LLULL, vol. 14, 1991, 551-560

DE LOS FUNDAMENTOS A LA PRACTICA MATEMATICA. RAZONES DE UN CAMBIO SUSTANCIAL EN FILOSOFIA DE LA MATEMATICA

MARIO H. OTERO
Universidad de la República
Montevideo, Uruguay

RESUMEN

El agotamiento de la temática de fundamentos en filosofía de las matemáticas ha conllevado una crítica aguda y fundada del apriorismo que constituyó el supuesto principal, invariable e inexpresado muchas veces, del enfoque fundacional. Este trabajo pauta ese proceso. Por otra parte, una atención creciente a la práctica matemática mostró hasta qué punto los tres grandes del tema de fundamentos (logicismo, formalismo, intuicionismo) y aún ciertos enfoques más recientes de la misma, construyeron una visión en gran medida imaginaria de la práctica matemática. Además, ya desde Frege, hasta hoy, el análisis de la práctica deductiva es acompañado por el estudio de la importación, *por las teorías, de instancias no deductivas.*

ABSTRACT

The exhaustion of foundations thinking in philosophy of mathematics has also brought about an acute and founded criticism of apriorism which was the main and constant, often unexpressed, presupposition of foundational outlook. This paper tries to establish the stages of this process. An increasing attention to mathematical practice showed the measure in which the three famous schools (logicism, formalism, intuitionism) and even some recent positions, built up an imaginary outlook of mathematical practice. From Frege to this day the analysis of deductive practice is accompanied by the study of the importation *into the theories of non deductive steps.*

Recibido el 1 de marzo de 1991

Este trabajo formula algunas hipótesis acerca de la posible salida de esa situación de la filosofía de las matemáticas (exclusivamente dedicada al tema de los fundamentos), sin mordiente con referencia a la práctica de los matemáticos, hacia un enfoque más fértil que, además, tome en cuenta la historicidad de las matemáticas como producción social.

This paper presents some hypotheses concerning how to abandon the referred situation in philosophy of mathematics (bounded to foundatios thinking), which fails to capture the practice of mathematicians, towards a more fertile outlook taking into account the historicity of mathematics as a social production.

Palabras clave: Filosofía de las Matemáticas (Historia), Fundamentos, Práctica matemática, Aprioridad, Instancias no deductivas, Naturalismo.

1. Mehlberg, en un conocido artículo[1] sobre el estado de la filosofía de la matemática en 1960, se refiere a otros dos momentos significativos en el desarrollo que tuvo lugar en Königsberg en 1930 y el Congreso de Stanford de Lógica, Metodología y Filosofía de la Ciencia de 1960. Para completar la serie de múltiplos de 30 deberíamos agregar los archifamosos Congresos de Filosofía y de Matemáticas que tuvieron lugar hacia 1900 y nuestro 1990[2] en que la filosofía de la matemática ha tomado decididamente un giro distinto a la tendencia, no sólo dominante en todo el período anterior, sino también excluyente, focalizada en el problema de los fundamentos.

Se debería recordar a propósito que:

1. Russell en 1901, Gödel en 1931, Cohen en 1964, llegan, poquísimo después de cada una de aquellas tan redondas fechas, a descubrimientos decisivos para la suerte de ambiciosos proyectos en el campo que nos ocupa.

2. Lo programas de investigación incluidos en logicismo, formalismo e intuicionismo (LFI) fueron extremadamente fértiles en resultados dentro de la matemática misma, creando e incentivando la producción de ésta en temas tales como teoría de la demostración, teoría de las funciones recursivas, nociones de realizabilidad, interpretaciones funcionales, entre otros, que llegaron sea a constituirse en disciplinas especializadas muy dinámicas, sea a interactuar con ramas más clásicas y en todo caso preexistentes, sea a generar métodos de búsqueda extremadamente activos (el forcing, los métodos metamatemáticos que condujeron al análisis no-estándar).

3. De todos modos, los programas de investigación de la filosofía de la matemática fueron absorbiendo dificultosamente diferentes crisis, desfibrándose, adaptándose a escollos nada triviales, hasta llegarse a una situación de la que el artículo de Mehlberg es eficaz testigo. Cada uno de ellos se fue metiendo en callejones de difícil salida y los cultivadores o espectadores se vieron en un laberinto, y además sin hilos de Ariadna (u otros) intactos. Esta situación en los temas de fundamentos fueron acompañados por cambios en la propia matemática y en la manera en que los matemáticos comenzaron a percibir su disciplina.

¿Qué cambió y por qué?

No vamos a hacer otra cosa que considerar algunas hipótesis al respecto porque el cambio es todavía demasiado reciente para algo así como constataciones de mayor alcance.

2. Junto a la vitalidad inicial que dichos programas de investigación de raíz fundacionalista tuvieron en matemáticas se dio, además de los obstáculos indicados, un progresivo agotamiento del objetivo inicial de los *tres grandes* (LFI). Y estaba escrito que se hizo cada vez más necesario extraer las consecuencias de tan enojosa situación.

Entre 1962 y 1967 Lakatos (en un libro y tres artículos bien conocidos)[3] y Putnam (por lo menos en *Mathematics without foundations*)[4] lo hicieron, respectivamente, con desenfado o con timidez (son las propias palabras de Putman).

La crítica de Lakatos al euclidismo, su propuesta del carácter cuasiempírico de las teorías matemáticas y su búsqueda de falsificadores potenciales (evaluados diversamente por los comentaristas), de todos modos significaron una nueva manera de ver las cosas. Cuando poco antes resultaba impensable en este campo siquiera una alusión a Mill -excomulgado tras el triunfo total de un apriorismo del cual Frege y Husserl fueron apenas los representantes más divulgados pero enormemente eficaces-, cuando era rechazada toda referencia a Mill, por tímida que fuese, Lakatos (1967) se dio el lujo de citar una pléyade entre los nombres más relevantes en filosofía de la matemática y en matemática, como compañeros de ruta. La idea era *no Mill pero...*, que aparecería como *leit motiv.* Quizás Lakatos fue el que dijo más redondamente las cosas; vaya si lo hizo....

Putnam en el artículo referido no cree que la matemática tenga ni necesite fundamentos, afirma que los tres grandes (LFI) no necesitan ser tomados en serio, desarrolla una serie de argumentos del mayor interés -entre los cuales se cuenta el de su versión modal de las matemáticas, sin objetos-, considera que la matemática se hace *empírica* en el sentido de que está permitido plantear alternativas en ella, y considera que el tratamiento fundacional en matemática es tan sospechoso como la concepción fundacionalista del conocimiento empírico, llegando a decir casi que es insostenible la distinción matemático-empírico.

3. Mientras esto acontecía en filosofía de las matemáticas, en la matemática misma el modelo de Bourbaki se hizo aparentemente dominante. Como decía retrospectivamente Dieudonné[5] resultaba que se encontraron más resultados y más métodos nuevos desde 1940 en adelante que los que se habían encontrado desde Tales hasta 1940. Sea o no esto una exageración, supongamos que sea aproximadamente así. Se trata de una explosión demográfica notable. Hacia 1979 aparecían en las publicaciones matemáticas unos 200.000 nuevos resultados por año (De Millo et al.[6]). Son datos significativos (fabulosos) pero que plantean un conjunto de problemas graves.

Es con cierto cinismo que Dieudonné mismo habla de este incontenible flujo (diríamos nosotros, digno de aprendices de brujo). Y se remite al conocido dictum de Jacobi según el cual Fourier estaba equivocado en sostener que el objetivo principal de las matemáticas era la utilidad pública y la explicación de los fenómenos naturales, para sostener que el fin único de la ciencia es el honor del espíritu humano. En 1987 Dieudonné publica un libro[7] con este nombre.

3.1. Parece con todo dudoso que ese tremendo flujo esté destinado sólo a exaltar ese honor. La producción de conocimiento está sujeta a otras leyes y a otras explicaciones que esa aparentemente tan etérea y además somera. Por otra parte se puede dudar también que un crecimiento presuntamente no controlado sea otra cosa que canceroso. Y todo hacía pensar que, sobre aquella tan magra base, sería incontrolado. Por otra parte el financiamiento de la investigación es un recurso escaso, por más que involucrara en este caso sólo sueldos, papel y lápices, pizarrones y tizas y poco más (si excluimos por el momento a las computadoras). ¿Se trataba sólo de inversiones de prestigio?

3.2. Además es claro que un director de investigación, en cualquier departamento de Matemáticas a lo ancho del mundo, da indicaciones destinadas a que quienes trabajan con él no se pierdan en el laberinto y puedan enterarse *creativamente* de lo que se publica día a día; por más que esté ayudado normalmente en su tarea por los editores de las publicaciones, que seleccionan tupido, debe jugar con criterios acerca de importancia, de significación (de no trivialidad, de profundidad) de los resultados a su juicio. Y un concepto tan importante como el de importancia y su uso (o de los alternativos indicados) se cuentan entre las cosas peor analizadas. Es cierto que, por un lado, cada especialista no tiene que manejar la información de toda la matemática sino de alguna o algunas ramas especializadas pero, por otro, es bien conocida la fertilidad que en matemáticas tienen justamente los entrecruces, que requieren una información sumamente amplia.

3.3. Tanto pues el tema de la financiación como el de la orientación de la investigación imponen más condiciones limitantes que las que parecía soñar la filosofía de Dieudonné y aún el espíritu humano, presunto único beneficiario de la producción matemática, cancerosa o no. La existencia de condiciones materiales (no pequeño es además el costo de formación de nuevos recursos espíritu-matemáticos) nos dice que las cosas se encaminan de otro modo que en la visión crasamente idealista.

Con todo esto no digo que careciera de sentido una producción matemática y filosófica visiblemente rica; sólo apunto algunas causas que han dado a la filosofía de las matemáticas un curso distinto, quizás complementario, pero de indudable interés actual.

4. Durante el predominio bourbakista, no necesariamente caracterizable como formalista hilbertiano, aunque vinculada a exageraciones de *origen* formalista, se difundió una *epistemología mirabilis* (en el sentido de Fleck), imaginaria, según la cual la matemática era un juego (de ajedrez en la versión más corriente), sin objetos, desprendida de toda noción de verdad, cuando no vinculado exclusivamente al placer estético. La pujanza de esta visión, sin mengua de su absurdidad, la hizo extremadamente popular en las divulgaciones y aún en textos menos livianos. El carácter lúdico y desinteresado de la matemática fue moneda corriente.

Vistas las dificultades aludidas, experimentadas por los sistemas clásicos (LFI), junto a cierto formalismo estetizante extremo se desarrollaron ciertas posiciones platonistas. Sin embargo son bien conocidas las trabas para explicar el acceso epistémico a *entidades platónicas* cada vez más complejas (por ejemplo en las distintas teorías divergentes de conjuntos). Y alternativamente realismos estructuralistas en varias versiones la más conocida de las cuales se debe a Resnik. No es ajena a ello la difusión del bourbakismo, por un lado, y la genuina creciente presencia de estructuras matemáticas, de significación y alcance reales, por otro. No voy a seguir este hilo porque las dificultades encontradas por el estructuralismo resultan no más fácilmente superables que las de los sistemas clásicos[8]. Podría quizás llamarse a estas concepciones sustitutivas, sistemas *ersatz* de filosofía de las matemáticas, por su función real.

4.1. Hay con todo un punto a señalar para marcar la influencia de alguna de ellas. La *historiografía* matemática pasó a ser masivamente escrita desde un punto de vista formalista. Llegó a ser casi excepcional en determinado período encontrar historiografía de otro tipo. G. Israel en un brillante artículo[9] sobre *rigor* y *axiomática* mostró vívidamente como la historiografía (formalista) confundía la historia del movimiento hacia el rigor con la de la introducción de las axiomáticas, produciendo un efecto falseante, ineludible fruto de la concepción subyacente.

5. En los últimos veinte años, concomitantemente con la reducción de las partidas financieras para la investigación, incluso matemática (que en los años sesenta eran masivas en Estados Unidos), se produjo un desarrollo matemático estrechamente unido a la física, con una notoria fertilización mutua entre ambas disciplinas y que en el campo matemático dio lugar a una intensa producción de matemática en sí misma *pura* pero, *à la Fourier*, vinculada, en origen y en resultados, a la explicación de los fenómenos naturales y para nada aislada o lúdica[10].

F.E. Browder ya en su alocución presidencial en el Wokshop on the evolution of modern Mathematics[11], hablando de la relación entre el análisis funcional y el análisis concreto en la matemática del siglo XX, llamó la atención sobre el cambio producido en veinte años.

En un artículo publicado hace apenas dos años[12] extrae además consecuencias respecto a la acentuación de la producción matemática en temas concretos, muy lejos por cierto de la concepción bourbakista que daba, además, un rol casi despreciable a las aplicaciones.

No es el momento de extendernos en el tratamiento ni en los argumentos de Browder; de todos modos lo que resulta importante es que reflejan la percepción de la comunidad matemática frente a sus tareas.

Percepción que se distancia fuertemente de las actividades meramente juguetonas y de las filosofías que expresan a éstas.

Plantearse aquí el tema de la relación entre matemática y realidad resulta sobreabundante. Sin embargo resulta universalmente reconocida una doble faz de la producción matemática como 1) vinculada indisolublemente a las ciencias y, a la vez, 2) poseedora de un desarrollo autónomo, con problemas propios significativos (lo que ha dado en llamarse autonomía relativa, expresión que dice casi nada).

Además ambos aspectos se presentan como estrechamente relacionadas entre sí, y ello no es trivial.

5.1. Resulta aparente que los temas de la financiación, de la orientación de la investigación y de la aplicación fina, si no determinan en *sensu stricto* lo que se hace en matemáticas *pura*, delinean, quiérase o no, un ámbito, un cauce, dentro del cual se construye el conocimiento, muy lejos de la concepción lúdica de la disciplina. Y esto tiene sus consecuencias en filosofía de la matemática.

6. El tema que ha pasado a ser central es el de la práctica matemática en aspectos muy diversos.

Si tomamos por ejemplo un texto de Tarski incluido en un manual elemental[13], extremadamente serio para su momento, sobre el método deductivo, vemos como operan axiomas y teoremas, términos primitivos y términos definidos, definiciones, reglas de formación de expresiones y reglas de demostración y cómo se plantean los problemas de consistencia y otros bien conocidos. Por el contrario si miramos hoy qué cosas han pasado a ser focalizadas hoy, la situación resulta menos transparente. En particular el concepto de demostración. Ya no se trata sólo de reglas de sustitución, *modus ponens* y cosas así, sino otras. La demostración por computadora del teorema de los cuatro colores, para tomar un ejemplo sencillo, plantea el tema de los posibles errores en el tratamiento computacional de dicha demostración. Pero, dejadas de lado esas máquinas fascinantes y engañadoras (no, se trata de Gardel y de su referente de siempre), se plantea el tema del error aún en las demostraciones tradicionales (previsto ya desde Descartes y desde Hume)[14]. Se trata de saber, paralelamente, puesto que los matemáticos prácticamente nunca formulan demostraciones completas, qué demostración se asume como suficiente y rigurosa (de acuerdo con cánones lógicos que han sido bien desarrollados), mostrándose constantemente cómo no sólo los criterios de rigor cambian históricamente sino cómo hoy esos criterios dependen del tema en que se esté trabajando, y cuál criterio se elige en cada caso, o en cada sector de investigación, no es moco de pavo.

Por otra parte Putnam ha señalado, en *What is mathematical truth*[15], cómo lo que luego llegaría a llamarse geometría analítica, está fundado desde Descartes en la correspondencia entre números reales y puntos de la recta, asunto que está *supuesto* siempre en el desarrollo de la matemática posterior y en sus demostraciones. Más aún, ¿deben considerarse como ajenas a las matemáticas conjeturas como las de Fermat o de Goldbach, puesto que no entran en la matemática axiomatizada disponible (o por ejemplo entre los elementos contenidos en el texto referido de Tarski) o, por el contrario, por sus efectos teóricos patentes, deben considerarse como pertenecientes al núcleo mismo de la disciplina?

De modo similar, en trabajos de nuestros días, la tesis de Church, que afirma que *Una función es efectivamente computable si y sólo si es Turing-computable*, que no es tampoco ninguno de los elementos referidos por Tarski en el texto antedicho (ni en ninguna reconstrucción sabia o formalizada del mismo), ¿cómo debe situarse en el corpus matemático disponible? (y lo mismo respecto a otras muchas tesis). Son asuntos que, entre muchos otros, pertenecen a la práctica matemática real que merecen ser analizados y no son para nada fruto de disquisiciones psicológicas, sociológicas u otras que puedan descartarse rápidamente como irrelevantes. Porque son temas significativos, constituyen aspectos de los que un análisis de la práctica de la filosofía de la matemáticas no puede prescindir.

Con lo que resulta que no sólo las que hemos llamado condiciones materiales, ni el tema de la orientación de la investigación matemática dentro de una explosiva demografía de *entes* y otras cositas, pueden ser descartadas de la atención de la filosofía de la matemática; tampoco pueden serlo temas gordos, estrictamente matemáticos y metamatemáticos, a los que no se les había prestado atención. Por todo ello la práctica de la filosofía de la matemática depende, como, por lo visto, no siempre resultaba obvio, de la práctica matemática misma y no sólo de un caso extremo de la misma. Esa práctica pertenece no a un mundo cerrado de preocupaciones y disquisiciones genuinamente exquisitas, sino a un mundo con agujeros varios no triviales.

De ahí la hipótesis central de este trabajo referida a las razones y causas por las cuales la filosofía de la matemática ya no es sólo el ámbito de tres *ismos*, ni sólo cuestión de fundamentos.

7. Con todo ello, ha sido cuestionado (no sólo por Lakatos o por Putnam, sino de forma amplia) el que no podemos llamar sino dogma, teórico-práctico, del carácter *a priori* de la matemática[16]. Es todo un tema en el que no podemos entrar. Lo que nos interesa aquí son las causas y las razones, a las que aludimos informalmente, del cambio de clima en filosofía de la matemática. Pero hemos querido aludir también a qué se ha dado en este clima. Por otra parte, la no aceptación indiscutida de lo a priori en este campo aproxima indudablemente la práctica de la matemática a la de las demás ciencias y altera el lugar y la temática de la filosofía de la matemática. Sobre esta relación intracientífica tampoco me pronunciaré. Todo ello conlleva formas naturalistas de filosofía de la matemática. Pavadita de conjunto de problemas. Me detengo aquí.

8. Un puntito más, apenas esbozado, el de ciertas perspectivas que se abren.

Los objetivos y el lugar de la matemática (remember Fourier-Jacobi) vuelven al centro de la cuestión. Más allá de que hayamos dispuesto de sistemas de filosofía de la matemática *pura*, otro campo en que debe necesariamente trabajarse y cuyo análisis no está ni siquiera razonablemente esbozado es el de las matemáticas llamadas aplicadas, con su especificidad. El problema de la relación de la matemática y la realidad presupone un mínimo tratamiento de ese tema dentro del cual, no menor, es el de la relación efectiva entre ambos tipos de matemática.

Ello está estrechamente vinculado al estudio del complejo científico-tecnológico que comprende, además de la matemática, ciencia básica, ciencia aplicada, y lo que ha dado en llamarse sensu stricto *investigación y desarrollo*, puesta a punto en la producción. Por un costado el complejo está enraizado en la producción efectiva y dentro de él se dan relaciones que no han sido lo suficientemente estudiadas. La presentación de modelos de desarrollo científico bien conocidos es una primera aproximación al necesario análisis de ese complejo.

Justamente la relación entre matemática pura y aplicada y las existentes entre ambas y las ciencias empíricas forman parte del tema de dicho estudio y no son para nada ajenas a los temas de la filosofía de la matemática hoy.

La práctica matemática, central a esa disciplina, ocupa pues el lugar privilegiado que ocupaba el análisis de fundamentos otrora, y con proyecciones significativas antes no vislumbradas[17].

Hemos presentado un marco, apenas delineado, a partir de las que entendemos como causas y razones de un cambio substancial en filosofía de las matemáticas cuyos efectos y consecuencias no aparecen todavía del todo claras. Una efectiva construcción de ese marco es algo que está en proceso[18].

NOTAS

1 MEHLBERG, H. (1962) "The present situation of the Philosophy of Mathematics". In: Kazemier, B. y Menger, K. (eds.), *Logic and language: studies dedicated to professor Rudolf Carnap on the occasion of his seventieth birthday*. Dordrecht, Reidel.

2 La serie resultante sería 00, 30, 60, 90.

3 LAKATOS, I. (1976) *Proofs and refutations; the logic of mathematical discovery*. Cambridge, Cambridge University Press. (1967) "A rennaissance of

empiricism in the recent Philosophy of Mathematics?. In: Lakatos, I. (ed.), *Problems in the Philosophy of Mathematics*. Amsterdam, North Holland. (1978) "What does a mathematical proof prove". In: Worrall, W. y Currie, G. (eds.), *Imre Lakatos Philosophical Papers (v.2), Mathematics, science and epistemology*. Cambridge, Cambridge University Press. (1978) "The method of analysis synthesis". In: op. cit (1978).

En todas las notas se indican siempre las fechas de las ediciones utilizadas.

4 PUTNAM, H. (1967) "Mathematics without foundations". In: *Journal of Philosophy, 64*.

5 DIUDONNE, J. (1980) *Les grandes lignes de l'évolution des Mathématiques*. Paris, Irem Nord.

6 DE MILLO, R. et al. (1985) "Social processes and proofs of theorems and programs". In: Tymoczko, T. (ed.), *New Directios in the Philosophy of Mathematics*. Boston, Birkhäuser.

7 DIEUDONNE, J. (1987) *Pour l'honneur de l'esprit humain*. Paris, Hachette.

8 Dificultades que deberían ser consideradas, aparte, específicamente.

9 ISRAEL, G. (1980) "Rigore e assiomatica nella matematica moderna". In: Tagliagambe, S. y Di Meo, A. (eds.), *Scienza e storia; analisis critica e problemi attuali*. Roma, Editori Reuniti. Traducción española en *Galileo* (Montevideo), Segunda época, N. 1-2.

10 Ejemplos extremadamente ilustrativos en BROWDER, F. (1988) "Mathematics and the sciences". In: Aspray,W. y Kitcher, P. (eds.), *History and Philosophy of modern mathematics*. Minneapolis, University of Minnesota Press (v. 11 de los Minnesota Studies in the Philosophy of Science).

11 BROWDER, F. (1975) "The relation of functional analysis to concrete analysis in 20th century mathematics". In: *History Mathematica, 2*.

12 Ver artículo citado en nota 10.

13 TARSKI, A. (1951) *Introducción a la lógica y a la metodología de la ciencias deductivas*. Buenos Aires, Espasa, Calpe, capítulo 6.

14 CROWE, M. (1988) "Ten misconceptions about mathematics and its history". In: op. cit. en nota 10. Kitcher, P. *The nature of mathematical knowledge*. New York-Oxford, Oxford University Press, capítulo 2.

15 PUTNAM, H. (1975) "What is Mathematical truth?". In: Putnam, H., *Mathematics, matter and method* (Philosophical Papers, v.1). Cambridge (Mass.), Harvard University Press.

16 KITCHER, P., op. cit. en nota 14.

17 KITCHER, P. (1988) "Mathematical naturalism". In: op. cit. en nota 10, sobre transiciones racionales entre prácticas.

18 Ver las dos antologías ya citadas en notas 6 y 10.