proporción de estos dos móviles, desde el punto de vista de la velocidad, consiste en una razón doble, de forma que Aquiles recorre el espacio dos veces más rápido que la tortuga. En consecuencia, durante el tiempo que la tortuga emplea en recorrer un cuarto de estadio, Aquiles habrá recorrido la mitad. Por lo tanto, las líneas AC y DC prolongadas en razón doble a partir[82] del punto C, se dividen en B, F, H, etc., E, G, I, etc. siguiendo una razón doble, de forma que AC sea el doble de BC y DC de EC, al igual que BC es doble de FC, EC es doble de GC, etc.

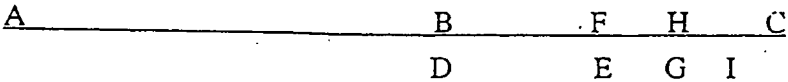


Figura 6

Ponemos a Aquiles en A y sea AC la representación de un camino o estadio. En cuanto a la tortuga, se la coloca en el centro del estadio, en B (o D), poniendo DC igual a BC. Como Aquiles comienza a desplazarse en A, en el momento en que la tortuga comienza su carrera a partir de D Aquiles habrá recorrido el camino desde A hasta B en el tiempo en que la tortuga llega desde D a E. Y durante el tiempo en que Aquiles llega a F desde B, la tortuga llegará a G desde E, y así sucesivamente. Pero como el término de la progresión de razón AB a BF se coloca en C (como se ha demostrado[83] en la proposición 85), al igual que la progresión de razón BF a FH (o de DE a EG) llega a su fin en el punto C (según la misma proposición), entonces, el encuentro de estos dos móviles (Aquiles y la tortuga) se producirá en el punto C. Si, en lugar de una proporción doble, se supone una proporción triple, entoces la carrera estará determinada por la proposición 86 de este libro. Si es cuadruple, será la proposición 87 la que servirá, y así sucesivamente.

El razonamiento capcioso de Zenón crea dificultades, debido a que no tiene en cuenta la diferencia que surge aquí en el seno de una progresión doble, progresión que implica duplicar[84] el hilo conductor de la demostración. Una cosa es, en efecto, una progresión por partes iguales y otra una progresión por partes proporcionales. Aquí, la carrera de cada uno de los dos se supone que se hace por partes uniformes, es decir por igualdades, puesto que el primer paso no difiere del segundo o el tercero, aunque dos pasos de Aquiles, por ejemplo, requieren el mismo tiempo que uno sólo de la tortuga. Ahora bien, conforme a estos pasos se hace la carrera de cada uno de los dos, pero Zenón, en el curso de sus razonamientos, divide el movimiento de los corredores con la ayuda de partes proporcionales, según las cuales los móviles no se desplazan de ningún modo. Por consiguiente, cae en el mismo sofisma que alguien que dijera: en el tiempo en que yo divido la línea AE en cuatro partes iguales, otro la subdivide siguiendo una cierta serie por partes proporcionales.

A B C D E

Con seguridad, se asignará más velocidad a los términos de las cuatro partes iguales que a los términos infinitamente [numerosos] de las partes proporcionales. Porque Aquiles y la tortuga, recorriendo el espacio AE en partes iguales, encuentran fácilmente el término de sus partes iguales; pero Zenón, mientras esto sucede, quiere que el espacio AE sea dividido por los corredores en partes proporcionales, según las cuales los móviles no se aproximan"[85].

Indudablemente, la explicación que proporciona Grégoire de Saint-Vincent confía en las matemáticas: se ocultaría incluso *in cauda* un rechazo de los argumentos filosóficos[86] *(Verum hæc in gratiam Philsophorum dicta sufficiant).* Es tan consciente de que ahí reside la dificultad, que Grégoire de Saint-Vincent se guarda de oponer el discreto al continuo para resolver la paradoja: bien al contrario, su razonamiento se basa en el continuo, debidamente representado a partir de las velocidades de Aquiles y la tortuga, velocidades que tienen necesariamente una relación, una razón que resulta de la teoría de las proporciones. El marco *continuista* está delimitado cuidadosamente.

Sin embargo, Grégoire deroga la inclinación analítica -en el sentido de Pappus- que hemos descrito hasta ahora, puesto que el estilo de exposición es de repente sintético. La longitud AC es colocada *primero*, después el centro B, punto de partida de la tortuga (figura 6). A partir del continuo AC es construida la progresión geométrica *en acto* de razón 1/2 (en el sentido moderno) AB, BF, FH, etc., progresión desdoblada en DE, EG, GI, etc. En efecto, F es construido como centro de BC, H como centro de FC, etc., e igualmente E como centro de DC, G como centro de EC, etc. Ya que AB+BF+FH....=2AB=AC y DE+EG+GI+....=2DE=DC. Sólo después de haber construido el punto C prueba que se trata del punto de encuentro de Aquiles y la tortuga. Privilegiando esta vez el método sintético, Grégorie de Saint-Vincent intenta manifestarse sin réplica posible, apoyándose en toda la tradición euclidiana. Lo anunciaba desde su prefacio en el libro 2:

"Yo no querría que creyéramos que entramos en un dominio que contradice las leyes de la lógica: al contrario, más claro que el día mostraremos con nuestro método que están también eliminadas las más graves aporías por las que, en materia de cantidad, en los gimnasios y liceos de los filósofos, éstos acostumbran a dividirse"[87].

La exposición sintética, brillante, sólo es posible sin embargo una vez establecido analíticamente el continuo como suma de una descomposición en progresión geométrica: *es un fin*. Hace época en el desarrollo científico.

Algunos años más tarde Isaac Barrow, profesor lucasiano de matemáticas en Cambridge, invierte la perspectiva establecida por Grégoire de Saint-Vincent: es sobre la evidencia *geométrica* del continuo, resumida en la necesaria captura de la tortuga por Aquiles, donde explica la sumación de una serie geométrica. Lo hace hacia 1664-1665, en las *Lectiones mathematicae*[88], con ocasión de la tercera conferencia titulada *De la identidad de la Aritmética y de la Geometría*, en el curso de la cual se propone, a propósito de la ciencia de los números, no suprimirla de la *República de las matemáticas*, sino

> "I will rather restore it into its lawful Place, as being removed out of its proper Seat, and ingraff and unite it again into its native Geometry, the Stock from whence it has been plucked"[89] .

No se trata de un tic de matemático, deseoso de manipular en todos los sentidos posibles los objetos ya estudiados por sus predecesores. Barrow indica firmemente un orden según el cual las matemáticas deben desarrollarse y el continuo geométrico es de lo primero. El argumento se desarrolla a partir de una figura:

A E F G H Æ Z

Un punto móvil A (Aquiles), se desplaza con un movimiento uniforme sobre una línea recta AZ, al igual que el punto E (la tortuga), que posee una velocidad tres veces menor. Cuando A se encuentra en E, E ya está en F, con $EF = \frac{AE}{3}$; igualmente cuando A alcanza F, E está en G con $FG = \frac{EF}{3}$ *y así en lo sucesivo, ad infinitum, hasta que el punto A atrapa a E en Æ*[90]. El reencuentro en Æ es indudable; es un dato relativo al continuo. No hay nada que probar, de modo que la longitud AÆ es descompuesta según AE+EF +FG..., o sea $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \ldots$, al menos si la longitud AE es la unidad. Por otra parte, puesto que los puntos móviles A y E se encuentran en Æ la longitud AÆ recorrida por A es triple que la EÆ recorrida por E: *Por lo tanto AÆ es a AE como 3 es a 2*, de lo cual obtenemos la igualdad numérica:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \ldots = \frac{3}{2}$$

Isaac Barrow explica enseguida que el resultado de la suma es general, adaptable a todas las razones inferiores a la unidad. Ejecuta un cálculo a partir de cualquier relación de las velocidades $\frac{R}{S}$ (R>S), de modo que

$$\frac{AE + EÆ}{EÆ} = \frac{R}{S},$$

luego *dividendo* $\frac{AE}{EÆ} = \frac{R\text{-}S}{S}$ o $\frac{AÆ}{AE} = \frac{R}{R\text{-}S}$. Pero como la interpretación por las velocidades proporciona también la proporción $\frac{AE}{EF} = \frac{R}{S}$, se dispone finalmente de:

$$\frac{AÆ}{AE} = \frac{AE}{AE\text{-}EF}$$

"The Sum of any Series of Numbers continually decreasing from Unity, or to Nothing, in any Proportion, will be to Unity, as the Antecedent, or greater Term of the proportion, is to the Excess of the Antecedent above the Consequent"[91].

Es una manera de indicar la suma de una progresión geométrica que corresponde a la forma elegida por Grégoire de Saint-Vincent en su proposición 80 del libro 2.

La conclusión de Barrow es epistemológica: las propiedades del continuo son fundadoras[92].

"So easily are Arithmetical Conclusions, (otherwise sufficiently intrincate and difficult to be investigated) drawn from the Consideration of Geometry"[93].

Si, en relación a la tradición euclidiana, puede sorprender la incorporación de la velocidad, luego del tiempo y del movimiento en el terreno de la geometría, ésta no es escandalosa, puesto que Barrow se ha cuidado de definir la geometría como el estudio de la cantidad en cuanto que tal.

"The same way Geometry proposes Magnitude for the Subject of its Enquiry, not the peculiar Magnitude of this or that Body, but Magnitude taken universally; together with its general Affections, viz. Divisibility, Congruence, Proportionality, a Capacity or different Situation and Position, Mobility, etc., declaring these to be inherent to it, and after what manner are they so"[94].

Quizás Grégoire de Saint-Vincent no hubiera desaprobado esta declaración de principios, porque refuerza la unidad de las matemáticas, pero al menos había sabido utilizar la vitalidad propia del discreto. Sintomáticamente, no obstante, sentía la necesidad de representar espacialmente unos resultados que se pueden calificar de algebraicos, por ejemplo, la fórmula (G), que nos guía a lo largo de este estudio[95]. Y el verbo *representar* describe de forma demasiado insuficiente su objetivo, pues en definitiva quiere desembocar en las propiedades espaciales. Así, al final del capítulo 2 del libro 2, donde figuran a su vez las proposiciones 79, 82 y 116 que hemos comentado extensamente, Grégoire de Saint-Vincent añade dos capítulos fenomenológicos.

"Lo que hemos demostrado hasta aquí en la segunda parte sobre las progresiones geométricas, se aplica sin ninguna diferencia a las líneas, superficies y cuerpos. Por esta razón en efecto, a fin de indicar la universalidad de las proposiciones, hemos empleado permanentemente el nombre de *magnitud* y no el de *línea*. Porque, no obstante, si están alineadas hacia el exterior unas respecto de las otras, las progresiones de las superficies y de los cuerpos semejantemente semejantes tiene muchas propiedades, nos ha parecido bien estudiarlas en detalle en esta tercera y cuarta parte".

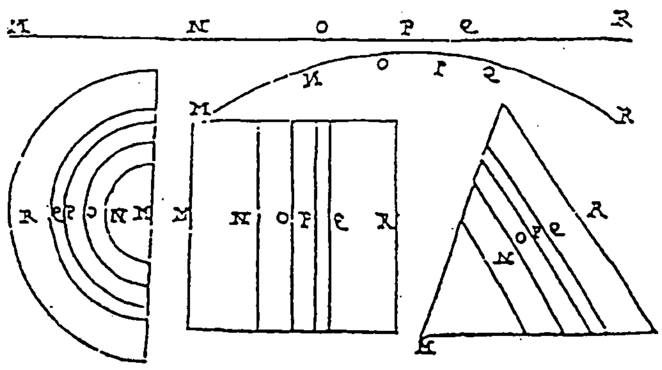


Figura 7

A continuación se reproducen algunos dibujos y, con ellos, el anuncio de una doble investigación. Por una parte, la descomposición de un hecho espacial, es decir, la investigación del continuo por el discreto. Pone en juego la iteración que estará ampliamente presente en la obra y su papel supera a la mera progresión geométrica. Por otra parte, Grégoire de Saint-Vincent quiere evocar la agregación de figuras semejantes componiendo, por su conjunto, una nueva figura que se trata de estudiar. Las progresiones geométricas juegan entonces un papel más importante: son el modelo.

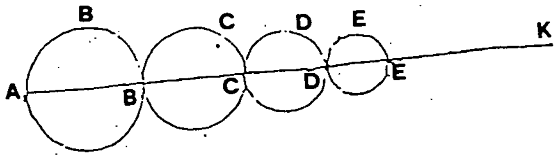


Figura 8

Esta segunda vía le conduce a representar las progresiones geométricas en abcisas y a interpretar las diversas formas de (G) por figuras puestas sobre esta base: la proposición fundadora es que a una progresión geométrica en abcisas corresponden planos semejantes formando igualmente por sus áreas una progresión geométrica (proposición 124 del *Opus Geometricum*, libro 2). Ahora bien, la razón de esta nueva progresión geométrica espacial es el cuadrado de la razón de la primera progresión representada linealmente y, en consecuencia, la segunda se ve también sobre el dibujo lineal, puesto que basta omitir los términos de rango par[96]. La práctica de este tipo de propiedades se hace pronto fastidiosa pero testimonia la necesidad de geometrizar, una fuerza barroca en este caso. A título de ejemplo único, aquí está el enunciado traducido de la proposición 141 y el dibujo correspondiente.

Proposición 141: Inscrita en el triángulo AGK, se da una serie de cuadrados, que tienen sus bases alineadas y cuyo término [final] de la longitud es K. Por F, se divide en dos partes iguales el lado LM del primer cuadrado, después se lleva por F la recta FK que corta a AG en I. Digo que el triángulo AIK es igual a la serie de los cuadrados y el triángulo IGK es igual a la de los triángulos LGM, TMN, etc.

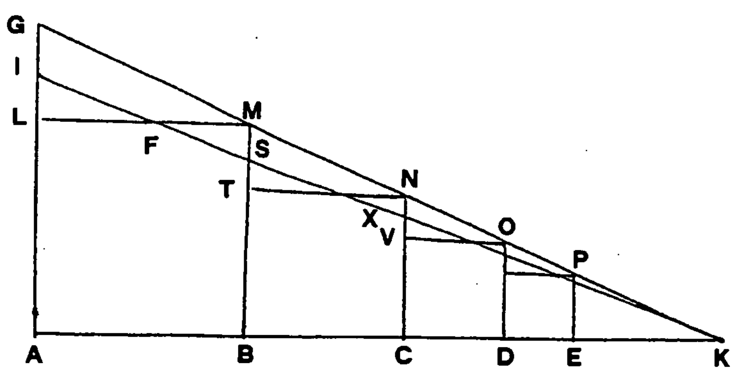


Figura 9

La fuerza del discreto

Si la crispación de Barrow sobre el continuo es de una naturaleza bien diferente de la de Grégoire de Saint-Vincent, que explora el discreto en vista del continuo ilustrandolo hasta la saciedad, es particularmente ilustrativa la asociación a estos procesos del resultante de otra lectura de los *Elementos* de Euclides, camino adoptado por matemáticos tan diferentes como Vieta, Luca Valerio[97] o Fermat. A partir de una proposición euclídea, éste último será nuestro blanco principal.

1. Ilustración de una proposición euclidea

El resultado de base es una propiedad que podemos escribir en forma de cocientes

$$(1) \qquad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} .$$

Euclides enuncia:

"Si tantas magnitudes como se quiera son proporcionales, uno de los antecedentes será a uno de los consecuentes como la suma de antecedentes a la suma de consecuentes"[98].

La demostración sólo es una consecuencia directa de la definición sutil de una proporción por los equimúltiplos[99] (definición 5 del libro V), unida a la propiedad que hemos traducido por la distributividad[100]:

$$(2) \qquad n\,(A + B + C) = nA + nB + nC.$$

Porque el álgebra de proporciones está hoy olvidada, difícilmente se comprende hasta qué punto la relación (1) estaba inscrita en la práctica de los matemáticos, hasta el siglo XVII inclusive. Bien entendido, Grégoire de Saint-Vincent la hace intervenir e incluso le da un status importante[101] pero, en su búsqueda de las interpretaciones continuas del discreto, no puede dejar de proporcionar una imagen geométrica. A decir verdad, elige más bien una complicación de esta relación, cuyo enunciado es

$$(3) \qquad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ y } \frac{a'}{b} = \frac{c'}{d} \text{ implican } \frac{a+a'}{c+c'} = \frac{b}{d} .$$

Esta implicación (3) se reduce fácilmente a (1) a partir del cambio de términos medios:

$$\frac{a}{c} = \frac{a'}{c'} = \frac{b}{d} .$$

A fin de conferirle una representación espacial *realizando* la relación (1), Grégoire adopta triángulos y rectángulos. Parte de dos segmentos AB y CD sobre los cuales están trazadas dos figuras, triángulo y rectángulo. Estos segmentos están divididos por los puntos E y K respectivamente en una misma relación ($\frac{AE}{CK} = \frac{AB}{CD}$) y sobre cada uno de los cuatro segmentos así generados construye dos a dos figuras semejantes a las figuras iniciales. En un lado, los triángulos AFE y EGB, en el otro los rectángulos CKJL y DMIK (figura 10). La conclusión, que requiere una visualización de (1), es que la suma de las áreas de las figuras AFE y EGB es a la suma de las áreas de las figuras CKJL y KDMI como el área de la figura APB a la de la figura CDNH. Esta es la proposición 69 del libro 2 del *Opus Geometricum*.

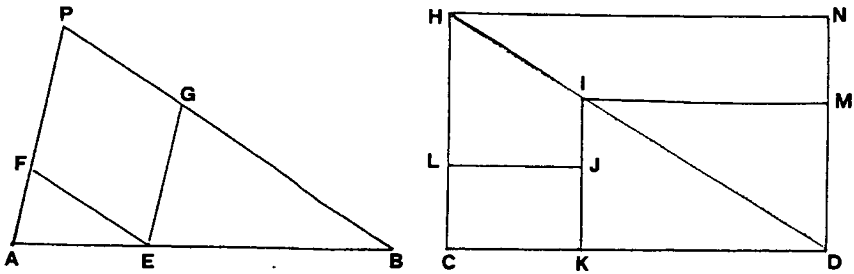


Figura 10

La visualización es tan poco eficaz que uno puede preguntarse si no es la técnica de cálculo lo único que la provoca, como un capricho infantil. Porque la justificación de esta geometrización del álgebra de las proporciones exige una cierta atención si se quieren respetar escrupulosamente las reglas. Reposa sobre la semejanza: las áreas de dos figuras rectilíneas semejantes son entre ellas como el cuadrado de la relación de las longitudes de dos longitudes homólogas (Prop. 20 del libro VI de los *Elementos* de Euclides). En consecuencia, a partir de la hipótesis de división de los segmentos y de la relación (1)

$$\frac{AE}{CK} = \frac{EB}{KD} = \frac{AE + EB}{CK + KD} = \frac{AB}{CD} .$$

O sea, por intercambio de los términos medios:

$$\frac{AE}{AB} = \frac{CK}{CD} \text{ y } \frac{EB}{AB} = \frac{KD}{CD}$$

Elevando al cuadrado:

$$\left(\frac{AE}{AB}\right)^2 = \left(\frac{CK}{CD}\right)^2 \text{ y } \left(\frac{EB}{AB}\right)^2 = \left(\frac{KD}{CD}\right)^2$$

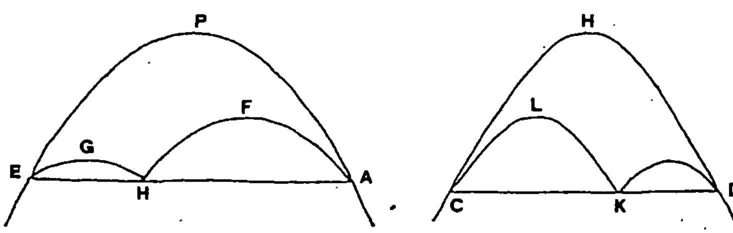
Así pues

$$\frac{Area\ trián.\ AFE}{Area\ trián.\ APB} = \frac{Area\ rect.\ CKJL}{Area\ rect.\ CDNH}\ ;\ \frac{Area\ trián.\ EGB}{Area\ trián.\ APB} = \frac{Area\ rect.\ KDMI}{Area\ rect.\ CDNH}$$

Y, gracias a (3), la conclusión anunciada:

$$\frac{Area\ triáng.\ AFE + Area\ triáng.\ EGB}{Area\ rectáng.\ CKJL + Area\ rectáng.\ KDMI} = \frac{Area\ triáng.\ APB}{Area\ rectáng.\ CDNH}$$

Para marcar cláramente la generalidad de (1), lo que la formulación algebraica (1) revela mucho más fácilmente, Grégoire de Saint-Vincent proporciona otras figuras donde los triángulos y los rectángulos son sustituidos por círculos o, incluso, por una parte parábolas y por otra hipérbolas. Para hacer ver la universalidad, Grégoire impone una profusión barroca.



Eodem modo ſi curuilinea, cum diuerſæ ſpeciei curuilineis, tres nempe parabolæ ſimiles, cum tribus hyperbolis ſimilibus, conferantur, eadem his quoque demonſtrandi ratio conueniet: cùm tam parabolæ ſimiles, quàm hyperbolæ ſint in duplicata ratione ſubtenſarum. Conſtat igitur huius theorematis vniuerſalis veritas.

Figura 11

Aunque el dibujo es agradable, no se puede por menos que encontrar poco demostrativa esta última imagen o, más bien, se debe remarcar cuan necesario es el discurso paralelo: se evita por la expresión retórica. En cuanto a la universalidad, resulta sér un cebo: en Euclides, en efecto, la propiedad de semejanza para áreas es primero restringida a las figuras rectilíneas y extendida después sólo a los círculos[102] (es la proposición 2 del libro XII de los *Elementos*). Su extensión a las parábolas e hipérbolas, al menos en el siglo XVII, no tenía nada de demostrado... y se puede avanzar que está gravemente equivocada en una obra cuya finalidad, precisamente, es determinar la áreas de dichas curvas.

Grégoire de Saint-Vincent prepara más bien una extensión de la relación (1): es, referido geométricamente, el ritmo de la iteración lo que le conviene. Dividiendo el segmento AB en n segmentos $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ donde

$$AB = \sum_{k=1}^{k=n} x_k$$

e igualmente CD en n segmentos $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ donde

$$CD = \sum_{k=1}^{k=n} y_k \ ,$$

de manera que para todo k, $1 \leq k \leq n$, $\frac{x_k}{y_k} = \frac{AB}{CD}$, reencuentra la fuerza de la proposición 116. Sobre los segmentos cortados sobre AB lleva triángulos semejantes al triángulo APB y rectángulos semejantes al CDNH sobre los segmentos cortados sobre CD.

Para los triángulos, un simple juego de rectas paralelas prevalece a la construcción y este proceso puede proseguirse (figura 12).

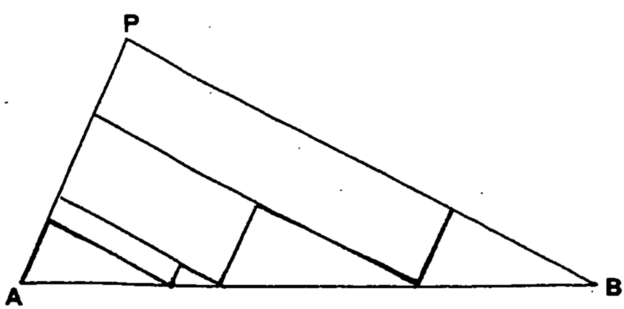


Figura 12

Para los rectángulos, como se indica abajo (figura 13), el proceso se aplica sobre las dos diagonales y puede proseguirse de la misma manera.

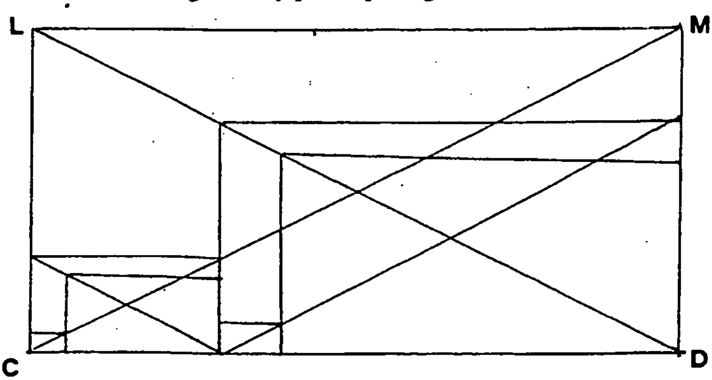


Figura 13

Pero, al final, teniendo en cuenta las hipótesis $(\frac{x_k}{y_k} = \frac{AB}{CD})$, sólo se obtiene el pobre resultado:

$$\left(\frac{AB}{CD}\right)^2 = \frac{\sum_{k=1}^{k=n} x^2{}_k}{\sum_{k=1}^{k=n} y^2{}_k}.$$

Realmente hemos abandonado a Euclides y el marco, eventualmente numérico, que podría proporcionar la relación (1).

2. *El álgebra de series: la adegalización*

En el marco numérico que se impone en el libro VII, puesto que trata los números enteros, Euclides enuncia de nuevo la relación (1):

> "Si tantos números como se quiera son proporcionales, uno de los antecedentes será a uno de los consecuentes como la suma de los antecedentes a la suma de los consecuentes"[103].

Se propone una extensión a esta proposición en el libro IX, extensión para la cual utilizaremos primero una escritura algebraica: si $x_1, x_2, x_3,\ldots, x_n$ están en proporción continua, es decir si

(3) $$\frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{x_3} = ... = \frac{x_{n-1}}{x_n} .$$

se tiene:

(4) $$\frac{x_1}{x_2} = \frac{x_1+x_2+...x_{n-1}}{x_2+...+x_n} .$$

Llamando S_n a la suma (finita) $x_1+.....+x_n$, se dispone de la proporción:

(5) $$\frac{S_n\text{-}x_n}{S_n\text{-}x_1} = \frac{x_1}{x_2} .$$

Aunque la notación con subíndices no existe ni en Euclides ni, por otra parte, en el curso de la primera mitad del siglo XVII, un equivalente de la fórmula es enunciado:

"Si tantos números como se quiera son sucesivamente proporcionales y si del primero y del segundo se retira un número igual al primero, el exceso del segundo será al primero como el exceso del último es a la suma de todos los que están ante él"[104].

Esta formulación, que se refiere explícitamente a números enteros, conviene si $x_2 > x_1$ (progresión geométrica creciente) y se la deduce fácilmente de (5) por utilización de la regla de cálculo:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ implica } \frac{b\text{-}a}{a} = \frac{d\text{-}c}{c} .$$

Sea

(6) $$\frac{x_n\text{-}x_1}{S_{n-1}} = \frac{x_2\text{-}x_1}{x_1} .$$

Aceptemos entonces tres hechos: (H_1), (H_2) y (H_3), que enunciamos voluntariamente en lenguaje moderno:

(H_1) S_n admite S como límite cuando n tiende a infinito (lo que supone $x_1 > x_2$);
(H_2) x_n tiende a cero;
(H_3) Las proporciones subsisten en el límite.

En este caso de la relación (5), se obtiene inmediatamente el valor de la suma de la serie geométrica completa.

$$(7) \qquad \frac{S - 0}{S - x_1} = \frac{x_1}{x_2} .$$

Sea

$$(8) \qquad S = \frac{x^2{}_1}{x_1 - x_2} .$$

La formulación (8) es indicada retóricamente en F. Vieta[105]. Aunque es equivalente a las formulaciones proporcionadas por Grégoire de Saint-Vincent en la proposición 79 de su libro 2 y se la encuentra mucho más tarde en Barrow[106], el camino seguido es, sin embargo, otro de inspiración aritmética y algebraica. Se constata bien a partir de un texto de Fermat cuyo título hace referencia a las progresiones geométricas:

"Sobre la transformación y la simplificación de las ecuaciones de lugares, para la comparación bajo todas la formas de la áreas curvilíneas, sea entre ellas, sea con las rectilíneas y al mismo tiempo sobre el empleo de la progresión geométrica para la cuadratura de las parábolas e hipérbolas hasta el infinito"[107].

Este texto muy rico, que fue probablemente escrito[108] después de una lectura de la *Arithmetica Infinitorum*[109] de Wallis, aunque publicado en 1679[110], intentaba ilustrar el hecho de que la progresión geométrica es *muy fecunda en cuadraturas*[111]. De hecho, Fermat disponía del cálculo antes de 1647, como atestigua una carta dirigida a Digby (20 de abril de 1657), donde indica que se lo había hecho llegar a Torricelli[112]. La suma de una serie es de golpe dada bajo la forma que referiremos por la letra (F).

(F) "Dada una progresión geométrica cuyos términos decrecen infinitamente, la diferencia de los términos que constituyen esta progresión es al término menor como el mayor término de la progresión es a la suma infinita de los otros"[113].

En términos algebraicos, siendo x_1 el primer término, S la suma infinita y x_n el término general ($x_n = x_1 x^n$, $n \geq 1$, siendo x la razón en sentido moderno tomada inferior a la unidad):

$$(9) \qquad \frac{x_n - x_{n+1}}{x_{n+1}} = \frac{x_1}{S - x_1} .$$

Ahora bien, con $x = \frac{x_1}{x_2}$, se tiene $\frac{x_n - x_{n+1}}{x_{n+1}} = \frac{1-x}{x}$, de forma que (9) es una forma posible[114] de la fórmula (8), dicho de otra manera de (G). Una forma suficientemente flexible para el uso que de ella quiere hacer Fermat. No conviene fijar el entero n en el miembro de la izquierda[115], sino más bien dejarlo libre.

En todo caso, esta suma infinita es para Fermat un punto de partida para las cuadraturas, el único:

"Unico, quod notissimum est, proportiones geometricœ attributo tota hœc methodus innititur"[116].

Se aplica inmediatamente a las *hipérbolas* y *parábolas* generalizadas, es decir, a curvas para las cuales hay constancia del producto o del cociente de una potencia de la abscisa por una potencia de la ordenada: con α y ß números positivos[117], $AG^{\alpha}.EG^{\beta}$=cte o $\frac{AG^{\alpha}}{EG^{\beta}}$ = cte. Atribuyendo eventualmente un signo a α, lo que no hace Fermat, se puede clasificar en un mismo registro el caso del producto (hipérbola) y el del cociente (parábola): $AG^{\alpha}.EG^{\beta}$=cte. En Fermat, una representación analítica de curvas es utilizada desde el principio, aunque no se trate realmente de una ecuación cartesiana, puesto que usa dos puntos mobiles:

"Hyperbolas autem definimus infinitas diversœ speciei curvas... sit ut potestas quœdam rectœ AH ad potestatem similem rectœ AG, ita potestas rectœ GE, vel similis diversa a prœcedente, ad potestatem ipsi homogeneam rectœ HI"[118]: $AG^{\alpha}/AH^{\alpha} = EG^{\beta}/IH^{\beta}$.

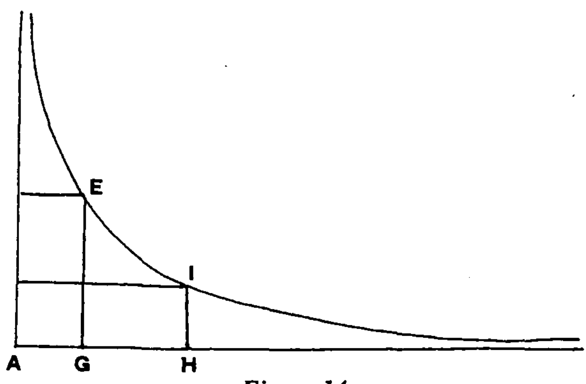


Figura 14

Fermat coloca en abscisas (figura 15) una progresión geométrica creciente[119] de razón q (q>1) a partir de su primer término AG, seguido de AH=qAG, AO=q^2AG... etc.

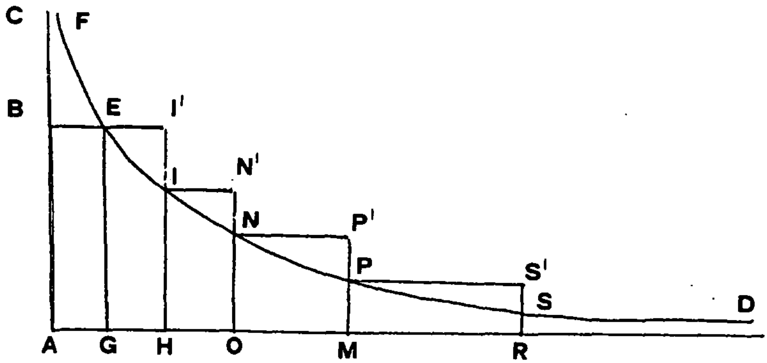


Figura 15

Las áreas de los paralelogramos GHI'E, HON'I, OMP'N, etc. forman otra progresión geométrica[120], lo que Fermat demuestra utilizando únicamente la teoría de las proporciones (especialmente la composición de razones, es decir, su producto en sentido moderno), contentándose con calcular la relación de las dos primeras áreas, relación igual a la inversa de la razón de la progresión geométrica en abscisas en el caso de *la hipérbola* particular elegida (α=2, ß=1).

La restricción del cálculo a sólo los dos primeros términos no presenta problema, al menos si el lector toma conciencia del papel efectivo de la progresión geométrica en abscisas: AG, AH, AO, AM, AR, etc., a la que corresponde otra progresión geométrica en ordenadas: GE, HI, ON, MP, RS, etc. Esta correspondencia procede de la misma propiedad de definición de la *hipérbola*, puesto que

$$\left(\frac{AH}{AG}\right)^{\alpha}\left(\frac{HI}{GE}\right)^{\beta}=\left(\frac{AO}{AH}\right)^{\alpha}\left(\frac{ON}{HI}\right)^{\beta}=etc.$$

En el caso de la hipérbola ordinaria, o sea α=ß=1, Grégoire de Saint-Vincent había cuidado de establecer que a una progresión geométrica en abscisas la curva le hacía corresponder una progresión geométrica en ordenadas (en el libro 6). Para él, esta propiedad jugaba en parte el papel que tomará posteriormente la ecuación cartesiana[121] (xy=cte). Como otros matemáticos de su época, Fermat había considerado las curvas más generales sólo porque conservaban las progresiones geométricas[122]. Las áreas de los paralelogramos sucesivos GHI'E, HON'I, OMP'N, etc. corresponden al producto de los términos correspondientes de dos progresiones geométricas: estos productos forman también una progresión geométrica (como Grégoire de Saint-Vincent había querido demostrar geométricamente en su proposición 71 del libro 2 que ya hemos mencionado). En este caso, si la primera razón es q, la segunda razón es q elevada a la potencia $-\frac{\alpha}{\beta}$, de donde el valor de la razón del producto: $\frac{\alpha-\beta}{\beta}$ exponenciando con base $1/q$.

El cálculo de la relación de los dos primeros términos es genérico y cuando $\alpha>\beta$ como $q>1$, la suma infinita de las áreas de paralelogramos es posible a partir de la relación (9). En este caso, S designa ahora el área que notaremos $\mathcal{A}$ = área (GHI'E) + área (HON'I) + área (OMP'N) + area (MRS'P) + ..., etc, mientras que x_1 es el área del primer paralelogramo GHI'E (se pone $x_1=a=GH.GE$). La razón de la izquierda en la relación (9) toma el valor $q^{(\alpha-\beta)/\beta}-1$. Pero esto es una expresión en términos modernos que no utiliza de ningún modo Fermat. Nuestro cálculo algebraico enmascara pues el camino preciso del autor, porque al igual que Grégoire de Saint-Vincent, Fermat interpreta geométricamente, es decir, elige unos segmentos de la figura para representar las razones en cuestión, y esto debe obligarle a especificar α y ß enteros o inversos de enteros. Debemos por consiguiente entrar en los detalles de la demostración y seguir los diferentes casos de hipérbolas.

Cuando $\alpha=2, \beta=1$, la razón de la izquierda de (9), que escribimos $q-1$, se lee sobre la figura 15 como la razón $\frac{\mathrm{GH}}{\mathrm{AG}}$, cociente de la diferencia del término mayor al menor por este último. Lo que Fermat ha *representado* son las áreas de los paralelogramos sucesivos por una progresión geométrica de segmentos, a saber, la progresión AO, AH, AG, ..., progresión inversa a la fijada de partida (*Sed tres rectæ quae constituunt rationes parallelogrammorum, rectæ nempe AO, HA, GA sint proportionales ex constructione*[123]). Para el cálculo de la suma de esta nueva progresión, utiliza astutamente la forma (F) que, para el término de la izquierda, utiliza dos términos sucesivos sin hacer intervenir el primer término. De este modo, por el cálculo de $\frac{x_n-x_{n+1}}{x_{n+1}}$ la sustitución de la progresión de las áreas de los paralelogramos por la de los segmentos, dos progresiones cuyos primeros términos sin embargo difieren, es indiferente. Aquí, manteniendo $a=GHxGE$ en el denominador,

$$\frac{GH}{AG} = \frac{GH \times GE}{\mathcal{A} \, . \, a} \, .$$

Una reducción a común denominador nos da:

$$\frac{GH \times GE}{AG \times GE} = \frac{GH \times GE}{\mathcal{A} \, . \, a} \, .$$

Poniendo $\mathcal{B}$ igual al área del paralelogramo AGEB fijo sobre la figura, se obtiene la relación:

(10) $\mathcal{A} \, . \, a = \mathcal{B}$.

Cuando $\alpha=3$, $\beta=1$, la expresión $q^2\text{-}1$ que proporciona la razón de la progresión de las áreas de los paralelogramos se lee también linealmente sobre la figura. En efecto, una serie geométrica de razón $1/q^2$ es visible con unos segmentos: es la serie AR, AO, AG, etc., serie inversa de los términos impares de la primera serie geométrica en abscisa. Aunque sean diferentes los primeros términos de la serie de las áreas de los paralelogramos y de esta nueva serie de segmentos, la expresión $\frac{x_n - x_{n+1}}{x_{n+1}}$ permanece iqual para las dos series y, en este caso, puede escribirse:

$$\frac{AO\text{-}AG}{AG} = \frac{GO}{AG} \, .$$

(*in hoc vero casu, parallelogrammum primum erit ad secundum, secundum ad tertium, et., ut recta AO ad GA; quod statim compositio proportionum manifestabit*[124]). Aceptada esta representación geométrica, la forma (F) da con la misma convención de escritura:

$$\frac{GO}{AG} = \frac{GH \times GE}{\mathcal{A} \, . \, a} \, .$$

Pero $\frac{GO}{AG} = \frac{GO \times GE}{AG \times GE}$, o sea tras un intercambio de medios, la relación:

$$\frac{GO \times GE}{GH \times GE} = \frac{AG \times GE}{\mathcal{A} \cdot a} .$$

Así pues

$$\mathcal{A} \cdot a = \left(\frac{GH}{GO}\right) B \qquad (11)$$

En términos modernos, la razón $\frac{GH}{GO}$ vale *1/1+q* (a partir de *q-1/q²-1)*, puesto que *q (q>1)* es la razón de la sucesión geométrica inscrita en abscisas al comienzo.

Cuando $\alpha = -1/2, \beta = 1$ (es decir $\alpha = 1, \beta = 2$ si se adopta escritura cociente como Fermat), caso de la *primera parábola, la de Apolonio*[125], el cálculo formal para las áreas de los paralelogramos proporciona una serie geométrica cuya razón es q elevado a la potencia 3/2. Esta vez es necesario tomar una razón $0<q<1$ al comienzo si se quiere poder sumar la progresión de las áreas. De modo que el término de la izquierda en (9) vale $1-q^{3/2}/q^{3/2}$. Esto no es lo que escribe Fermat, puesto que la misma inquietud de interpretación geométrica, es decir, de representación de la serie de las áreas por una serie de segmentos, le obliga a hacer intervenir medios geométricos. Si se pone AY como media geométrica entre AO y AH (es decir $AY = \sqrt{AO.AH}$), se tendrá $AY=q^{3/2}$ AG. La serie de áreas está bien representada por la serie geométrica lineal: AG, AY, AM, etc. Para esta serie de segmentos, teniendo en cuenta el hecho de que $q<1$ y, por lo tanto AY da el término más pequeño, el término de la izquierda (F) vale:

$$\frac{GY}{AY} .$$

Finalmente:

$$\frac{GH \times GH}{\mathcal{A} \cdot a} = \frac{GY}{AY} .$$

Puesto que a = GH x GE, una astucia de cálculo sobre las proporciones usual en el siglo XVII proporciona además

$$\frac{GH \times GE}{\mathcal{A}} = \frac{GY}{AY + GY} = \frac{GY}{AG}\ .$$

De modo que[126]

$$(12) \qquad \mathcal{A} = \left(\frac{GH}{GY}\right) \mathcal{B}\,.$$

Remarquemos que con la parábola ordinaria, Fermat ha pasado de una serie geométrica creciente en ebscisas a una serie decreciente de las áreas (q<1). La serie AG, AY, AO, AM, etc. tiende a cero y se suman las áreas de una familia de paralelogramos inscritos en un cuadrado de área finita. Si los cálculos *formales* son los mismos, la visualización geométrica no lo es. De hecho, he aquí la figura correspondiente[127] (figura 16)[128]:

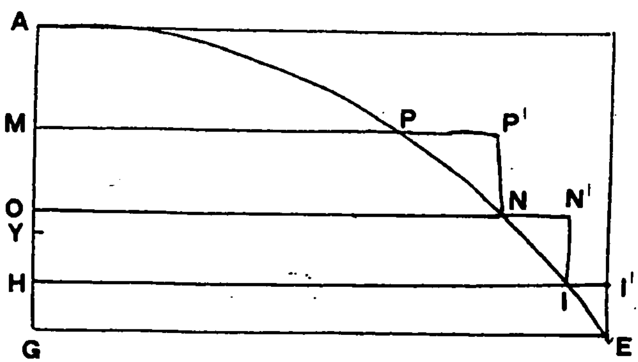


Figura 16

La estabilidad de los cálculos para unas situaciones geométricas muy distintas (rama infinita o arco finito de la curva) establece que Fermat adopte una vía analítica, aunque aquí se vea reducida a álgebra de las proporciones. No obstante, se habrá notado en qué medida este álgebra está ya *numerizada:* las proporciones son manipuladas como banales fracciones numéricas.

En lo que respecta al cálculo del área de la parábola, Fermat habría podido también considerar en abscisas la descomposición indicada en la figura 17, con una razón q<1, y una parábola cuya ecuación cartesiana es y=ax^2. Su método geométrico de cálculo está totalmente adaptado.

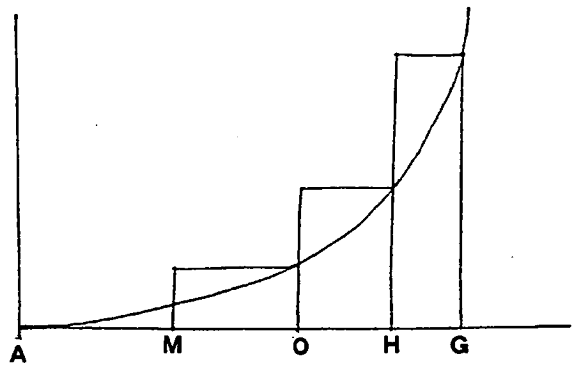


Figura 17

Le habría bastado tomar $\alpha = -2$ y $\beta = 1$ para llegar a una serie de razón q^3 para las áreas ($q<1$) e interpretar esta serie por una serie de segmentos AG, AM, etc., obteniendo la razón $\frac{GM}{AM}$ para $(1-q^3)/q^3$ y, a partir de ahí por un cálculo similar de proporciones a partir de $\frac{a}{\mathcal{A} \, . \, a} = \frac{GM}{AM}$, disponer de la relación:

$$(13) \qquad \mathcal{A} = \left(\frac{GH}{GM}\right) \mathcal{B}.$$

Eligiendo primero la disposición parabólica de la figura 16 y haciendo intervenir las medias geométricas, Fermat preparaba mejor el caso algebraico de otra *parábola* (llamada semicúbica) que ya había evocado en su *Dissertation géométrique: de la comparaison des lignes courbes avec les lignes ddroites*[129], parábola determinada por la relación $\frac{GE^3}{HI^3} = \frac{AG^2}{AH^2}$. Con las notaciones adoptadas, este último caso corresponde a $\alpha = 2$, $\beta = 3$. Sea por la serie de las áreas de los paralelogramos la razón $q^{5/3}$. Por analogía con el caso de la parábola ordinaria (figura 16), Fermat pone esta vez $AT = q^{5/3}\,AG$, es decir, inserta dos medias proporcionales entre los puntos G y H y prolonga la progresión hasta el quinto punto. El mismo tipo de cálculo que antes nos dio:

$$(14) \qquad \mathcal{A} = \left(\frac{GH}{GT}\right) \mathcal{B}.$$

Por supuesto Fermat no se detiene en las fórmulas (10), (11), (12), (13) o (14), que no proporcionan áreas hiperbólicas. Pretende obtener no solamente el área de una serie de paralelogramos circunscritos a una curva, sino el área delimitada por la misma. Para hacerlo razona por *adegalización (ut loquitur Diophantus)*, es decir, que *hace tender hacia uno la razón q de la serie geométrica de partida* e interpreta de forma triple este paso al límite, el cual -es una analogía importante- funciona como el cálculo de la suma de una serie geométrica a partir de la expresión euclidiana para una serie finita (paso de (5) a (8) con las tres propiedades (H_1), (H_2) y (H_3) ya citadas).

(H'_1) De una parte, las áreas de los paralelogramos rectilíneos tienden hacia las áreas de los paralelogramos curvilíneos o más bien la suma completa

área (GHI'E) + área (OMP'N) + área (MPS'P) + ...,

se hace igual al área delimitada por la recta EG, el eje de abscisas y la misma curva, y lo que la curva se extiende hasta el infinito (caso de las *hipérbolas*, área GED con la figura 15) o sea inscrita a distancia finita (caso de las *parábolas*, área AGE con la figura 16), esto corresponde a (H_1).

(H'_2) Por otra parte, un área como la del paralelogramo GHI'E se hace despreciable. Esto corresponde a (H_2).

(H'_3) Finalmente, una razón de dos términos tomados en la serie geométrica es automáticamente reemplazada por la razón de los números que representan estos términos en el ordenamiento de la serie geométrica eventualmente completada por construcciones intermedias: así, por ejemplo, en la relación (11), $\frac{\mathrm{GH}}{\mathrm{GO}}$ se convierte en 1/2 y en la relación (14), $\frac{\mathrm{GH}}{\mathrm{GT}}$ en 3/5. Esto es el análogo de (H_3), pero necesita una explicación que daremos un poco más allá.

A partir de estos tres hechos (H'_1), (H'_2) y (H'_3) y llamando en cada caso S al área total de la superficie curvilínea, las fórmulas (10) y (14) dan respectivamente:

(15) $S = \mathcal{B}$,

(16) $S = \frac{1}{2}\, \mathcal{B}$,

(17) $$S = \frac{2}{3}\,\mathcal{B}\,,$$

(18) $$S = \frac{1}{3}\,\mathcal{B}\,,$$

y

(19) $$S = \frac{3}{5}\,\mathcal{B}\,,$$

Fermat no sólo halla la cuadratura de la parábola[130] (fórmula 17), sino que puede construir un nexo cuantitativo entre la cuadratura y la definición analítica de la curva considerada, es decir, inscribir en el resultado mismo los coeficientes α y ß que entran en la definición de la curva (coeficientes necesariamente positivos para él). Mediante la adición o sustracción de estos coeficientes, distingue el caso de las *parábolas* y el de las *hipérbolas*. Así, para las *parábolas*:

"Canon vero universalis inde nullo negotio elicietur: patet nempe fore semper parallelogrammum BD ad figuram AICB ut aggregatum exponentium potestatum applicatœ et diametri ad exponentem potestatis applicatœ"[131].

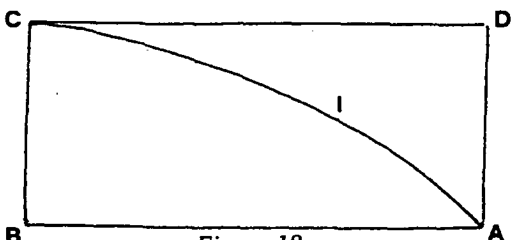


Figura 18

Pese a la eficacia cuantitativa del resultado, notemos que no es necesario precisar una abscisa y una ordenada, por que juegan el mismo papel[132]. Sólo la elección de la primera determina la segunda, pero además expresa la porción de superficie que está examinando, se trate de BAIC o de DAIC (figura 18).

Para las hipérbolas, el resultado también es general:

"In hyperbolis autem canon non minori facilitate invenietur universalis: erit enim semper in quacumque hyperbole, si recurras figuram, parallelogrammum BG ad figuram in infinitum protensam RGED ut differentia exponentium potestatum applicatœ et diametri ad exponentem potestatis"[133].

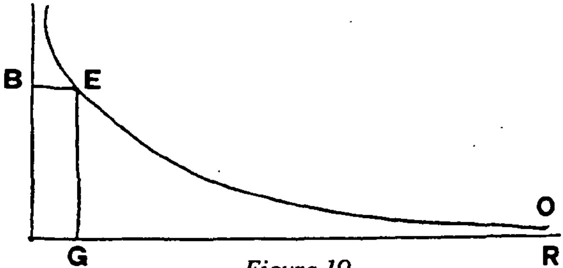


Figura 19

Sin embargo, si las hipérbolas tienden a infinito, lo mismo en abscisas que en ordenadas, las áreas no son finitas por los dos lados simultáneamente y, de hecho, para la hipérbola ordinaria, la de Apolonio, las áreas son infinitas por los dos lados, como Fermat destaca claramente después de Grégoire de Saint-Vincent[134]. De modo que la regla universal debe, esta vez, ser precisada; por ejemplo, por la determinación de una abscisa donde los puntos de la hipérbola van al infinito y de una ordenada: la diferencia de *potencias* sólo puede tomarse de uno mayor a uno menor. Así, con yx^2=cte, del lado infinito de las x el área es finita (diferencia 2-1); pero del lado del infinito de las y se debe escribir xy^2=cte, de modo que la diferencia es 1-2, que no es posible[135].

Señalemos que si en la demostración los coeficientes α, ß (las potencias de abscisas u ordenadas) son manipulados como números enteros, o cocientes de enteros, incluso racionales, el enunciado borra tales restricciones y tanto α como ß aparecen como coeficientes cualesquiera (potencias). Los matemáticos del siglo XVIII, Euler en particular, mantendrán esta actitud de un enunciado netamente más general que una demostración restringida al caso racional, incluso entero[136]. En una palabra, la serie geométrica convenientemente manipulada, ha conducido a unas cuadraturas muy versátiles. El método se basa sobre la adegalización, manifestada aquí por las tres propiedades (H'_1), (H'_2) y (H'_3).

Con (H'_1) y (H'_2), la adegalización, cuando se aplica a series geométricas, se reduce a una continuidad que Fermat no intenta justificar mejor. Una suma discreta de áreas tiende a un área continua cuando la razón de la serie geométrica, esta forma de andamiaje destinado a alcanzar el continuo, tiende a la unidad. Que la suma discreta sea finita o infinita no cambia nada la percepción de lo que es establecido como una realidad[137]. *Una realidad geométrica fácil de justificar*, puesto que la suma de trozos curvilíneos, la suma de las áreas de los triángulos curvilíneos EI'I, IN'N, NP'P, PS'S, etc.

(figura 15) no sobrepasa el área del paralelogramo GHI'E, en el cual es fácil probar la pequeñez, es decir hacerla inferior a una cantidad dada[138] por retomar la expresión de Grégoire de Saint-Vincent. Lo esencial está en esta pequeñez. En todo caso Fermat se deshace de la justificación y hace una referencia a la vez lejana y definitiva tanto a la tradición de la exhaución como al consenso de los geómetras. *Da así al discreto una clara autonomía de cálculo.*

"Imaginemos los términos de una progresión geométrica extendida al infinito: sean AG el primer [término], AH el segundo, AO el tercero, etc. Supongamos que estos términos están bastante próximos los unos de los otros para que, siguiendo el método de Arquímedes, se pueda adegalizar, como dice Diofanto, o igualar por aproximación el paralelogramo rectilíneo GE por GH al cuadrilátero mixtilíneo GHIE; supondremos además que los primeros intervalos rectilíneos GH, HO, OM, etc. de los términos de la progresión son suficientemente iguales entre sí para que se pueda aplicar fácilmente el método de Arquímedes de reducción al imposible, por circunscripciones e inscripciones. Basta hacer esta advertencia una vez para no obligarse a volver y a insistir constantemente sobre un artículo conocido de todos los geómetras"[139].

Más sutil sin ninguna duda es (H'_3), con el cálculo del límite (cuando q tiende a 1) de las razones de términos de la progresión que intervienen en las igualdades (11), (12), (13) o (14). La justificación de Fermat es brutal porque se refiere a los logaritmos, esos objetos que Grégoire de Saint-Vincent no menciona para nada en su *Opus Geometricum*[140]*: propter nostram methodum logarithmicam*[141]*: parallelogrammum BD est ad totam figuram in hoc casu ut 5 ad 3*. En cada caso el cálculo moderno consistirá en evitar la indeterminación 0/0 del tipo $(q-1)/(q^2-1)$ $(q>1)$ o $(1-q)/(1-q^{3/2})$ $(q<1)$, o incluso $(1-q)/(1-q^3)$ $(q<1)$, o $(1-q)/(1-q^{5/3})$ $(q<1)$. Hasta $(1-q)/(1-q^{\gamma})$ con $\gamma = \dfrac{\alpha + \beta}{\beta}$. El límite es evidentemente $\dfrac{1}{\gamma}$ si se lleva hasta el final la técnica de los desarrollos limitados de la exponencial y el logaritmo. Esto no está presente en la obra de Fermat, que no se refiere a los logaritmos para justificar (H'_3). De hecho, considera en el caso parabólico que un segmento como AG es aproximable cuando $q<1$ por $\dfrac{1}{q^n}\,GX$, donde GX es suficientemente pequeño y n suficientemente grande, es decir, que considera GX como la unidad de base y gradúa AG por una progresión geométrica. Pero los segmentos sucesivos, diferencia de dos términos de la progresión, pueden ser considerados como iguales: este es el principio básico para la construcción de una tabla donde los logaritmos son enteros, tabla que sólo da valores aproximados. En consecuencia, las razones de dos términos cualesquiera de la progresión son precisamente las razones de su rango respectivo. En el caso hiperbólico, el principio es el mismo a partir de GH, salvo que el segmento AD, representado por q^nAG, con $q>1$, es infinito. Pero esto no es un inconveniente puesto que el razonamiento parte de una aproximación del logaritmo. Dicho de otra forma, Fermat gradúa en logaritmos enteros tanto AD como AG. Es ahora cuando se comprende su insistencia en cuanto a la representación lineal (por segmentos) de la suma de las áreas de los paralelogramos; esta representación geométrica tenía una finalidad de cálculo logarítmico. De una vez, toda la demostración toma sentido: no se puede manifestar mejor la orientación numérica y algebraica dada por Fermat al viejo resultado expresado por la relación (5).

Conclusión

En ninguno de los textos estudiados, ya sea en Fermat o en Grégoire de Saint-Vincent, se presenta el algoritmo del cálculo integral. En la prehistoria que evocamos, han sido los lazos entre el continuo y el discreto lo que nos ha interesado. Por medio de la serie geométrica y de su suma podemos constatar que estos lazos son muy distintos de Grégorie de Saint-Vincent a Fermat.

La inscripción del discreto en una curva, en Fermat, es hecha fundamentalmente para tratar el continuo. La cuadratura en cuestión no es numérica. Hay efectivamente un equivalente rectilíneo igual al área curvilínea, hiperbólica o parabólica. En este sentido, Grégoire de Saint-Vincent es más reformista, pues investiga en cuanto que tales las relaciones entre áreas, sin necesidad de conocerlas numéricamente o de encontrar equivalentes geométricamente más simples.

Como Grégorie de Saint-Vincent, Fermat geometriza todas sus construcciones: las series auxiliares son visualizadas por segmentos, las medias geométricas son construidas, etc. La geometría está omnipresente: no es solamente un enfoque. Es, no obstante, una geometría plana, una geometría de la recta y los segmentos, muy próxima a la práctica de los números reales y al menos las razones están numerizadas. La geometría de Grégorie de Saint-Vincent es más generosa, con dos o tres dimensiones pero, sobre todo, la geometría permanece como el objetivo, y la teoría de las proporciones no es reducida a una teoría de números.

En Fermat, el discreto (representado por la serie geométrica) ha adquirido una autonomía propia; aunque lleva el cálculo de las proporciones como el jesuíta belga, admite en sí su legitimación. Grégorie de Saint-Vincent ha procedido anteriormente en este mismo sentido y su nueva teoría de la suma de una progresión está totalmente libre de la geometría, aunque la iteración que le da pie depende de una experiencia geométrica. Por este estilo analítico, Grégorie de Saint-Vincent ha marcado los mejores espíritus de su época, aún cuando otros muchos, como Barrow, están continuamente tentados por un retorno a la geometría. Sin embargo Grégorie de Saint-Vincent no ha sabido o no ha querido explorar el mundo analítico que se abría ante él. Retrocede, no sin antes disfrutar de la contemplación de nuevas formas.

La adegalización de Fermat podría ciertamente beneficiarse del mismo tratamiento de reducción al absurdo del que Grégoire de Saint-Vincent hace un uso meticuloso y privilegiado, pero esto sería perder el tiempo porque la operación de límite, confinada en el texto estudiado únicamente a las series geométricas funciona por sí misma. Mientras Fermat explora un infinito debidamente canalizado, donde el cálculo logarítmico es motor, Grégoire de Saint-Vincent aborda la profusión del infinito generada por iteración. Y allí se pierde.

NOTAS

1 Sobre sus discípulos, como sobre la vida de Grégoire de Saint-Vincent, se pueden consultar artículos de erudicción, en particular BOSMANS, H. (1901-1902) "Deux lettres inédites de G. de Saint-Vincent". *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles, 26,* 22-40; y sobre todo el texto de este autor aparecido en la *Biographie nationale belge, 21* (1911-1913), colonnes 141-171; BOCKSTAELE, P. (1969) "Four letters from G. a Sancto Vincentio to Chr. Griengerger". *Janus, 56,* 63-107; VAN DE VYVER, Omer (1980) "L'Ecole de mathématiques des Jésuites de la province franco-belge au XVIIème siècle". *Archivium Historicum Societatis Iesu, XLIX (97),* 265-278.

2 Poniendo $\frac{AC}{A_2C_2} = r\ (r>1)$, se tiene para $n \geq 2$ que $A_n C_n = \frac{AC}{r^{n-1}}$ y $D_{n-1} D_n = \frac{AC}{r^{n-1}}$ con $D_1=C$ y con $B_1=B$, siempre para $n \geq 2$, $B_{n-1} B_n = \frac{BB_2}{r^{n-2}}$.

3 Evangelista Torricelli adopta una figura aun más simple que la figura (1) y pone de manifiesto la progresión geométrica de las longitudes AC, A_2C_2, A_3C_3, etc., en su manuscrito *De dimensione parabolae*, lema XXIV: "Si duae rectœ lineœ invicem concurrant, et inter ipsas descriptum sit quoddam flexilineum constans ex lineis alternatim parallelis; erunt omnes lineœ quœ inter ser parallelœ sunt, in continua proportione". Despues, trazando paralelas, representa la suma total sobre el segmento AB (lema XXVI). Véase: LORIA, G. & VASSURA, G. (Eds.) (1919) *Opere di Evangelista Torricelli*. Faenza, vol. 1, pp. 147-148.

4 *P. Gregorii a Sto. Vincentio Opus geometricum quadraturœ circuli et sectionum coni decem libris comprehensum,* I. et I. Meursios, Anvers, 1647.

5 La Biblioteca Real de Bruselas posee un importante fondo de manuscritos dejados por Grégorie de Saint-Vincent. Están reunidos en 17 grandes volúmenes, con un número de páginas que oscila entre las 300 a casi las 600 (Números 5770-5793). Pero la cronología no ha sido respetada. Un intento de

datación fue efectuado por Hermann van Looy en su tesis doctoral en la Universidad Católica de Lovaina (*Chronologie en analyse van de mathemtische handschriften van G. a Sancto Vincentio*,1979). Las conclusiones son retomadas en dos artículos del mismo autor, siendo el segundo traducción del primero: VAN LOOY, H. (1980) "Chronologie et analyse des manuscrits mathématiques de Grégorie de Saint-Vincent (1584-1667)" *Archivum Historicum Societatis Iesu, XLIX (97)*, 279-303; VAN LOOY, H. (1984) "A chronology and historical analysis of the mathematical manuscripts of Gregorius a Sancto Vincentio (1548-1667)". *Hist. Math., 11*, 57-75. Un estudio anterior se debe a SAUVENIER-GAUFFIN, E. (1951) "Les manuscrits de G. de Saint-Vincent". *Bull. Soc. des Sciences de Liège*, 413-436, 563-590, 711-737.

6 Una traducción francesa debería aparecer próximamente en *Sciences et tecniques en perspective.*

7 Argumento del libro 2, *Opus Geometricum*, p. 52 (*progressionum inchoatorum*). Con el fin de aligerar la presentación, damos directamente la traducción de ciertos pasajes de la obra. Véase DHOMBRES, Jean *Une algébre de raison au 17e siécle: la quadrature de l'hyperbole par Grégorie de Saint-Vincent*, en prensa. Regresaremos sobre el significado atribuido a la palabra *término* en Grégoire de Saint-Vincent.

8 Antes, en el libro 2, sólo las figuras de las proposiciones 31, 35, 36, 38, 40 y 69 presentan una espacialidad parecida, pero son muy clásicas en su fondo, puesto que se trata de construir, bien una media proporcional, bien el teorema de Tales o finalmente (en la proposición 69) de ilustrar geométricamente la importante propiedad algebraica $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$ sobre la que volveremos. Por el contrario la proposición 70 hace actuar la iteración y un proceso infinito del cual da cuenta la figura.

9 *Les Œuvres d'Euclide*, traducción de F. Peyrard, Paris 1816, vol. 2, p. 113. La traducción latina comúnmente aceptada es justamente el *hoc semper fiat* para traducir "κὰι τοῦτο ἀεὶ γίγνηται", y si se hace siempre lo mismo. En el libro XII de los *Elementos*, Euclides retoma la misma formulación para la medida del círculo: *y si se continúa siempre haciendo lo mismo.*

10 En la proposición 24 de este libro, se lee *y si continuamos inscribiendo en los segmentos sucesivamente triángulos...* lo que, con la supresión del adverbio *siempre*, se revela menos preciso [*Archimède*, vol. 1, La mesure du cercle, trad. C. Mugler, Les Belles Lettres, Paris, 1970, vol. 2, p. 193].

11 En este texto de Arquímedes la formulación es más prudente todavía. Mugler traduce por *que los segmentos del círculo tengan al final una suma inferior...*, pero siente la necesidad de precisar (*sc. si se repiten las operaciones de división en dos partes iguales*) [trad. Mugler, Op. Cit. p. 137]. A decir verdad en lugar de la formulación de una continuación indefinida, Arquímedes prefiere, también en otros libros, fijar el momento a partir del cual se puede detener. Así, en *De la Esfera y el Cilindro*: "dividiendo en dos partes iguales ... encontraremos como restos segmentos cuya suma es inferior al área" [Trad. Mugler, vol. 1, proposición 9, p. 26] y en el libro *Sobre los Conoides y Esferoides*, Arquímedes elige poner el acento sobre la posibilidad de detener la iteración: "es en consecuencia posible inscribir un polígono en un círculo..." [Trad. Mugler, vol. 1,

proposición 4, p. 167]. Las reticencias de Arquímedes -algunas portadoras de precisión- expresan suficientemente que la continuación indefinida era un problema desde la Antigüedad.

12 *Titillavit me hœc particula, et coëgit, morosiore cogitatione circa hœc versari*, [*Opus geometricum*, op. cit., p. 52].

13 La razón de la progresión de las áreas es el producto de las razones de las progresiones sobre cada una de las dos rectas. Volveremos a encontrar este resultado.

14 *Si fuerit magnitudo AB, ad magnitudinem BK, ut magnitudo BC ad magnitudinem CK. Dico proportionem AB ad BC, sine termino continuari actu posse intra magnitidunem AK, ita ut numquam ad K perueniatur*, [Proposición 75, libro 2, *Opus geometricum*, op. cit., p. 95].

15 Para la verificación del comentario he aquí el texto traducido de la demostración proporcionada por Grégoire de Saint-Vincent [proposición 75, libro 2]: "Que lo que es AB a BC, BC lo sea a L. Porque AB es entonces a BK como BC a CK, alternando se tendrá que lo que es AB a BC (es decir BC a L), BK lo es a CK . Y de nuevo alternando, lo que BC es a BK, L lo es a CK. Así pues, puesto que BC (por hipótesis) es menor que BK, L será igualmente menor que CK. Por lo tanto, de CK se podrá sustraer CD igual a L. Ahora bien, AB, BC y L estaban las tres en proporción continua, por lo tanto AB, BC, CD también están en proporción continua. Ahora, a estas tres magnitudes en proporción continua AB, BC, CD se añade la cuarta proporcional continua M. Porque he mostrado un poco antes que BK es entonces a BC como CK es a L (es decir CD), se tendrá dividiendo e invirtiendo que BC es a CK como CD a DK. Puedo demostrar que M es menor que DK gracias al mismo razonamiento por el cual, antes, demostré que L es menor que CK. Se podrá, en consecuencia, retirar de DK una parte DE igual a M. Las cuatro magnitudes AB, BC, CD, DE, están pues en proporción continua. Y así demostraremos que la proporción AB a BC, en el interior de la línea AK, puede ser continuada en acto sin término final, de manera que no alcanza a K. Lo que se quería demostrar".

16 *Euclidis elementorum libri XV...*, Auctore Christophore Clavio, Romæ, apud Vincentium Accoltum, 1574, 2 vols.

17 Para Grégoire de Saint-Vincent, y para los matemáticos de su época, la razón de una progresión geométrica es la relación del primer término al segundo, es decir, la inversa de lo que hoy llamamos razón, lo que confunde a veces a los comentaristas.

18 He aquí la sucesión de cálculos realizados como en la primera etapa. La relación (7) da por intercambio de medios $\frac{BC}{CD} = \frac{CK}{DK}$, y como $\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{CD}$, (5) se lee $\frac{BC}{CD} = \frac{CD}{M}$. Así pues $\frac{CK}{DK} = \frac{CD}{M}$, e intercambiado los medios $\frac{CD}{CK} = \frac{M}{DK}$. Se ha probado la desigualdad CD < CK. De ahí la conclusión M < DK.

19 *poterit ergo ipsi M, ex DK abscindi DE aequalis. Sunt igitur quatuor magnitudines AB, BC, CD, DE continuae proportionales.*

20 *Atque ita demonstrabimus proportionem AB ad BC, intra lineam AK sine termino posse actu continuari, ita ut nunquam ad K perueniatur* [Proposición 75, libro 2, Opus geometricum, p. 95].

21 Définición 2, libro 2, *Opus geometricum*, p. 54, "*Progressio Geometrica est quotcunque terminorum secundum eandem rationem continuatio*".

22 Défición 1, libro 2, *Opus geometricum*, p. 54, "*Geometricam seriem voco quantitatem finitam, diuisam secundum continuationem cuiuscunque rationis datæ*".

23 Grégorie es totalmente consciente del papel de este intermedio y le consagra una proposición, la proposición 76, a continuación pues de la proposición 75.

24 Una regla que ya hemos visto en acción en la proposición 70. Volveremos sobre esta regla, porque es ciertamente el origen de una de las pruebas de la formula (G) , nuestro objetivo en este estudio.

25 Hemos demostrado la equivalencia de (Gc) y (Gi) y el hecho de que (Gi) implica (Gd). La implicación recíproca necesita previamente la fijación de un nexo entre AK y la razón $\frac{AB}{BC}$; este nexo puede ser la relación (1), y la proposición 75 muestra entonces la equivalencia de (G_i) y de (G_d). También puede ponerse AK como suma de la serie AB + BC + CD + ..., en cuyo caso hay equivalencia de (G_c) y de (G_d). ¿En qué sentido puede hablarse de suma infinita? Tal es precisamente el objeto del trabajo minuciosamente organizado por Grégoire de Saint-Vincent.

26 Concepción manifestada por su definición de *serie geométrica*.

27 Definitio tertia: *Terminus progressionis est seriei finis, ad quem nulla progressio pertinget, licet in infinitum continuetur; sed quouis interuallo dato proprius ad eum accedere poteri* [*Opus geometricum*, p. 55].

28 Por coquetería lingüística, la palabra *término* posee dos acepciones en Grégoire de Saint-Vincent, término general de la progresión por una parte y término final por otra. Lo precisaremos si es necesario poniendo entre corchetes la palabra [final]. Todavía se usa en francés moderno el *término* de un alquiler en el sentido del fin de un periodo y de *término* como elemento del vocabulario.

29 Por ejemplo en el libro X de los *Elementos*, proposición 1.

30 *Detur enim quantitas LM aut alia quantumis parua* [Proposición 78, principio de la demostración, *Opus geometricum*, p. 96].

31 En el siglo XVII, como en el siguiente, la expresión *proportio* designaba tanto una verdadera proporción con cuatro términos como la razón (*ratio*) de sólo dos términos, componente si se quiere de proporción. La *proportio* de una progresión geométrica designa a menudo la razón (relación entre el primer y el segundo término).

32 Es decir que AB es estrictamente inferior a AC y por lo tanto en escritura moderna AB/AC<1 (el número 1 todavía no era admitido en pie de igualdad con el resto de los números enteros).

33 *Dico si hæc continuetur*: es decir si, a partir de la relación AB/AC, se construye una proporción continua AB/AC=AC/AD=AD/AE, etc. como la deducida de la condición establecida en el enunciado de la proposición 75, libro 2.

34 Proposición 77, *Opus Geometricum*, p. 96

35 *A magnitudine AK auferatur quæuis pars AB, et à residuo BK auferatur BC, ea lege vt sicut est AB ad BK, ita sit BC ad CK. Dico si hæc ablatio semper fiat, relinqui ex AK quantitatem data minorem* [Proposición 78, libro 2, *Opus geometricum*, p. 96].

36 *Quod in gratiam quorundam dictum sint. [Opus geometricum,* p. 97] Frase que, según la sugerencia de J.P Le Goff, se podría traducir por un *A buen entendedor, pocas palabras bastan.*

37 HEIBERG, I.L. & MENGE, H. (1886) *Euclidis opera omnia.* vol. 3. Lipsiae.

38 Es lo que indica la forma (G_i) o incluso la forma (G_c), de modo que AB, BC, CD, etc., tanto como AK, BK, CK, etc., formen progresiones geométricas.

39 La estabilidad de la proporción notada

$$\frac{1-x}{x} = AB/BK=BC/CK=CD/DK=\ldots, \text{ con } 0<x<1,$$

que no es otra que (G_c), proporciona 1-x=AB/AK=BC/BK=CD/CK=..., es decir (G_i), de la que en particular el n-ésimo término vale $(1-x)x^{n-1}$. AK y tiende a 0 en el infinito cuando x=BC/AB=CD/BC=..., es decir, cuando se dispone de una progresión geométrica, AB, BC, CD, etc., de razón x (es la forma (G_d)). El cociente (1-x)/x toma todos los valores posibles entre 0 e infinito cuando x queda confinado en el intervalo abierto 0<x<1. Lo que corresponde a la libertad completa de elección del punto B entre A y K en la proposición 77. Por lo tanto la razón de la progresión AB, BC, CD, etc,. es cualquiera (pero por supuesto inferior a 1).

40 *Se dice que unas magnitudes tienen una razón entre ellas cuando al multiplicarlas pueden superarse mutuamente* [Trad. F. Peyrard, op. cit.].

41 Para describir este enunciado en términos modernos, hagamos $AB=a$, $BC/AB=x$ y $AK=y$, con la relación entre x, y, a dada por la fórmula (G): y=a/(1-x).

42 $\frac{a}{y-a} = \frac{xa}{y-a(1+x)}$. Es la forma que hemos denotado (G_i).

43 $\frac{a}{y} = \frac{xa}{y-a}$. Es la forma que hemos denotado(G'_i).

44 $\frac{y}{y-a} = \frac{y-a}{y-a(1+x)}$. Es la forma que hemos denotado (G_c).

45 $\frac{1}{x} = \frac{y-a}{y-a(1+x)}$. Es la forma que hemos denotado (G_i).

46 $\frac{1}{x} = \frac{y}{y-a}$. Es la forma deducida de la razón común a (G_c) y (G_d).

47 Proposición 79, libro 2, *Opus Geometricum,* p. 97.

48 Véase DHOMBRES, J. (1992) *Le raisonnement par l'absurde dans la pratique des mathématiciens.* "Cahiers d'Histoire et de philosophie des sciences". París, Belin.

49 Término está tomado aquí en su sentido de término general. Se puede tener también AB/BK inferior o superior a la unidad. En la relación AB/BC es superior a la unidad, de modo que la razón (en el sentido moderno) de la progresión geométrica AB, BC, CD, etc., sea inferior a la unidad.

50 Es la forma (G_i).

51 *Ex AK magnitudo quavis datâ minor.*

52 *Igitur AI seriei rationis AB ad CD œqualis erit.*

53 Grégoire prosigue: *Las demostraciones de las hipótesis restantes se remiten a la primera.*

Pues si AB es a AK como BC a BK, se tendrá dividiendo: AB es a BK como BC es a CK. Así, según la primera demostración, el término de la razón AB a BC siempre continuada está en K.

2º Si AK, BK y CK están en proporción continua, se tendra dividiendo: AB es a BK como BC es a CK. Luego, de nuevo, la proposición es evidente por la primera demostración .

Finalmente, si se tiene que AB es a BC como BK es a CK (o AK a BK), permutando se tendrá o bien que AB es a BK como BC es a CK , o bien AB es a AK como BC es a CK. De donde de nuevo la proporción está plenamente justificada con ayuda de la primera demostración.

54 En contraste, Torricelli no se enzarza de ninguna manera con un aparato analítico tan complicado y no pretende en modo alguno un rigor a la antigua: desde la evidencia geométrica de la proposición 70, obtiene directamente la *suma* de una serie geométrica, ya que ésta se ve gracias al segmento AB(fig. 1) y le basta hacer jugar la similitud: *Suppositis infinitis magnitudinibus in continua proportione Geometrica maioris inaequalitatis, erit prima magnitudo media proportionalis inter primam diferentiam et inter aggregatum omnium*, lema XXVII [Véase LORIA, G. & VASSURA, G. (Eds.) (1919) *Opere di Evangelista Torricelli*. Faenza, vol. 1, p. 149]. De hecho, Torricelli explica lo que Grégoire de Saint-Vincent da en la proposición 80 en 3º, como veremos. Ademas, Torricelli indica en un escolio que Cavalieri había obtenido previamente la expresión de la suma de una progresión geométrica.

55 El círculo vicioso proviene la de existencia de un punto final para la progresión AB, BC, CD, etc. Es la ontología de la proposición 75 lo que molesta, por que hace necesario poner lo que se quería construir. El razonamiento de Grégoire de Saint-Vincent es casi irreprochable.

56 *Opus Geometricum*, op. cit., p. 97.

57 La fórmula es fácil de verificar en notación moderna con $AB=a$, $BC=ax$, $CD=ax^2$, etc., $AM=a(1-x)$ y $AK=a/(1-x)$.

58 WALLNER, C.R. (1903) "Uber die Enstehung des Grenzbegriffes". *Bibliotheca Mathematica, (3), IV*, 246-259.

59 Dicho de otra forma, AM/AB sólo depende de la razón de la progresión geométrica.

60 En términos modernos, estando dado $a/(1-x)$, así como x, hallar a y a continuación ax, ax^2,......,etc. [*Opus Geometricum*, prop. 90, p. 103-104].

61 *Sint duæ quantitates AB, CD, sitque AB divisa in E et G, ita vt AE, sit non minor dimidio AB, et EG non minor dimidio EB; eodem modo diuisa sit CD in F et H, sintque AE, EG; CF, FH proportionales; et hoc semper fieri possit. Dico totam AB esse ad totam CD, vt est AE ad CF* [*Opus geometricum*, cap. 2, p. 119 y ss.].

62 No es Grégoire de Saint-Vincent quien lo enuncia de esta forma, sino uno de sus discípulos, el padre Alfonso de Sarasa en una obra aparecida dos años después del *Opus Geometricum: Solutio Problematis a R.P. Marino Mersenno minimo propositi...*, I. et I. Meursios, Anvers, 1649. Véase DHOMBRES, Jean (1986) "Quelques aspects de l'histoire des équations fonctionnelles liés à l'évolution du concept de fonction". *Arch. Hist. Exact Sc., 36(2)*, 91-181.

63 Es lo que explica en 1649 Alfonso de Sarasa, alumno de Grégoire de Saint-Vincent, el que realmente escribe si se juzga por los manuscritos preparatorios de la obra.

64 A propósito de estas dificultades, basta con recordar el problema de de Baune al que se enfrentó Descartes. Véase SCRIBA, Ch. (1972) "Uber Auftauchen und Behandlung von Differentialgleichung in 17. Jahrhunndert". *Humanismus und Technik, 15(3)*, 1-40; VUILLEMIN, J. (1960) *Mathématique et métaphysique chez Descartes*. Paris, Vrin, cap. 1.

65 Aqui, nombrando -explícitamente- la cantidad CK (definida por la proporción AE/CF=AB/CK), Grégoire de Saint-Vincent demanda -implícitamente- la cuarta proporcional. No estando especificada la naturaleza de las cantidades, es pues una cuarta proporcional abstracta lo que está funcionando.

66 Aquí, y en toda la demostración, Grégoire de Saint-Vincent hace referencia a los *Elementos* de Euclides. El enunciado de la proposición del libro V de los *Elementos* es el siguiente: *Dadas dos magnitudes desiguales, la mayor tiene con una magnitud dada una razón mayor que la menor, y una magnitud dada tiene con la menor una razón mayor que con la mayor*. La referencia sirve para colocar el punto K antes del punto D si se adopta la imagen de los segmentos o para fijar la desigualdad CD>CK si se toma el lenguaje *universal* de las cantidades. A destacar que Grégoire de Saint-Vincent no adopta en ningún caso las facilidades geométricas del lenguaje de los segmentos. Utiliza el término de cantidad (*Sint duae quantitates*) en lugar del término esperado de magnitud (*duae magnitudines*) .

67 Como en Euclides, hay siempre una dificultad de notación. A falta de una escritura con subíndices de las series, es necesario elegir una letra para fijar las cosas. Ya hemos encontrado este modo de trabajar a propósito de la recurrencia de la proposición 75.

68 Esta proposición 1 del libro X ya ha sido enunciada más arriba, al principio del presente artículo. Para poder usar dicha referencia, Grégoire de Saint-Vincent tiene la necesidad de imponer unas ablaciones que, en cada etapa, sobrepasan la mitad de la cantidad aún disponible. En el fondo, y en términos modernos, sólo tendría necesidad de una convergencia a cero.

69 Al comienzo las divisiones se presentan separadamente para la magnitud AB o para la magnitud CD. La permutación las mezcla ventajosamente: AE/EG=CF/FH implica AE/CF=EG/FH(= GI/HO, etc.) según la proposición 16 del libro V de los *Elementos*. Técnicamente la simple operación de permutación es crucial en la prueba de la proposición 116.

70 Esta expresión (*todos los antecedentes*) indica la suma (finita) de los antecedentes.

71 Hasta aquí, Grégoire de Saint-Vincent mantenía el vocabulario universal de las cantidades. Hace aparecer el termino *línea*.

72 Grégoire de Saint-Vincent a puesto por error la indicación de la proposición 8 de los *Elementos*. Se trata de la proposición 12.

73 La proporción AI/CO=AB/CK es imposible cuando AI<AB y CO>CK. Esto resulta de la proposición 14 del libro V de los *Elementos*: *Si la primera tiene con la segunda la misma razón que la tercera con la cuarta y si la primera es mayor que la tercera, la segunda sera mayor que la cuarta; si la primera es igual a la tercera,*

la segunda será igual a la cuarta; y si la primera es menor que la tercera la segunda será menor que la cuarta.

74 *Sit iam, si fieri potest.*

75 Se podría esperar una demostración muy corta de esta segunda rama de la alternativa. En efecto, para reencontrarse en la situación precedente, basta intercambiar AB y CD, que juegan un papel simétrico, y por lo tanto poder concluir. Se tendría AB/CD≥AE/CF, pero por el mismo efecto CD/AB≥CF/AE y por consiguiente la igualdad buscada AB/CD=AE/CF. Grégoire de Saint-Vincent no procede así, aún cuando Euclides en la proposición 2 del libro XII había dado el ejemplo de una simplificación del método de exhaución gracias al juego sobre la simetría de las figuras. La actitud de Grégoire de Saint-Vincent testimonia una preocupación analítica en nombre de la cual todas las posibilidades deben ser sistemáticamente inventariadas.

76 La proporción AI/CO=AK/CD es imposible cuando AI>AK y CO<CD .

77 *Si enim non est proportio AB ad CD æqualis proportioni AE ad CF, erit vel maior vel minor: sit primo minor... Sit iam, si fieri potest, proportio AB ad CD maior proportione AE ad CF: iraque aliqua minor quàm AD... Quod esse absurdum patet ex elementis...*

78 En esta reconstrucción hemos elegido manipular desigualdades estrictas. El texto de Grégoire de Saint-Vincent es impreciso a este respecto pero la tradición euclidiana, cuando se trata de desigualdades, es tratar separadamente el caso de las igualdades. Grégoire de Saint-Vincent no utiliza apenas la forma euclidiana de señalar una desigualdad con la expresión *retirada del resto.*

79 No figuran explícitamente en Grégoire de Saint-Vincent, incluso bajo la forma retórica que es la única adoptada en este texto, algunas de las desigualdades a respetar en cada etapa para los términos tanto en x como en y: $(x-x_1)>x_2$ e $(y-y_1)>y_2$ o más generalmente, $x-(x_1+....+x_n)>x_{n+1}$, $y-(y_1+....+y_n)>y_{n+1}$. Sin duda aparecen tan evidentes gracias a la representación geométrica por segmentos AB>AE>AB/2; CD>CF>CD/2; EB>EG>EB/2; FD>FH>FD/2. Por lo tanto no podemos decir que la proposición 116 del libro 2 surja enteramente de una visión geométrica en lo tocante a la demostración, aunque lo geométrico juega allí un papel particularmente reducido.

80 A nuestros ojos estas hipótesis restrictivas bajo la forma de desigualdades sirven solamente para asegurar la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} x_n$$

hacia x y de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n$$

hacia y. Sin embargo no podemos generalizar hasta este punto el pensamiento de Grégoire de Saint-Vincent.

81 Sobre las paradojas de Zenon véase CAVEING, H. (1982) *Zénon d'Elée. Prolégomènes aux doctrines du continu. Etude historique et critique des Fragments et Témoignages*. Paris, Vrin. CAJORI, F. (1915) "History of Zeno's arguments on motion". *Amer. Math. Monthly, XXII*, 1-16; 39-47; 109-115; 179-186; 215-220; 253-258; 292-297; RUSSELL, B. *The principles of mathematics*.

82 De nuevo como en la proposición 70, la construcción se efectúa a partir del término final C, lo que denota un razonamiento por síntesis.

83 Es la proposición que suma una serie geométrica

$$2a = \sum_{n=0}^{n=\infty} a/2^n .$$

84 Una duplicación manifiesta sobre la figura adoptada por Grégorie de Sain-Vincent: hay dos líneas de letras a ambos lados del segmento AC.

85 *Opus Geometricum*, pp. 101-103. Este texto termina con las siguientes frases: *Ademas, es necesario responder al argumento según el cual "antes de que Aquiles vaya de A a B, la tortuga ha avanzado de B a F". Que el sentido de esta proposición coincidiría con el que diría que·Aquiles debe determinar el punto B antes de designar el punto F, lo que es contrario a una carrera segun la relación del movimiento. Porque toda asignación de este tipo de cosas tiene una connotación de subsistencia [en la inteligencia], como piensan los Matemáticos, por lo menos según el espíritu; así pues, de un cierto reposo que contradice el movimiento. Pero estas reflexiones destinadas a los Filósofos bastan.*

86 No es útil abordar aquí la interesante crítica que Bergson dirige a tales resoluciones de la paradoja. Notemos bien que Grégoire de Saint-Vincent se ciñe al razonamiento de Zenón tal y como lo refiere Aristóteles en la Física.

87 *Opus Geometricum*, argumento del libro 2, p.51. Ver también TACQIET. A. (1656) *Arithmeticœ theoria et praxis*, pp. 502-503. Para un tratamiento anterior de Aquiles y de la tortuga ver SUISETH, Richard (1477) *Liber calculationem*. Padua.

88 BARROW, I. *Lectiones mathematicae*. Traducción inglesa de KIRKBY, J. (1734) *The usefulness of mathematical learning expained and demonstrated: being Mathematical lectures read in the Publick schools at the University of Cambridge*. London, S. Austin. Reedición CASS, F., 1970.

89 BARROW, I., *The usefulness of matematical...*, op. cit., p. 29.

90 BARROW, I., *The usefulness of matematical...*, op. cit., p. 32.

91 BARROW, I., *The usefulness of matematical...*, op. cit., pp. 32-33.

92 I. Barrow sabe muy bien que lo que profesa se opone a la línea de John Wallis, que había publicado su *Arithmetica infinitorum* en Oxford en 1655. De la misma forma, incluso más virulenta, Thomas Hobbes se oponía a la utilización del álgebra en geometría.

93 BARROW, I., *The usefulness of matematical...*, op. cit. , lecture 3, p. 33.

94 BARROW, I., *The usefulness of matematical...*, op. cit., lecture1, p. 13.

95 Por el contrario, ver BOS, H.J.M. (1981) "On the representation of curves in Descartes' Géométrie". *Arch. Hist. Ex. Sc.*, *24*, 295-338..

96 La suma $a\alpha / (1-x^2)$ se lee de dos formas sobre la figura, como suma de las figuras cuadradas o como suma de los segmentos de rango par.

97 En su *De Centro gravitatis solidorum libri tres*, Bononiæ, 2è édition, 1661; ver "La démonstration par l'analyse infinitésimale chez Luc Valerio". *Ann. Soc. Sc. Bruxelles*, *37*, (1913), 211-228; WHITESIDE, D.T. (1961-62) "Patterns of mathematical thought in the seventeenth century". *Arch. Hist. Ex. Sc.*, *1*, 179-338.

98 Proposición 12 del libro 5, trad. de F. Peyrard, op. cit. vol. 2, p. 262.

99 Véase DHOMBRES, Jean (1978) *Nombre, mesure et continu; épistémologie et histoire.* Paris, Nathan, chap. 1.

100 Propiedad a la que Euclides da otra formulación, nA/A = (nA+nB+nC)/(A+B+C) (proposición 1 del libro V).

101 La proposición 12 del libro V de los *Elementos* es debidamente citada por Grégoire de Saint-Vincent, que insiste sobre su importancia en una correpondencia justificativa con el Padre C. Grienberger del Colegio Romano (carta del 22 de mayo de 1625 por ejemplo).

102 Cuyos diámetros son respectivamente AB, CD, AE, EB, CK y KD.

103 Proposición 12, libro VII, trad. de P. Peyrard, op. cit., vol. 1, p. 408.

104 Proposición 35, libro IX, trad. de P. Peyrard, op. cit., vol. 2, p. 104.

105 VIETA, F. (1593) *Variorum de rebus mathematicis responsorum libri VIII*. Turino; *Opera mathematica*. Leiden, pp. 347-435.

106 BARROW, I., *Lectiones mathematicae*, trad. inglesa, op. cit. p. 32, en nota.

107 De aequationum localium transmutatione et emendatione ad multimodam curvilineorum inter se vel cum rectilineis comparationem, cui annectitur proportionis geometricæ in quadrandis infinitis parabolis et hyperbolis usus. TANNERY, P. & HENRY, C. (Eds.) *Œuvres de Fermat*. Paris, Gauthier-Villars, vol. I, pp. 255-288.

108 Véase TANNERY, P. (1883) "Sur la date des principales découvertes de Fermat". *Bull. Sc. Math. Astr.*, *(2)*, *7*, 116-128; MAHONEY, M.S. (1973) *The mathematical career of Pierre de Fermat (1601-1665)*. Princenton.

109 WALLIS, J. (1656) *Arithmetica infinitorum, sive Nova methodus inquirendi in curvilineorum quadraturam aliaque difficiliora Matheseos Problemata.* Osoni Typis L. Lichtfield, 216 pp. in-4º.

110 FERMAT, P. de (1679) *Varia opera*. S. Fermat (ed.), Toulouse.

111 FERMAT, P. de, *De æqu.*, op. cit.

112 *Œuvres de Fermat*, op. cit. vol. II, p. 338.

113 Una traducción de este texto figura en el tomo III de las obras de Fermat, op. cit., pp. 216-237. No hemos seguido siempre esta traducción demasiado algebraizante.

114 (9) da en particular $(x_1-x_2)/x_2 = x_1/(S-x_1)$.

115 Como lo hace, fastidiosamente, el traductor de las Obras de Fermat. La relación $(x_n-x_{n+1})/x_{n+1}$ se calcula con dos términos sucesivos cualesquiera, retirando el menor, x_{n+1} del mayor x_n. Lo esencial es que esta relación no depende del primer término de la progresión (x_1 desaparece en el cociente). Es en el segundo

miembro $x_1/(S-x_1)$ donde figura explícitamente el primer término. La independencia de $(x_n-x_{n+1})/x_{n+1}$ respecto del primer término es explotable en la medida en que se puede calcular sobre otra progresión geométrica de la misma razón aunque con otro primer término.

116 FERMAT, P. de, *De æquationum*, op. cit., p. 256: *"Todo este método deriva de una sola propiedad bien conocida de la progresión geométrica"*.

117 Fermat indica el caso en el que los exponentes α y β son enteros, pero también el caso $\alpha = 1/n, \beta = 1/m$ (*sed etiam latera simplitia, quorum exponens est unitas*, p. 256). Se puede estimar que él considera todos los números racionales como exponentes α y β. Ahora bien, a propósito de la obra de Grégoire de Saint-Vincent ya hemos subrayado la dificultad conceptual presentada por una exponencial en esta época (exponentes cualesquiera), dificultad que sin embargo no bloquea el cálculo de unos exponentes manipulados como si se tratara de meros racionales. ¡ Al final se impone la generalización... naturalmente!

118 FERMAT, P. de, *De æquationum*, op. cit., p. 255: *Defino hipérbolas de las curvas de especies variando infinitamente..., se tendrá siempre la misma relación entre una potencia determinada de AH y la misma potencia de AG, por una parte, y una potencia de GE (similar o diferente con respecto a la precedente) y la misma potencia de HI por otra.*

119 Elige trabajar primero el caso $\alpha = 2, \beta = 1$. Pero su razonamiento es general para las curvas $AG^{\alpha}.EG^{\beta}$=cte con $\alpha>\beta$ (>0): *Fingatur termini progressionis geometricæ in infinitum extendendi...* .

120 Los puntos I', N' y P' no son nombrados en la figura de la que se sirve Fermat.

121 Este papel es discutido en: DHOMBRES, J. (1991) "L'innovation comme produit captif de la tradition: une théorie des courbes entre Apollonius et Descartes". In: *Actes du colloque Transmission des mathématiques*. (Paris, Septiembre 1991).

122 Torricelli lo había hecho explícitamente antes que él. La investigación de todas las potencias racionales podía proporcionar al final una rica cosecha para el cálculo de áreas ligadas a las curvas algebraicas. Véase BORTOLLOTI, E. (1925) "La memorie, De infinitis hyperbolis di Torricelli". *Archeion, VI*, 45-58, 139-152.

123 FERMAT, P. de, op. cit., p. 258: *Pero las rectas AO, HA, GA que constituyen las razones de los paralelogramos, forman, por construcción, una proporción geométrica.*

124 FERMAT, P. de, *De æquationum*, op. cit., p. 259: *Pero en este caso, la razón del primer paralelogramo al segundo, del segundo al tercero, etc., será como AO a GA, como lo mostrará inmediatamente la composición de razones.*

125 Es el caso de $y^2=ax$ (ecuación cartesiana).

126 Recordemos que ß es el area del paralelogramo AG.GE.

127 Fermat traza efectivamente esta figura, pero cambia completamente las letras en relación a la figura *hiperbólica* precedente. Hemos preferido conservar las mismas letras con el fin de manifestar mejor el paralelismo de los cálculos.

128 Si se retoma el cálculo precedente, se observa que el recurso a la figura sólo es útil cuando se suma AY+GY con el fin de tener efectivamente GY, e incluso

se puede pensar esta suma por el sólo hecho de que la razón q es estrictamente inferior a 1.

129 "Dissertatio: de linearum curvarum cum lineis rectis comparatione". In: *Œuvres de Fermat*, op. cit., vol. I, pp. 217-254.

130 Arquímedes había probado que el área curvilínea AGE vale 4/3 del área del triángulo rectángulo AGE.

131 Opus cit., p. 256: *Se puede extraer fácilmente una regla universal. Es claro, en efecto, que la razón del paralelogramo BD a la figura AICB es siempre igual a la de la suma de los exponentes de las potencias de la ordenada y de la abcisa al exponente de la potencia de la ordenada.*

132 Aunque el traductor de las Obras de Fermat las distingue desafortunadamente.

133 Opus cit., p. 256: *Para las hipérbolas se encuentra también fácilmente una regla universal. En una hipérbola cualquiera la razón del paralelogramo BG a la figura indefinidamente extendida RGED será igual a la razón de la diferencia del exponente de la potencia de la ordenada y del de la potencia de la abcisa al exponente de la potencia de la ordenada.*

134 Lo que le da ocasión para esbozar la razón del éxito de las cuadraturas, a parte del caso de la hipérbola ordinaria: las áreas de los paralelogramos circunscritos forman una serie geométrica, no una serie aritmética.

135 En una carta a Digby, Fermat explicita estas diferencias haciendo aparecer de nuevo una noción geométrica, a saber el centro de gravedad de la porción de superficie considerada.

136 Véase DHOMBRES, Jean (1987) "Les présupposés d'Euler dans l'emploi de la méthode fonctionelle". *Revue d'Histoire des Sciences, 10(2)*, 179-202 o DHOMBRES, Jean (1987) "Euler et la rigueur mathématique". In: *Actes de l'Université d'été*. Toulouse.

137 La suma de las áreas de los paralelogramos, en el caso de una *hipérbola*, si $x^{\alpha}.y^{\beta}=a$ es la ecuación *cartesiana* con $\alpha>\beta>0$, tiende a

$$I = a^{1/\beta}\int_x^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha/\beta}} = \frac{a^{1/\beta}}{\frac{\alpha}{\beta}-1}\,\frac{x}{x^{\alpha/\beta}}$$

Esta integral vale $I=xy/[\alpha-\beta/\beta]$, interpretando xy como el área de un rectángulo. Tenemos precisamente el enunciado de la proposición *universal* de Fermat.

138 (H'_1) es reducido a (H'_2), lo que parece evidente puesto que la longitud GH tiende a 0 cuando q tiende a 1.

139 *Fingantur termini progressionis geometricæ in infinitum extendendi, quorum primus sit AG, secundus AH, tertius AO, etc, in infinitum, et ad sese per approximationem tantum accedant quantum satis sit ut, juxta methodum Archimedeam, parallelogrammum rectilineum sub GE in GH quadrilineo mixto GHIE adæquetur, ut loquitur Diphantus, aut fere æquetur; item, ut priora ex intervallis rectis proportionalium, GH, HO, OM et simila, sint fere inter se æqualia, ut commode per ἀπαγωγὴν εἰς ἀδύνατον, per circumscriptiones et inscriptiones, Archimedea demonstrandi ratio institui possit: quod semel*

monuisse sufficiat, ne artificium quibuslibet geometris jam satis notum inculcare sæpius et iterare cogamur. [Op. cit. p. 257].

140 Ya hemos señalado que A. de Sarasa enuncia la propiedad de los logaritmos a propósito de las áreas bajo la hipérbola, pero casi bajo el dictado de Grégorie de Saint-Vincent.

141 Op. cit., p. 265.