Sobre la aplicación del "Cálculo Estocástico" en las Matemáticas Económico-Financiero-Actuariales

Villalón, Julio G. (garvillalon@gmail.com)
F. de Cc. Económicas y Empresariales
Universidad de Valladolid
Rodríguez Ruíz, Julián (julian21@cee.uned.es)
F. de CC. Económicas y Empresariales
Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED)
Seijas, J. Antonio (jasm@udc.es)
F. de Economía y Empresa
Universidade da Coruña

RESUMEN

Esta ponencia se ha escrito como una referencia al Cálculo Estocástico o Cálculo Itô aplicado al campo económico-financiero-actuarial en dos partes relativas a: Las matemáticas económico financieras y las matemáticas actuariales. Por lo que se refiere a la primera parte, tratamos de dar una presentación moderna de algunos modelos usados en la "Financiera Estocástica" comenzando con el fundamental desarrollo de Black-Scholes y Merton a comienzos de 1970. Con relación a la Ciencia Actuarial, diremos que mostró rudimentos del "cálculo estocástico" hace más de un siglo con las ecuaciones diferenciales para las reservas de una póliza de seguros obtenidas por Thiele en 1875 y para la probabilidad de ruina de una empresa de seguros, Lundberg en 1903, cuando la noción de "procesos estocásticos" aún no se había establecido de forma precisa.

Palabras clave: Procesos estocásticos; Movimiento Browniano; Modelo de Scholes-Merton; Cálculo Itô; Curva de Rendimiento.
Área temática: A-2. Matemáticas Financieras y Cálculo Estocástico para la Matemática Actuarial y Finanzas.

ABSTRACT

The attached paper has been written in reference to “stochastic calculus” or “Itô Calculus” applied to the actuarial finance economics relative to two separate sides. The first is focused on financial mathematics in economics and we attempt to present a modern look at some of the models use in “stochastic finance” starting with key principles of Black-Scholes and Merton in the early 70’s.

In reference to Actuarial Science o age-continuous actuarial mathematics, we see early signs in the “stochastic calculus” over a century ago in those differential equations developed for the mathematical reserve of an insurance annuity, first proposed by Thiele in 1875 and later on for risk or ruin theory for insurance companies proposed by Lundberg in 1903 when stochastic theory had not even been formalized as such.

1. INTRODUCCIÓN

Las matemáticas económico financieras han sido un campo joven de aplicaciones de las matemáticas y la estadística que ha experimentado un inmenso crecimiento durante los últimos 50 años. Por ahora, se considera como uno de los campos más cambiantes de las matemáticas y de la estadística aplicadas, por la diversidad de cuestiones que se han venido planteando y las altas cualificaciones técnicas que requieren.

Por nuestra parte, hacemos una referencia a la "Matemática Estocástica" considerando la teoría básica de Black-Scholes- Merton desde un enfoque martingala moderno. Esto requiere un desarrollo de los instrumentos necesarios del "Cálculo Estocásticoz sus conexiones con las ecuaciones diferenciales.

La modelación de los mercados financieros mediante los procesos estocásticos en tiempo continuo la inició Louis Bachelier (1900) en su tesis doctoral bajo la supervisión del insigne profesor francés Henri Poincaré. Ahora bien, el trabajo de Bachelier no fue reconocido hasta recientemente. Sesenta años más tarde, el célebre economista Paul Samuelson (Premio Nobel de Economía en 1970) volvió a estar de moda tal idea, surgiendo el movimiento Browniano con tendencia constante como modelo asociado a los precios de los títulos. Ahora bien, el éxito real del movimiento Browniano en las aplicaciones financieras, lo lograron Fisher Black, Myron Scholes y Robert Merton (premios nobeles en economía en 1997), quienes crearon entre 1969 y 1973 la Teoría Moderna de la Matemática Financiera, introduciendo la Teoría de la Cartera y los fundamentos de la valoración no-arbitraje. Desde entonces, esta teoría logró un gran rigor y precisión gracias a la teoría de las martingalas desarrollada en los ochenta.

Por lo que se refiere a la Ciencia Actuarial, diremos que mostró rudimentos el cálculo estocástico hace más de cien años. Las ecuaciones diferenciales para las reservas de una póliza del seguro de vida las obtuvo Thiele en 1875 (Hansen, 1949) y para la probabilidad de ruina eventual de una empresa de seguros Lundberg en 1903 (Cramer, 1969), cuando la noción de procesos estocásticos aún no se había establecido de forma precisa. La teoría del cálculo estocástico desarrollada principalmente durante la mitad del siglo pasado, estableció el tema para el tratamiento unificado de una amplia clase de problemas realacionados con la predicción del desarrollo futuro de un tratado de seguros sobre la base de su historia pasada. Las variaciones adecuadas del teorema muestral opcional de Doob y la regla de la cadena para las semimartingalas (generalizada por Itô), junto con la descomposición de Doob-Mayer y algunas otros aspectos básicos de la teoría de martingalas diferenciales, o ecuaciones integro-diferenciales para las distribuciones de probabilidad y momento de valores actuariales, la probabilidad de ruina y otras funciones de interés práctico. El enfoque opera con modelos suficientemente elaborados para representar realidades complejas adaptándose tanto a riesgos de responsabilidad como a activos con riesgo. Su potencial se demostró mediante ejemplos en el seguro de vida, seguro no-vida, teoría del riesgo actuarial y economía financiera. La revolución siendo que los actuarios de todas las clases primera, segunda y tercera (vida, no-vida y financiera) se unieron para la creación del "Cálculo Estocástico", eliminándose la frontera entre ellos.

En esta parte del trabajo presentamos algunos resultados básicos relativos al cálculo estocástico también llamado Cálculo de Itô, uno de los principales instrumentos más usado en las matemáticas económico financiero acutariales para construir los modelos más utilizados.

A continuación, consideramos algunas aplicaciones básicas sobre inversiones en obligaciones y tantos de interés.

2. LAS INVERSIONES EN OBLIGACIONES

2.1. Introducción

Una obligación de valor nominal P con cupones de valor C y fecha de vencimiento $s+S$, da el derecho al inversor que compra esta obligación en el momento s, a recibir el cupón de valor C en los momentos $\{s+1, s+2, ..., s+S\}$ y el valor nominal P en el momento $s+S$.

Se deduce que los cashflows sucesivos de esta inversión vienen dados por:

- - en los momentos: $s, s+l, ..., st+S-l$: el cupón de valor C.
- - en el momento $s+S$: la cantidad $P+C$.

Si $A(t,T), (s \leq t \leq s+S)$ representa en el momento t el valor de la obligación emitida en el momento $t+T$, el problema principal será calcular su valor equitativo en orden a comparar éste con el valor de mercado, propuesto en el momento t.

Una "obligación cero", inversión hecha en el momento s y de vencimiento $s+S$ es una inversión muy simple por la que se paga la suma $P(s,S)$ en el momento s en orden a recibir 1 euro en la fecha del vencimiento $s+S$.

Por tanto, podemos calcular el valor de la obligación anterior $A(t,T)$ mediante la fórmula:

$$A(t,T) = P(t,1)C + P(t,2)C + ... + P(t,T-1)C + P(t,T)(P+C) \qquad (1)$$

2.2. Curva de Rendimiento

Teniendo en cuenta que el tanto de interés para un depósito en el momento t depende no solamente del momento t sino también del vencimiento T, por lo que, el tanto anual se puede escribir como $i(t,T)$.

Para un momento t fijo, la representación de la función $T \to P(t,T)$ es la curva de rendimiento en el momento t dado un vencimiento T y, generalmente, tiene la forma de la figura 1.

Figura 1: Curva de Rendimiento.

Dada esta curva, obtenemos el valor siguiente para la obligación-cero.

$$P(t,T) = (1 + i(t,T))^{-T} \tag{2}$$

y utilizando la (1) para diferentes obligaciones en diferentes momentos de vencimiento, podemos calcular los valores de las obligaciones cero de acuerdo a los valores de mercado de las obligaciones observadas.

Ejemplo 1 Consideremos el caso de $T = 2$ y supongamos que tenemos 2 obligaciones, la primera con un cupón del $5,2\,\%$ con valor nominal 100 y con 1 como vencimiento. La segunda con un cupón del $5,6\,\%$ con 100 como valor nominal y con 2 como vencimiento. Los valores de mercado de estas obligaciones en el momento t son respectivamente 100 y 102. Usando la fórmula (1) dos veces, obtenemos:

$$100 = P(t,1)(5,2 + 100)$$
$$120 = P(t,1)(5,6) + P(t,2)(5,6 + 100)$$

De la primera ecuación obtenemos $P(t,1)$.

$$P(t,1) = \frac{100}{105,2} = 0,950570 \tag{3}$$

y de la segunda ecuación el valor de $P(t,2)$

$$P(t,2) = \frac{102 - 0,950570 * 5,6}{105,6} = 0,915228 \tag{4}$$

Por consiguiente, los tantos de rendimiento para 1 y 2 años vienen dados por

$$i(t,1) = (0,950570)^{-1} - 1 = 5,2\,\% \tag{5}$$

$$i(t,2) = (0,915228)^{-1/2} - 1 = 4,53\,\% \tag{6}$$

En este ejemplo, hay un fenómeno de "inversión de la curva de rendimiento", cuando el rendimiento al vencimiento de dos años es menor que el rendimiento para un vencimiento de un año.

Por supuesto, en la práctica, este método necesita un mercado de obligaciones bastante líquido para tener los datos disponibles en todos los vencimientos y, además un tratamiento estadístico con el método de los mínimos cuadrados que se puede usar para mejorar el método.

2.3. Rendimiento al vencimiento de una inversión financiera y de una obligación

Consideremos una inversión de valor actual C que genera la siguiente corriente financiera:

$$F = \{(F_j, t_j), j = 1, ..., n\} \tag{7}$$

El rendimiento al vencimiento, es el tanto actualizado constante o el tanto actuarial, $i(F)$ solución de la ecuación polinomial:

$$C = \sum_{j=1}^{n} (1 + i(F))^{-t_j} F_j \tag{8}$$

utilizando la interpolación de Newton con el tanto nominal o cupón como valor inicial se obtiene fácilmente la solución.

Para el caso particular de una obligación de "precio de suscripción A" en el momento t y vencimiento $t+T$, con el "valor del cupón C" y "valor nominal P", la corriente financiera correspondiente viene dada por:

- - en los momentos: $t+1, ..., t+T-1$: pago del cupón C.
- - en el momento $t+T$: pago del cupón C y del valor nominal.

La ecuación (1) o bien la (8) se convierte en:

$$A(t,T) = (1+i(F))^{-1}C+(1+i(F))^{-2}C+...+(1+i(F))^{-(t+T-1)}C+(1+i(F))^{-(t+T)}(C+P) \tag{9}$$

evidentemente el rendimiento al vencimiento $i(F)$ también es una función de t y T.

3. MODELO TIEMPO CONTINUO DETERMINISTA DINÁMICO PARA EL TANTO DE INTERÉS INSTANTÁNEO

3.1. Tanto de interés instantáneo

Recordamos brevemente algunos conceptos básicos usando un modelo tiempo discreto para las corrientes financieras y los tantos de interés.

Ahora, usaremos el modelo tiempo continuo determinista tradicional (MTCD) para un inversión en $[t+, t+T]$ de montante $C(t)$ en el momento t que produce un rendimiento continuo del tanto $r(s:t,T)$ en el momento s.

Por tanto, vemos que este tanto depende de t y T sobre el pequeño intervalo temporal $[s, s+\Delta s] \subset [t, t+T]$, una unidad monetaria en el momento t produce al final del intervalo un rendimiento de valor $r(s;t,T)\Delta s$. Este tanto llamado "tanto instantáneo tiempo continuo" o simplemente "tanto instantáneo" para una inversión en el momento t y vencimiento $t+T$.

Si $C(s)$ es la capitalización de $C(t)$ en el momento $s, s > t$. De la definición del tanto instantáneo se deduce que:

$$C(s + \Delta s) = C(s) + r(s; t, T)C(s)\Delta s \tag{10}$$

De donde obtenemos

$$\frac{C'(s)}{C(s)} = r(s; t, T) \tag{11}$$

e integrando

$$C(s) = C(t)e^{\int_t^{t+s} r(u;t,T)du} \tag{12}$$

En particular, en el vencimiento obtenemos

$$C(t + T) = C(t)e^{\int_t^{t+T} r(u;t,T)du} \tag{13}$$

3.2. Casos particulares

Cuando r es una función de tres variables, procede distinguir los cuatro casos siguientes:

a) Estacionario en el tiempo: r no depende de t: $r(s; t, T) = r(s, T)$.

b) Estacionario en el vencimiento: r no depende de T : $r(s; t, T) = r(s; t)$.

c) Estacionario en el tiempo y vencimiento: r no depende de t y T: $r(s; t, T) = r(s)$.

d) Caso constante: r es independiente de las tres variables consideradas: $r(s; t, T) = \delta$.

Para el caso d), obtenemos el caso conocido: $C(t) = C(0)e^{\delta T}$.

3.3. Curva de rendimiento asociada al tanto de interés instantáneo

Teniendo en cuenta la sección anterior, sabemos que para una inversión unitaria en el momento t y vencimiento $t+T$, el valor capitalizado al vencimiento viene dado por

$$e^{\int_t^{t+T} r(u,j,T)du} \tag{14}$$

Usando la "curva de rendimiento" $T \to i(t,T), T \geq 0$, para un t fijado, correspondiendo a esta inversión para la que $i(t,T)$ representa el correspondiente tanto de interés anual en $[t, t+T]$ obtenemos los mismos valores de capitalización que en la (14), obtenemos:

$$(1 + i(t,T))^T = e^{\int_t^{t+T} r(u,j,T)du} \tag{15}$$

y por tanto:

$$i(t,T) = e^{\frac{1}{T}\int_t^{t+T} r(u,t,T)du} - 1 \tag{16}$$

El tanto instantáneo constante $\delta(t,T)$ en $[t, t+T]$ correspondiente a esta curva se define como sigue:

$$e^{\int_t^{t+T} \delta(t,T)du} = e^{\int_t^{t+T} r(u,t,T)du}$$

o bien,

$$e^{\delta(t,T)T} = e^{\int_t^{t+T} r(u,t,T)du} \tag{17}$$

es decir,

$$\delta(t,T) = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} r(u,t,T)du \tag{18}$$

3.4. Ejemplos de modelos teóricos

1. <u>El caso constante</u>.

Para $r(s;t,T) = \delta$, la relación (17) da para la curva de rendimiento del caso tradicional de la financiera determinista:

$$i(t,T) = e^{\frac{1}{T}\int_t^{t+T} \delta du} - 1 \tag{19}$$

o bien,

$$i(t,T) = e^{\delta} - 1, \tag{20}$$

donde $\delta = \log(1+i)$.

2. El modelo determinista de Ornstein-Uhlenbeck-Vasicek (1973). (Janssen y Janssen, 1996).

Partiendo de la siguiente relación:

$$r(t+\Delta t) - r(t) = a(b - r(t))\Delta t, \ \Delta t > 0, t \geq 0 \tag{21}$$

obtenemos cuando $\Delta t \to 0$, la siguiente ecuación diferencial:

$$dr(t) = a(b - r(t))dt \tag{22}$$

para la que la solución general es

$$r(t) = b - Ke^{-at} \tag{23}$$

con la condición inicial: $r(0) = r_0$, donde r_0 es el tanto instantáneo observado o "tanto spot" observado en $t = 0$, la constante K se puede calcular para obtener la siguiente solución única:

$$r(t) = b + (r_0 - b)e^{-at} \tag{24}$$

o bien,

$$r(t) = r_0 e^{-at} + b(1 - e^{-at}) \tag{25}$$

Por tanto, la función r es una combinación lineal convexa de r_0 y el parámetro b.

Para obtener el significado económico-financiero de este parámetro, basta hacer que $t \to \infty$ para ver que:

$$b = \lim_{t\to\infty} r(t) \tag{26}$$

que es el valor actualizado del tanto instantáneo a largo plazo.

Para ver que representa el otro parámetro, obtenemos de la relación (24)

$$r'(t) = -ae^{-at}(r_0 - b) \tag{27}$$

y por tanto el signo de la función derivada de r es el de aquel a si $r_0 < b$ ó el de $-a$ si $r_0 > b$ y además

$$r'(0) = -a(r_0 - b) \tag{28}$$

En conclusión, si $r_0 < b$, la función r es estrictamente creciente, partiendo de r_0 en $t = 0$ y tendiendo hacia b para t grande; por otra parte, si $r_0 > b$, la función r es estrictamente decreciente partiendo de r_0 en $t = 0$ y tendiendo hacia b para t grande.

En los dos casos el valor absoluto de la pendiente en $t = 0$ es una función creciente de a; esto significa que la convergencia es más rápida par valores grandes de a que para valores pequeños. Esto es debido a que el parámetro a frecuentemente se llama "parámetro de convergencia".

El caso frontera $r_0 = b$, es el caso muy especial de una curva de rendimiento independiente del vencimiento.

Para obtener la curva de rendimiento correspondiente al tanto instantáneo dado por la relación (24), basta sustituir el valor de r en la relación (16); este cálculo da el resultado siguiente

$$i(0, T) = e^{b + \frac{b - r_0}{bT}(e^{-aT} - 1)} - 1 \tag{29}$$

Más generalmente, partiendo de t con r_0 como tanto inicial, esta última fórmula se convierte en:

$$i(t, T) = e^{b + \frac{b - r_0}{bT}(e^{-aT} - 1)} - 1 \tag{30}$$

Por tanto, vemos que tenemos un "modelo estacionario" cuando sobre $[t, t + T]$ no hay influencia del tiempo t.

3.5. Modelo dinámico en tiempo continuo estocástico para el tanto de interés instantáneo

En financiera, sabemos que los valores futuros de los tantos son inciertos ya que hay una gran influencia de muchos parámetros financieros y económicos, que también dependen de factores políticos.

Se deduce que los modelos deterministas son insatisfactorios y, por tanto, la nueva disciplina de financiera matemática llamada "Financiera Estocástica", nacida a raíz de los resultados de Samuelson (1965), Black, Scholes, Merton (1973).

A continuación, presentamos uno de los tres modelos estocásticos más usado en la práctica: el modelo Heath, Jarrow, Merton (HJM). Los otros dos modelos, Ornstein- Uhlenbeck- Vasicek (OUV) y el Cox, Ingerssol y Ross (CIR), están ligados al tanto instantáneo o "spot rate", mientras que el analizado parte de la curva de rendimiento en el momento 0 para modelar esta curva de rendimiento entero en el momento t.

3.6. El modelo HJM (Heath, Jarrow, Merton) (1992)

En este modelo los autores tratan de modelar "la curva de rendimiento entera" comenzando desde el momento actual cero la curva de rendimiento entera dada.

Su resultado general es teórico y proporciona dos modelos particulares conocidos como: el modelo de "Ho y Lee"; y el modelo de Vasicek generalizado.

3.6.1. Los tantos a plazo

Sean $f(t, s)$, $(t < s)$ el tanto a plazo instantáneo en el momento t que será asignado al momento s. Esto significa que en el intervalo futuro $(s, s + \Delta s)$, el rendimiento asignado será aproximadamente $f(t, s)ds$.

Según nuestra hipótesis (AOA) Ausencia de arbitraje, la inversión de 1 unidad monetaria en $[0,s]$ debe producir el mismo rendimiento que una inversión de 1 unidad monetaria en $[0,t]$ seguida de la inversión del valor capitalizado en el momento t en el intervalo $[t,s]$, de modo que debemos tener la relación siguiente:

$$e^{\int_0^t r(u)du} \times e^{\int_t^s f(t,u)du} = e^{\int_0^s r(u)du} \tag{31}$$

o bien

$$e^{\int_t^s f(t,u)du} = e^{\int_t^s r(u)du} = \frac{1}{P(t,s)} \tag{32}$$

donde $P(t,s)$ es el valor de un cupón cero en el momento t de vencimiento s años y r la función del tanto instantáneo.

Esta última relación es equivalente a:

$$e^{\int_t^s f(t,u)du} = -\log P(t,s) \tag{33}$$

o bien, derivando

$$f(t,s) = -\frac{\partial \log P}{\partial s}(t,s) \tag{34}$$

La relación anterior, también da el "valor a plazo de una cupón cero" como es usual sin riesgo de pago, calculado en $t=0$

$$P(t,T) = e^{-\int_t^T f(t,u)du} \tag{35}$$

El tanto instantáneo $r(t)$ viene dado por

$$r(t) = \lim_{T\to t} f(t,T) = f(t,t) \tag{36}$$

suponiendo que la función f es continua.

Recordando los lazos siguientes con la curva de rendimiento $i, i(t,s)$ siendo el tanto de interés anual equivalente para una inversión de 1 unidad monetaria decidida en t hasta s

$$(1+i(t,s))^{-(t-s)} = P(t,s) \tag{37}$$

De la relación (33), obtenemos:

$$f(t,s) = -\frac{\partial}{\partial s}\log(1+i(t,s))^{-(t-s)} = (t-s)\log(1+i(t,s)). \tag{38}$$

3.6.2. La metodología del HJM

La idea principal de los autores fue construir un "modelo estocástico" para la curva del tanto instantáneo en el momento t, $f(0,T), T \geq 0$ dada en el momento 0 y la curva del tanto instantáneo a plazo observable $f(0,T),\ T \geq 0$.

De la sección precedente tenemos (33) y (34). Suponiendo que la dinámica estocástica del cupón cero está regida por la siguiente ecuación diferencial estocástica (EDE)

$$dP(t,T) = \mu(t,T)P(t,T)dt + \sigma(t,T)P(t,T)dB(t) \tag{39}$$

siendo B un movimiento Browniano típico en el espacio de probabilidad filtrado completo considerado. De la fórmula de Itô obtenemos

$$df(t,T) = \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\sigma^2(t,T)}{2} - \mu(t,T)\right)dt - \frac{\partial}{\partial T}(\sigma(t,T)dBt) \tag{40}$$

relación que representa la EDE para la dinámica estocástica del proceso $f(t,T), T > t$.

4. CONCLUSIONES

El desarrollo de los mercados relacionados con los productos derivados en 1970 y 1980 así como la crisis, contribuyeron ampliamente al florecimiento y desarrollo de varias ramas de las matemáticas aplicadas y, en primer lugar, el de la Matemática Financiera Actuarial, Teoría de la probabilidad y el Cálculo Estocástico. En este aspecto, el hecho más impresionante fue la rápida tendencia del movimiento Browniano, la Fórmula de Itô y las ecuaciones diferenciales estocásticas en las Facultades de Economía y de la Empresa. Otra especialidad importante está relacionada con la naturaleza de los nuevos mercados financieros, actividad humana que evolucionó constantemente y está en constante mutación respecto a la modelación central y a la volatilidad.

Las matemáticas y la estadística, ávidas de resolver problemas, pueden encontrar temas interesantes ya que todo análisis financiero es ambicioso de obtener soluciones. Sin embargo, ambos grupos pueden enfrentarse con ciertas desilusiones ya que el matemático estará interesado en obtener soluciones rigurosas y exhaustivas del problema planteado, para el analista financiero preferirá la interpretación de los modelos y sus parámetros con el fin de obtener una representación neutral del universo de posibles decisiones y, sobre todo, de fácil ejecución.

El campo donde ha habido más intensa relación recíproca con la Financiero-Actuarial ha sido con la Teoría de la Probabilidad, el Cálculo Estocástico y el Movimiento Browniano, particularmente con la emergencia de las opciones exóticas.

Finalmente, diremos que es deseable ser capaces de transmitir a los estudiantes las nociones básicas y metodológicas usadas en los modelos económico financiero actuariales inherentes en los modelos tiempo discreto y continuo, donde fundamentalmente se ha impuesto el uso del "Cálculo Estocástico".

5. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ARROW, K., HILDEBRANDT, W. INTRILLIGATOR, D. y SONNENSCHEIN, M. (eds) (1991). Handbook of Mathematical Economics. Elsevier Science Publishers.

- BACHELIER, L. (1900). Théorie de la spéculation. Gauthier-Villars.

- BAYER, H. (2001). Measure and Integration Theory. De Gruyter.

- BENSOUSSAN, A. (1984). On the theory of option pricing. Acta Aplicadae Mathematica. Springer.

- BLACK, F. y SCHOLES, M. (1973). "The pricing of options and corporate liabilities". Journal of Political Economy, 81, pp. 637–654.

- BORCH, K. (1962). "Equilibrium in a Reinsurance Market". Econometrica, 30 (3), pp. 424–444.

- CHUG, K. L. y WILLIAMS, R. (1990). Introduction to stochastic integration. Brikhauser.

- COX, J., ROSS, S. y RUBINSTEIN, N. (1979). "Option Pricing: a simplified approach". Journal of Financial Economics, 7, pp. 229–263.

- CRAMER, H. (1969). "Historical review of Filip Lundberg's works on risk theory". Scandinavian Actuarial Journal, Supplement 3, pp. 6–12.

- DANA, R. A. (2002). Stochastic dominance, individual decision making and equilibrium asset pricing. Université Paris-Dauphine.

- DANA, R. A. (2005). "A representation result for concave Schur concave functions". Mathematical Finance, 15, pp. 613–634.

- DELBAEN, F. y SCHACHERMEYER, W. (1994). "A general version of the fundamental theorem of asset pricing". Mathematische Annalen, 300(1), pp. 463–520.

- DELBAEN, F. y SCHACHERMEYER, W. (1998). "The fundamental theorem of asset pricing for unbounded stochastic processes". Mathematische Annalen, 312(2), pp. 215–250.

- DENNEBERG, D. (1990). "Distorted probabilities and insurance premiums". Methods of Operations Research, 63, pp. 3–5.

- DUFFIE, D. (1996). Dynamic Asset Pricing Theory. 2Nd Ed. Princenton. NJ.

- ELLIOT, R. y KOPP, P. (1999). Mathematics of Financial Markets. Springer

- FÖLLMER, H. (1981). "Calculo d'Itô sans probabilité". Seminaire de Probabilité XV. Springer Lecture Notes 850. pp. 143–150.
- FÖLLMER, H. (1998). "Vom Leibniz-Kalkül zur stochastischen Analysis: Reines und Angewandtes aus der Mathematik zufälliger Schwankungen". Leopoldina (R.3), 43, pp. 249-257.
- FÖLLMER, H. y SONDERMANN, D. (1986). "Hedging of nonredundant contingent claims". Contributions to Mathematical Economics (W. Hildenbrand and A. Mas-Colell, eds.), pp. 205–223.
- GERBER H. U. (1979). An introduction to mathematical risk theory (No. 8). SS Huebner Foundation for Insurance Education, Wharton School, University of Pennsylvania.
- HULL, I. (2002). "Options, futures and other derivatives". 6th Edition. Prentice-Hall. London.
- KARATZAS, I. (1988). "On the pricing of American options". Applied mathematics & optimization, 17(1), pp. 37–60.
- KARATZAS, I. y SHREVE, S. (1998). Methods of Mathematical Finance. Springer.
- LAMBERTON, D. y LAPEYRE, B. (1995). Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance. Chapman & Hall. London
- MERTON, R. (1973). "Theory of rational option pricing". Bell Journal of Economics Managament Science. 4. pp. 141–183.
- MØLLER, C. M. (1995). "Stochastic differential equations for ruin probabilities". Journal of Applied Probability, 32(1), pp. 74–89.

- NORBERG, R. (1995). "A time-continuous markov chain interest model with application to consumer". Applied Stochastic Models and Data Analysis, 11(3), pp. 245–256.
- NORBERG, R. (1999). "Ruin problems with assets and liabilities of diffusion type". Stochastic Processes and Their Applications, 81(2), 255-269.
- PLISKA, S.R. (1997). Introduction to Mathematical Finance. Discrete Time Models. Blackwell.
- VON NEUMANN, J. y MORGENSTEIN, O. (1947). Theory of Games and Economic Behavior. Princeton.