

LOS ESTUDIOS DE GEOMETRIA SUPERIOR EN ESPAÑA EN EL SIGLO XIX

ANA MILLAN
Universidad de Zaragoza

RESUMEN

En este artículo se presenta un estudio sobre el cultivo de la geometría en España a lo largo del siglo XIX; se recogen los resultados -muy dispersos- publicados hasta la actualidad en una presentación sistemática, y se aportan datos inéditos, muy particularmente en lo referente a la geometría proyectiva. En la primera parte se considera el proceso de incorporación de las novedades surgidas en Francia en el ámbito de la geometría en el periodo de la Revolución, la introducción de la géométrie moderne en las aulas universitarias españolas y la transmisión a la comunidad matemática nacional de otros aspectos de la geometría del siglo XIX.

ABSTRACT

This paper deals with the modern geometry studies in Spain in the XIXth century. In the first part the scientific transfer of the French geometry of the Revolution period to Spain at the turn of the XVIII century is studied. We also analyse the slow and laborious introduction of the géométrie moderne in Spanish universities, in the context of the institutional difficulties that the development of science endured in years 1815-1875, as well as the transmission to the national mathematical community of different aspects of XIXth century geometry.

En la segunda parte se analiza la recepción en España de un conjunto de trabajos producidos en el ambiente matemático ligado a los centros de enseñanza técnicos europeos en los años setenta y ochenta, que se puede denominar genéricamente geometría aplicada. Esta penetración, relativamente actualizada, permitió además acceder a las corrientes de investigación en geometría sintética que están asociadas. Finalmente, se examina cómo la geometría proyectiva llegó a monopolizar, por influencia de dicho grupo, los estudios geométricos previstos en el plan de estudios de matemáticas en la universidad. Este aspecto es de fundamental importancia como condicionante fortísimo de los esfuerzos -de amplio alcance- de modernización de las matemáticas en España desarrollados en el primer tercio del siglo XX.

In the second part the studies developed in the last quarter of the century are analysed, taking into account the activities at the universities of Barcelona, Zaragoza and Madrid and paying special attention to the role of Eduardo Torroja (1847-1918). In these faculties of sciences the application of projective geometry to graphic statics as it was developed in Germany and Italy arose a great interest, that shifted towards a more theoretical synthetic approach. These geometrical topics became almost the only ones considered in the graduate and postgraduate studies in mathematics, partly because they were subordinated to the engineers training. This situation would have a great influence on the efforts directed to the modernisation of mathematics and the development of an independent research activity in Spain during the first forty years of the XXth century.

Palabras clave: Matemáticas, Geometría, Aplicaciones de las matemáticas, España, siglo XIX, Transmisión de la ciencia, Universidades, Eduardo Torroja, Zoel García de Galdeano.

Un aspecto de especial importancia en el análisis del desarrollo de las matemáticas en España en el siglo XIX es el estudio del cultivo de las disciplinas geométricas, en un periodo en el que éstas experimentaban un extraordinario crecimiento. Las peculiares características de la recepción en España de la geometría descriptiva y proyectiva y de otros temas geométricos permiten entender las circunstancias en las que el saber matemático se difundía en el país y aportan información sobre los mecanismos de transmisión de las matemáticas -y la ciencia- en la Europa del periodo.

1. La enseñanza superior de la geometría en España en el siglo XIX

La geometría, que había recibido considerable atención en el ambiente ilustrado español, continuó siendo a lo largo del siglo XIX objeto de máximo interés por quienes en España se ocupaban de matemáticas. Se registraron, aun en medio de las dificultades de diverso tipo que caracterizan el periodo, diversos esfuerzos e iniciativas para dar a conocer en el país la moderna geometría francesa y, progresivamente, otros estudios geométricos desarrollados en el siglo XIX. Uno de los obstáculos importantes fue, sin duda, el *anticientismo* que en este periodo estaba considerablemente difundido en un cierto ambiente; frente a él, la geometría, más que ningún otro tema matemático, fue sentida en el país como estandarte de una ciencia al servicio del anhelado progreso social.

1.1. Geometría clásica y moderna geometría

La profunda renovación de los estudios de geometría operada por Monge y sus discípulos en la *Ecole Polytechnique* y la *Ecole Normale* fue transmitida con considerable prontitud a España por la vía de la penetración -cultural primero y militar después- francesa y, particularmente, por medio de las 'Academias militares'¹. Así, en 1803 apareció en España la primera traducción de las *Lecciones de Geometría descriptiva* de Monge, para su uso en los estudios de la Inspección General de Caminos, en el año en que comenzaba a funcionar la Escuela de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos fundada por Agustín de Betancourt (1758-1824) en Madrid y se fundaba la Academia de Ingenieros del Ejército en Alcalá de Henares.

La formación de ingenieros civiles sufrió, apenas surgida esta primera iniciativa, un largo aplazamiento hasta el final del reinado de Fernando VII y hubo que esperar a mediados de siglo para que culminara la organización de la red de enseñanza de las ingenierías estatales e industriales. Sin embargo, en el ámbito militar la Guerra de la Independencia no hizo sino estimular la creación de centros de enseñanza debido a la necesidad de oficiales, reestableciéndose la normalidad de las dos Academias de Ingenieros y Artillería una vez aquélla terminada. La gran vivacidad -política pero también científica- de estos centros resultó incómoda al régimen absolutista de Fernando VII, que decretó su cierre en 1823, aunque ambos fueron reestablecidos pocos años más tarde. A lo largo del siglo funcionaron diversos establecimientos de educación militar; como línea conductora, no obstante, la formación de artilleros e ingenieros respondió desde sus inicios a la inspiración de una formación científica que provenía de Francia y, por ello, los estudios de geometría descriptiva y de geometría analítica moderna -al modo de Monge y Lacroix- así como sus aplicaciones fueron ampliamente desarrollados. La contribución

más significativa a la literatura sobre geometría en este periodo fuera del estamento militar es debida a José Mariano Vallejo (1779-1846), que en 1806 publica unas *Adiciones a la Geometría de D. Benito Bails*, donde se muestra su talante *mucho más acorde con los tiempos*² y, al año siguiente, una memoria de geometría diferencial, a cuyo estudio se dirigen también las enseñanzas de Monge, sobre la curvatura de las líneas en sus diferentes puntos, sobre el radio de curvatura y sobre las evolutás³.

Buena muestra del ambiente que se registraba en España en el periodo es el Plan de Estudios elaborado para la recién fundada Academia de Ingenieros, acompañado de un interesante proyecto de redacción de textos para compensar la carencia de manuales españoles, que no pudo ser llevado a cabo debido a la guerra y que incluía un *Tratado de las secciones cónicas* de cuya elaboración se encargaba Antonio Sangenís⁴. La conveniencia de esta iniciativa se comprende aún mejor si se considera que en esos años se manejaban en España textos de geometría clásica, esto es, siguiendo los elementos de Euclides, los únicos estudiados en las contadas cátedras universitarias de matemáticas. De este tipo es la *Geometría* de Benito Bails (1730-1797) o los *Elementos de Aritmética, Algebra y Geometría* del catedrático de Salamanca Juan Justo García (1752-1830), reeditados en 1801, 1814-15 y 1821-22⁵. Terminada la guerra se retoma prontamente en el estamento militar la idea de publicar manuales renovados. En 1819 publica Mariano Zorraquín *Geometría analítica-descriptiva*, un libro que incorpora muchas de las novedades francesas y sería ampliamente usado en la enseñanza militar y civil, y dos años más tarde aparece la *Geometría analítica* de Fernando García San Pedro (1796-1854)⁶.

En los años sucesivos algunos de los más significados matemáticos españoles de la época realizaron estancias en la capital vecina. Vallejo, exiliado en 1823, viajó por Francia, Bélgica, Holanda e Inglaterra durante casi una década en la que permaneció fuera de España. En París, en 1826, publicó la tercera edición de su *Compendio de Matemáticas Puras y Mixtas*, cuyas páginas de geometría y trigonometría incluyen cuestiones teóricas -incluyendo geometría del espacio y teoría de superficies- y aplicadas⁷. Por su parte, Juan Cortázar (1809-1873) realizó en París sus estudios de ingeniero -finalizados en 1837- incorporándose hacia 1840 como catedrático de matemáticas a la Universidad de Madrid. En 1847 y 1848 publicó sendos tratados de geometría elemental y de trigonometría rectilínea y esférica que fueron abundantemente reeditados y sirvieron de libro de texto en las enseñanzas de geometría elemental a nivel universitario⁸. García San Pedro, profesor de la Academia de Ingenieros desde 1827, movido por su interés por la reforma de las enseñanzas, realizó un viaje por Europa en 1838 que influyó considerablemente en el Plan de Estudios con el que se dotó a la Academia en 1839, el más duradero y relevante del siglo. Entre las novedades introducidas

entonces figura la reorientación de las enseñanzas de geometría analítica, que se unen a las de cálculo diferencial y al estudio de teoría diferencial de curvas y superficies: en 1840 García San Pedro publicó un tratado de acuerdo con este programa⁹.

La mayor parte de las memorias de matemáticas leídas por los académicos de la Real Academia de Ciencias y Artes de Barcelona, por su parte, están dedicadas a la geometría, fundamentalmente geometría clásica - incluyendo un trabajo sobre la enseñanza de la geometría de Feliu de la Peña (1787-1867), escolapio, profesor durante veinte años del Colegio Militar de Segovia y autor de varios textos- y cuestiones aplicadas, a la agronomía, la mecánica, y la arquitectura¹⁰. Esta Academia fue una de las instituciones clausuradas por la intervención de Fernando VII. El férreo control de la monarquía sobre las esferas intelectuales asestó un duro golpe -sólo levemente amortiguado, como se ha indicado, en el ámbito militar- a lo que era terreno propicio a principios del ochocientos para el estudio y aun desarrollo en España de las grandes novedades que ofrecía entonces la escuela de geometría francesa desarrollada en torno a la *Ecole Polytechnique*. En los años treinta y cuarenta la llama que se había mantenido débilmente encendida y que se pretendió reavivar se alimentaba todavía de la inspiración francesa, en parte por simple continuismo ligado a la ausencia de condiciones para cualquier dinamismo científico, en parte, también, por el enorme prestigio que la *Ecole Polytechnique* conservaba.

Sin embargo, en torno a mediados de siglo este influjo *politécnico* era un arma de doble filo debido a la situación peculiar de las matemáticas en Francia. La evolución del ambiente matemático francés ha sido descrita en recientes trabajos por Gispert, quien señala¹¹:

"Les mathématiques ont, au détriment d'autres sciences, un rôle prépondérant à l'Ecole polytechnique. L'Ecole dominant per l'aval -grâce au système des concours d'entrée- tout l'enseignement scientifique des classes préparatoires et du secondaire, les mathématiques sont posées tout à la fois comme science reine et responsable de l'inadaptation des formations scientifiques en France.

Cette domination des mathématiques qui apparaît presque avec la création de l'Ecole n'a pas la même signification tout au long du XIX^e siècle. Coupée de la recherche mathématique depuis les années 1830, l'Ecole entretient, en effet, dans les années 1860, une tradition mathématique hostile à tout développement théorique qui, au-delà des apparences, freine le développement des mathématiques elles-mêmes et est une des causes de ses 'retards'".

La influencia de la *Ecole Polytechnique*, por una parte, tuvo como consecuencia un continuado cultivo de las matemáticas por parte de militares e ingenieros de caminos y de minas, esto es, del conjunto de técnicos del estado¹², y en particular del profesorado de las respectivas escuelas de formación y del ambiente de estudio que corresponde a lo que en Francia eran *classes préparatoires*. José de Echegaray (1833-1916), formado en el ambiente de este segundo tercio de siglo, describe así el círculo de actividad de la Escuela de Caminos -dirigida por Juan Subercase entre 1836 y 1848-¹³:

"Gracias a su influencia, a la severidad de su exámenes de ingreso y a la preferencia que se ha dado siempre al estudio de las matemáticas puras, se ha formado en pocos años un profesorado libre de matemáticas elementales; pero un excelente profesorado que renovó completamente esta rama tan importante del saber humano.

Y en la Escuela, ha dominado siempre el mismo espíritu de protección por la ciencia pura; se ha explicado el cálculo diferencial e integral y la geometría descriptiva con un especial cuidado y un desarrollo considerable, así como las numerosas aplicaciones de ésta y la aplicación del cálculo a la mecánica; en estas clases se han seguido, durante largos años, los mismos textos que se usaban en la *Ecole Polytechnique* de Francia".

El mismo fundó en los años cincuenta una Academia libre de matemáticas, que por lo demás le reportaba considerables ingresos, hasta el punto que, declarada por un decreto la incompatibilidad de la enseñanza privada con la enseñanza oficial en la Escuela, prefirió abandonar cuerpo de ingenieros¹⁴, pero se lo niegan el Director de la Escuela y el Director de Obras Públicas con el expreso deseo de retener en el claustro a quien había probado ser profesor insigne y, en compensación, le ofrecieron varias comisiones en España y en el extranjero. Posteriormente, también Eduardo Torroja (1847-1918) se dedicó a esta actividad: como cabe imaginar, simultanearla con la enseñanza en centros públicos fue un problema delicado.

Por otra parte, uno de los efectos secundarios del influjo *politécnico* fue el interés hipertrofiado¹⁵ por la geometría elemental y proyectiva, que, aquí como en Francia, sería una nota característica del ambiente matemático: se estudiaba en los mismos textos franceses y con el mismo interés por la solución de cuestiones particulares. En efecto -y esta es la otra cara de la moneda- desde los años treinta, pese a la brillante producción francesa, el liderazgo en matemáticas estaba siendo decididamente trasladado a Alemania -algo de lo que los franceses se hicieron brutalmente conscientes sólo con la derrota en la guerra franco-prusiana de 1870-¹⁶.

"The geometry taught in the grandes écoles, developed in textbooks and in a great number of papers published in French reviews, however, no longer corresponded to the new developments in geometrical research: the new directions taken for example in Italy and in Germany diverge from the tradition maintained in France by the great geometers of the 1840s-1850s, a tradition no longer fertile in the last part of the century".

Nuestro reducido y poco multiforme ambiente matemático no alcanzaba el umbral de sensibilidad a estos cambios. No obstante, algunas novedades de tipo institucional hicieron posible en las últimas décadas de siglo una limitada recuperación.

1.2. Las disciplinas geométricas en la enseñanza universitaria de las matemáticas en la segunda mitad de siglo

Durante la segunda mitad de siglo se constituye, al ritmo de la regulación de la instrucción pública, el conjunto de docentes de matemáticas en institutos de segunda enseñanza, escuelas especiales y universidades (facultades de ciencias), que se añade, como una componente de importancia creciente, a los militares -ingenieros, artilleros y marinos- y los ingenieros en la formación de una comunidad matemática en España.

Antes de considerar la actividad en geometría de los núcleos matemáticos así establecidos, consideraremos aquí el desarrollo normativo de la enseñanza de la geometría en las facultades de ciencias; se incluyen referencias a las escuelas especiales, debido a la íntima conexión entre ambos tipos de centros establecida precisamente por la enseñanza de las matemáticas. El punto de referencia fundamental es, desde luego, la organización de los estudios científicos en las universidades españolas establecida por la Ley Moyano¹⁷. En 1858, el *Programa general de estudios en las facultades de ciencias* incluía tres asignaturas de geometría¹⁸:

1 *Complementos de Algebra, Geometría y Trigonometría rectilínea y esférica.*

2 *Geometría analítica de dos y tres dimensiones.*

3 *Geometría descriptiva.*

Las dos primeras asignaturas se incluían en las necesarias para alcanzar el grado de Bachiller en Ciencias, la tercera para el grado de Licenciado en Exactas. Estas asignaturas estaban dirigidas también a los ingenieros de cualquier especialidad y a los arquitectos, pues la ley no organizaba cátedras independientes para estos estudios.

Se trataba, indudablemente, de un programa conservador, adaptado al estándar de la formación matemática de un ingeniero dictado por las escuelas técnicas francesas¹⁹, con estudios previos de geometría elemental que debía hacer necesarios el escaso nivel de la enseñanza secundaria²⁰. Difícil iba a ser conquistar un terreno para los estudios de geometría moderna o pura teniendo en cuenta la inspiración que había guiado la creación de estos nuevos centros²¹:

"No debe extrañarse, por tanto, que los que a ellas [Ciencias y Letras] se consagran aficionados a su estudio con la pasión que la verdad y la belleza inspira, pidan con empeño que se extiendan, amplíen y multipliquen sus enseñanzas en las Universidades. Laudable es en extremo este deseo, como que tiene su raíz en las más nobles y elevadas aspiraciones del hombre, pero desde la esfera del gobierno hay que mirar la cuestión bajo un punto de vista práctico, y poner en relación los esfuerzos que se exijan a los alumnos con las ventajas que racionalmente puedan prometerse de la carrera emprendida".

Es indudable, en efecto, que el esquema organizativo de la educación superior científico-técnica en España tal y como se fue configurando a lo largo del siglo XIX incidía fuertemente en la necesidad de formar técnicos, dejando de lado la necesidad de centros científicos, en un periodo, el último tercio del siglo XIX, en el que las facultades de ciencias de Alemania, Francia e incluso Italia cobraban extraordinario protagonismo y autonomía y las propias escuelas técnicas superiores estimulaban el desarrollo de la investigación pura en su seno²². El propio efímero Plan de Estudios del periodo revolucionario plantea su crítica del raquitismo científico universitario -plasmado en las reformas de 1866-, aseverando que llevaba a²³:

"[alejar] de la educación universitaria las ciencias y las artes con sus aplicaciones; pretendiendo cortar el vuelo del libre pensamiento y detener el progreso; aspirando, por fin, a crear solamente retóricos inútiles, latinos rutinarios y argumentadores estériles, como lo fueron los que dieron nombre y carácter a la época que se resucitó en el plan de estudios que derogó estas disposiciones".

Por su parte, entre los ingenieros, tanto industriales -la mayor parte, dedicados a las distintas ramas de la industria (mecánica, metalúrgica, eléctrica, textil, ...)- como civiles -técnicos y funcionarios al servicio de la Administración, provenientes de las Escuelas de Caminos, Montes, Minas-, en el ámbito de la formación de profesionales, se planteaba la discusión sobre el carácter de las matemáticas en la Ingeniería. A lo largo de la segunda mitad del siglo XIX, como ha señalado Lusa²⁴ se mantuvo una fuerte interconexión entre los estudios de matemáticas en las Escuelas de Ingeniería y los de la Facultad de Ciencias, con la consiguiente presencia de matemáticos profesionales o de ingenieros que son a la vez licenciados o doctores en

Matemáticas en las Escuelas Superiores (en Caminos, Echegaray, Torroja, Portuondo, Jiménez, Bosch, Merino, Ollero y en Industriales, Presas, Clariana, Sánchez Solís -muchos de ellos autores de publicaciones en geometría-).

A este fuerte condicionamiento a los estudios técnicos, característico de las facultades de ciencias de Madrid y Barcelona, habría que añadir el que, todavía en 1880, en Granada, Santiago, Sevilla, Valencia, Valladolid y Zaragoza se cursaban provisionalmente sólo las asignaturas de la facultad de ciencias indispensables para las carreras de Medicina y Farmacia²⁵.

Se debe tener en cuenta, no obstante, que estas características se reproducen en parte en otros ordenamientos académicos, como en el correspondiente a Italia, donde la organización de la enseñanza superior viene marcada por el afán de modernización científico-técnica del país como base para el desarrollo industrial y social. En lo referente a la geometría, el reglamento universitario del Reino de Italia de 1862 incluía en la *laurea* en ciencias matemáticas puras, las asignaturas siguientes: geometría analítica (en primer año), geometría descriptiva (en segundo año) y en el cuarto y último año, una materia titulada análisis y geometría superior²⁶. En 1876 se señalaban entre los fines de las facultades de ciencias, además de promover la cultura científica de la nación, una tarea de apoyo a los estudios de medicina y a las *Scuole di applicazione per gli ingegneri*, así como la preparación de enseñantes. Para obtener la *licenza* en ciencias matemáticas y físicas debían cursarse geometría analítica, geometría proyectiva con dibujo y geometría descriptiva con dibujo. La continuación de los estudios era, bien la escuela de ingenieros, bien la *laurea*; esta última se delineaba como una formación científica-investigadora de calidad, con la exigencia de preparar y defender una memoria -en el espíritu del *Doktorarbeit* alemán-, además de superar los exámenes, introduciendo una cierta flexibilidad propiciada por la aparición de tres cursos complementarios de matemáticas sin más especificación²⁷.

Este último aspecto es el que se echa en falta en la organización española, y los propios contemporáneos no dejaron de señalar estas carencias. Cuando aún no habían transcurrido diez años desde la organización de la facultad de ciencias, y a raíz de las reformas introducidas por el decreto de octubre de 1866, los ingenieros de caminos denunciaban los problemas de ajuste entre enseñanzas científicas y enseñanzas técnicas desde la *Revista de Obras Públicas*, donde se aducía la necesidad de²⁸ *levantar nuestra voz en defensa de la enseñanza de las ciencias matemáticas y físico químicas, hoy, a nuestro juicio, comprometidas*. Se señalaba que el decreto, pretendiendo en principio *dar vida a la Facultad de Ciencias*, no conseguía sino sacrificar el nivel de su enseñanza al *refundir en las Facultades de Ciencias la enseñanza de*

los primeros años de las Escuelas Especiales, uniendo erradamente lo que debía ser *ciencia por la ciencia* con el punto de vista práctico; de modo que la enseñanza en aquel centro quedaba reducida a la mera *preparación por el estado para el ingreso en las Escuelas de Minas, Montes, Ingenieros industriales, Arquitectura y Caminos*.

Al mismo tiempo se hacía una crítica demoledora de las materias del programa de estudios del centro, comparándolo con los centros homólogos en el extranjero y, en particular, con la Sorbona; se denunciaba la desaparición de la física-matemática (tal y como se exponía en las obras de Lamé sobre electricidad, trascendentes inversas, calor y coordenadas curvilíneas) y la falta de espacio para los estudios superiores de álgebra y geometría, tal y como eran impartidos respectivamente por Serret y Chasles veinte años antes. En particular, se indicaba que la geometría moderna *nunca se ha explicado en Madrid* y seguía sin aparecer en el nuevo plan

"de suerte que nuestros doctores en ciencias matemáticas y físicas alcanzarán su borla sin saber que existen relaciones anarmónicas, sistemas homográficos, puntos en involución, y figuras homológicas (...)"

El propio Echegaray, que a principios de los años sesenta había viajado a París, se encargó de exponer en castellano lo más elemental del tratado de Chasles de 1847 en una serie de artículos en la *Revista de los Progresos de las Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*, recopilados en 1867 en un pequeño libro²⁹:

"Me propongo publicar en esta serie de artículos un breve resumen de las principales teorías que constituyen hoy la *Geometría superior*, y facilitar de este modo a la juventud el estudio de las obras clásicas, entre las que debo citar como principal la *Geometría superior* de Mr. Chasles, uno de los primeros matemáticos de nuestra época.

En España desgraciadamente nunca se ha explicado (sic) esta materia, ni jamás se ha contado con ella en nuestros programas de enseñanza: verdad es que la misma suerte han corrido y corren otras muchas.

Yo no puedo tener las aspiración de llenar ni aun en mínima parte tal vacío; pero si al menos estos artículos, imperfectos como son, consiguen despertar el gusto por estos estudios daré por bien empleado mi trabajo".

En el artículo de la *Revista de Obras Públicas* no se dejaba de mencionar -y esto es omnipresente en los esfuerzos por modernizar los estudios superiores en nuestro país-, el lastre que para la educación superior suponía la

falta de una orientación clara en la enseñanza secundaria. En el plan criticado los contenidos matemáticos de ésta se veían fuertemente limitados:

"hace veinte años se enseñaba analítica aun en Institutos de segunda clase; hoy, con el nuevo plan, la enseñanza de las matemáticas se ha arrancado casi de cuajo de todas las provincias, hasta el punto de que, como hemos dicho, ni aun la *trigonometría*, la parte más práctica y una de las más necesarias de los estudios elementales, queda en pie"

lo cual llevaba a situaciones ciertamente de estrambote, relacionadas con el fuerte centralismo imperante:

"Preferimos, por ejemplo, que no se enseñe Trigonometría en España, a que tengan que venir los jóvenes de los cuatro ángulos de la península a estudiarla donde únicamente se ha de enseñar: en la Universidad de Madrid".

Aunque el nivel de información no era bajo y la necesidad de introducir cambios fue detectada en ambientes matemáticos, las estructuras académicas españolas carecían de la agilidad de las alemanas, con su fuerte competencia entre universidades, o de las italianas, animadas por un activo proceso político. Diez años después, tras los efímeros planes de estudio del periodo revolucionario, el problema seguía abierto. En el discurso de apertura del curso 1875-76 en la Universidad Central, Gumersindo Vicuña, catedrático de Física matemática, proponía una culminación de los estudios para la sección de exactas que incluyera³⁰:

"disquisiciones superiores, por ejemplo, la Astronomía, la Física-matemática, la Geometría superior, las llamadas teorías modernas del Álgebra y si se quiere el Cálculo de Probabilidades, la Mecánica celeste y la Filosofía de las matemáticas (...)".

Antes de entrar en el movimiento producido en el último cuarto de siglo, es necesario tener en cuenta dos aspectos de tipo institucional. Por una parte, se verificaron dos ulteriores reformas en el plan de estudios que afectaron a las materias geométricas. En 1877 la primera asignatura fue dividida en dos partes, bajo la denominación de *Análisis Matemático*, dejando en la primera las cuestiones elementales de Aritmética, Álgebra y Trigonometría plana y esférica -incluyendo el estudio de las funciones circulares que necesitaban ser explicadas debido a las deficiencias de la enseñanza secundaria- e introduciendo en la segunda temas de álgebra superior³¹. Tres años después se estableció una asignatura independiente, llamada simplemente *Geometría*, que debía ser explicada por el profesor de *Geometría analítica*.³²

En segundo lugar, y en relación con las cátedras de geometría, se ha señalado ya que en una primera etapa los centros donde se organizó la Licenciatura en Ciencias Exactas o Físico-matemáticas fueron en realidad sólo los de Madrid y Barcelona, ligados a las Escuelas de Ingenieros de Caminos y la de Industriales respectivamente, cada uno de ellos con dos cátedras de geometría que fueron, de hecho, los núcleos principales de la introducción de la geometría proyectiva, en su reelaboración de la segunda mitad de siglo. A lo largo de los años ochenta, por su parte, se fueron completando los estudios de las Facultades de Ciencias de Granada, Sevilla, Valencia, Valladolid y Zaragoza, estableciéndose al menos los estudios del periodo común a las tres licenciaturas, lo cual supuso el establecimiento de otras tantas cátedras de Geometría, y -efímeramente- se crearon cátedras de analítica y descriptiva en La Habana. En los años noventa se completó la Licenciatura en Zaragoza y, en torno al cambio de siglo, se añadieron cátedras de geometría analítica en Oviedo y Salamanca.

Cátedras universitarias de geometría en el siglo XIX

Madrid

Descriptiva: José A. Elizalde (1849-75)
Eduardo Torroja (1876-1916)

Analítica: Juan Cortázar
Ignacio Sánchez Solís (1876)³³
Miguel Vegas (1891)³⁴

Barcelona

Descriptiva: José Domenech (1895)³⁵
Analítica: Santiago Mundí (1881)³⁶

Granada

Analítica: José Irueste (1882)³⁷
Juan Tercedor (1896)³⁸

La Habana

Se convocaron cátedras de geometría analítica³⁹ y descriptiva⁴⁰ en 1883.

Oviedo

Analítica: José Mur (1896)⁴¹

Salamanca

Analítica: Emilio Román (1902)⁴²

Santiago

No se tiene constancia de cátedra de geometría

Sevilla

Analítica⁴³: Luis Octavio de Toledo (1890)⁴⁴
J. J. Camacho (1896)⁴⁵

Valencia

Analítica: José Villafañe (1882)⁴⁶
Cecilio Jiménez Rueda (1897)⁴⁷

Zaragoza

Analítica: García de Galdeano (1889)⁴⁸
Silván (1900)
Descriptiva: José Campalans (1897)⁴⁹
José G. Alvarez Ude (1902)⁵⁰

1.3. La recepción por los matemáticos españoles de las corrientes geométricas del siglo XIX

En el último cuarto de siglo se registraba una mayor agilidad del ambiente de las facultades y escuelas especiales -plasmado eficazmente en un enorme aumento de las publicaciones-, al tiempo que se ponían de manifiesto las inquietudes de un profesorado de segunda enseñanza cada vez más preparado. En efecto es éste el periodo más productivo de autores como: Eulogio Jiménez (1834-1887), astrónomo del Observatorio de Madrid muy conectado con los ambientes de la Institución Libre de Enseñanza; Atanasio Lasala (1847-1904), catedrático de matemáticas del Instituto de Bilbao y durante años profesor de Geometría descriptiva de la Sección de Estudios profesionales de la Escuela de Artes y Oficios de Bilbao; José Bartrina y Capella (1861-1946), catedrático de instituto en Tapia de Casariego (Asturias), Gerona y Barcelona; Ventura Reyes y Prósper (1863-1922), quien, tras doctorarse en Ciencias en 1885, realizó un viaje a Alemania, donde conoció a Klein y Lindemann y que ocupó en los años noventa sucesivas cátedras de instituto en Teruel, Albacete, Jaén, Cuenca y finalmente, desde 1898 en Toledo; Zoel García de Galdeano (1846-1924), catedrático de instituto de Toledo que obtuvo en 1889 la cátedra de Complementos de Algebra y Geometría analítica de la Universidad de Zaragoza, pasando en 1896, al completarse las enseñanzas, a la Cátedra de Cálculo infinitesimal; Santiago Mundí, que ganó la cátedra de Geometría analítica de la Universidad de Barcelona en 1881; Carlos de Moy, ingeniero industrial de la Ciudad Condal; Lauro Clariana (1842-1916), ingeniero industrial, catedrático de instituto de Tarragona y más tarde catedrático de la Universidad de Barcelona; y, de

particular influencia, Eduardo Torroja, que accedió a la cátedra de Geometría descriptiva de la Universidad Central en 1875.

1.3.1. Eulogio Jiménez y la Institución Libre de Enseñanza

La geometría es, por ejemplo, el tema matemático sobre el que más se escribe en el *Boletín de la Institución Libre de Enseñanza*, entre 1877 y 1881, en el periodo en el que esta publicación era un hervidero de artículos científicos, filosóficos, artísticos y jurídicos de los intelectuales marginados de la enseñanza oficial⁵¹. En 1877 y 1878 Augusto González de Linares publicó sendas notas sobre la relación entre la geometría y las ciencias naturales, en particular la cristalografía y la morfología, completados con una tercera, aparecida en 1890, en la que añade también la morfogenia y destaca la idea de simetría como noción geométrica clave cuyo interés ha sido mostrado por cristalógrafos y naturalistas. El tema de la relación entre ciencia natural y matemáticas vía la geometría era filosóficamente significativo en el ámbito krausista, según señalan Núñez y Servat en su estudio de estas publicaciones, y el propio Giner de los Ríos se mostró seducido por la visión de González de Linares. Sin embargo, en 1890, Laureano Calderón publicó una nota en la que se refiere a la autonomía de la geometría y sus aplicaciones: aquí como en otros trabajos que veremos a continuación se muestra una cierta permeabilidad hacia la impronta que la escuela alemana -con la poderosa influencia del idealismo romántico y la tendencia a la fragmentación obligada por el enorme desarrollo de la ciencia- estaba dejando en las matemáticas.

Al margen de estas contribuciones, en la Institución Libre de Enseñanza se incluyó efectivamente un curso de geometría impartido por Eulogio Jiménez, del que se tienen referencias por los resúmenes aparecidos en el *Boletín* entre 1877 y 1881. Se ocupó en él de cuestiones de geometría métrica y proyectiva usando métodos sintéticos: puntos notables del triángulo, transformaciones lineales, potencia de un punto respecto a una circunferencia, proyecciones y, lo que tiene mayor interés, se ocupó de la razón doble, polaridad y la generación proyectiva -introducida por Steiner- de figuras geométricas a partir de proyectividades entre figuras de orden inferior. Jiménez, indudable conocedor de la literatura matemática alemana, realizó una contribución notabilísima emprendiendo una labor de traducción iniciada con la obra *Die Elemente der Mathematik* de Baltzer, aparecida en los años ochenta. Esta labor, interrumpida por su temprana muerte, no tuvo, lamentablemente, continuación alguna. Octavio de Toledo puso de manifiesto posteriormente la corriente de aire fresco que supuso esta traducción, en el contexto filofrancés antes descrito⁵²:

"Es preciso haber vivido en la época en que se publicaron esos libritos de apariencia modesta y que encierran tanta y tan sana doctrina matemática, para formarse una idea exacta del efecto producido por ellos en aquellas generaciones de estudiantes de Matemáticas que nos habíamos formado en la lectura de las obras francesas de Bourdon, Cirotte, Briot, Vincent, Rouché y Comberousse, en obras españolas en estos libros inspiradas, y que a lo más habíamos leído los tratados de Laurent, de Rubini y algunos otros análogos. (...)

Cual ocurre siempre con toda obra nueva, o nuevamente divulgada, los trabajos de Baltzer tuvieron defensores fanáticos y detractores encarnizados, si bien fuimos los más los que no tomamos por el pronto parte activa en la lucha. Cual ocurre siempre en casos tales para sus defensores, las obras de Baltzer eran acabadas, perfectas, tanto en su conjunto como en sus detalles; nada había en la bibliografía matemática, no sólo superior, sino aún que se les igualase; para sus detractores, bien acomodados con las ideas antiguas, que exigían labor intelectual menos intensa, todo en ellas era malo, incompleto e incomprensible.

La mayor parte de los que no tomamos parte activa en los primeros momentos de lucha, hemos sido después los más fervientes propagandistas de las ideas contenidas en las obras de Baltzer; estas ideas, especialmente las que informan su Aritmética universal, son la matriz de la casi totalidad de las obras que acerca de esta materia se han escrito en nuestro país de algunos años a esta parte; obras que han propagado esas fecundas ideas en nuestras Facultades de Ciencias, y que es de lamentar no hayan sido acogidas con igual entusiasmo por otros centros docentes, aferrados aún en su enseñanza a los modelos franceses de mediados del pasado siglo".

El propio Jiménez señalaba en el prólogo al tomo de álgebra⁵³:

"Desde luego merece notarse el deslinde entre la Aritmética y el Álgebra, dos ramas esencialmente diversas de la Matemática y confundidas, sin embargo, en todos los tratados que por mano de nuestra estudiosa juventud circulan en España".

No obstante, Octavio de Toledo indicaba como excepción las obras geométricas⁵⁴:

"Las obras geométricas de Baltzer no han tenido en nuestra enseñanza influencia análoga a las analíticas, por dos causas igualmente poderosas: primera, por que son indudablemente inferiores, aun siendo buenas, y de menos potencia innovadora que las analíticas, y segunda, tal vez la más principal, porque hacia la misma época que las de Baltzer se introdujeron en España por nuestro distinguido y respetado compañero D. Eduardo Torroja y se propagaron en nuestras Facultades, las ideas y obras de Staudt, y ante estas ideas los trabajos de Baltzer tuvieron que ceder el campo y confesar su inferioridad. Pero obsérvese que toda esta renovación de ideas en el campo de la Aritmética, del

Algebra y del Análisis, en general, a D. Eulogio Jiménez se la debemos, pues él nos puso en condiciones de darnos cuenta de ellas y nos invitó y obligó a estudiar algo más que aquella multitud de obras francesas *distintas por las portadas y los nombres de sus autores respectivos*".

1.3.2. El texto de Rouché-Comberousse

Vale la pena detenerse brevemente en el tema de la influencia de los textos franceses, antes de considerar los esfuerzos de preparación de manuales por los matemáticos españoles durante las dos últimas décadas de siglo. Los manuales de geometría descriptiva de Adhémar -de tipo eminentemente práctico-, Olivier, Leroy, La Gournerie, Vallée gozaban de enorme prestigio en España en el último cuarto de siglo, como se observa por ejemplo en los ejercicios de oposición a cátedras del periodo; no obstante, José Antonio Elizalde, catedrático de la asignatura en Madrid, publicó en 1873 y 1878 los dos volúmenes de su *Curso de Geometría descriptiva*. Un paso cualitativo para incorporar a la enseñanza elementos de geometría proyectiva podría haberse realizado con la traducción de la obra *Traité de Géométrie élémentaire* de Eugène Rouché (profesor de Liceo y *répétiteur* en la *Ecole Polytechnique*) y Charles de Comberousse (profesor de la *Ecole Centrale* y en el *Collège Chaptal*), cuya primera edición francesa había aparecido en 1865. Esta traducción, preparada por Portuondo y que se convertiría en una obra de gran influencia, apareció en 1878; la obra estaba dedicada a los estudiantes que preparaban el ingreso en las escuelas especiales y academias militares, como se indica específicamente en las *Notas al Tratado de geometría elemental de E. Rouché y C. de Comberousse*, publicadas un año después. Se trata, no obstante, de una traducción incompleta de la obra francesa. En efecto, en la advertencia a la segunda edición de esta última, se señala⁵⁵:

"En publiant, il y a deux ans et demie, un *Traité* complet de Géométrie, nous avions pour but principal d'aider, dans la mesure de nos forces, à la propagation des méthodes nouvelles dont la science s'est enrichie depuis cinquante ans. Les suffrages et le succès qui sont venus récompenser nos efforts, sont la preuve que nous ne nous trompions pas en pensant que le moment était venu de vulgariser des conceptions qui agrandissent, et reculent si loin l'horizon géométrique".

Ya en la primera edición, junto a la materia correspondiente a los programas oficiales, figuran en letra pequeña *utiles développements du texte destinés aux candidats aux Ecoles spéciales* junto a apéndices con los nuevos métodos, esto es, la geometría proyectiva -expuesta al modo de Chasles en su tratado de 1852-. Los autores insistían sobre la necesidad de no excluir estos temas de un libro de geometría elemental⁵⁶:

"Est-il donc utile qu'il y ait comme un monde entre la science des Collèges et celle des Instituts? Au commencement du siècle, les candidats reçus à l'Ecole Polytechnique avaient tous entendu parler de Lagrange, de Laplace, de Monge, dont ils avaient essayé de lire les ouvrages, et la génération qu'ils ont donné à la France n'a pas été indigne de ces grands modèles".

La traducción española de la tercera edición francesa recoge en un sólo volumen de más de quinientas páginas los dos tomos franceses, con los libros siguientes: Geometría plana: I La línea recta, II La circunferencia de círculo, III Figuras semejantes, IV Areas; Geometría del espacio, V Del plano, VI Poliedros, VII Cuerpos redondos. Se advierte además⁵⁷:

"Nos proponemos publicar a la brevedad posible una segunda parte, que contendrá la resolución de los *Ejercicios propuestos* por MM. Rouché y Comberousse, así como la traducción del *Complemento* a la *Geometría* relativo a las curvas usuales".

De esta manera, falta el libro VIII de la edición francesa, sobre curvas usuales (elipse, parábola, hipérbola, hélice), así como los apéndices, en particular el apéndice a este último libro, del que los autores franceses dicen⁵⁸:

"L'Appendice de ce dernier livre a une importance capitale. Il renferme les propriétés fondamentales de l'homographie et de l'involution, suivies de leur applications aux coniques, et un résumé substantiel de la doctrine des polaires réciproques".

Además, no aparece el apartado dedicado en la segunda edición a superficies de segundo orden (especialmente conos de segundo orden, cónicas esféricas, hiperboloide de una hoja y paraboloides hiperbólicos).

La superación progresiva de la dependencia de la literatura francesa y el fortísimo empuje de la publicación de textos de geometría españoles, tanto elementales⁵⁹ o dirigidos al quienes preparan el ingreso en las escuelas especiales (como la traducción del Rouché-Comberousse⁶⁰) como de nivel universitario -obra del nuevo profesorado-, son características señaladas de los años ochenta. Es este un aspecto de fundamental importancia en la recuperación del retraso y la reactivación científica.

1.3.3. Los manuales de autores españoles

Una parte significativa de estos nuevos textos españoles son manuales de geometría analítica publicados por los catedráticos de las diversas universidades. Uno de los primeros fue publicado en Madrid por Ignacio Sánchez Solís, sucesor de Cortázar en 1876 y profesor de la Escuela de

Caminos. En 1883 José María Villafañe publicó en Valencia unos *Elementos de Geometría analítica*, expresivamente dedicados a Fernández Vallín y Echegaray, emblemas de la actitud de confianza ilimitada en la ciencia, entendida como paradigma de progreso y modernidad; esta idea, que estaba presente en las iniciativas de muchos de estos matemáticos, es expresada -hiperbólicamente- por Villafañe en su introducción⁶¹:

"Todos los ramos de las ciencias matemáticas vienen adelantando en estos últimos tiempos de una manera prodigiosa, no sólo en su parte especulativa, sino en sus trascendentales aplicaciones a todos los conocimientos, que hoy forman el fondo más precioso de la moderna civilización. La Geometría analítica no ha podido, pues, permanecer indiferente a este movimiento progresivo; por el contrario, ella se enriquece cada vez más con los notables descubrimientos, que diariamente se realizan en el campo científico, y en especial con los del análisis algébrico y de la Geometría pura, de esa Geometría superior que tanto debe a los trabajos de Chasles. (...)

¿Qué sería en estos momentos una Geometría analítica, que no pidiese apoyo a las trascendentales teorías, que hoy se disputan el campo de la ciencia, que hoy en el concierto científico reclaman puesto preferente para expeditar las regiones de las disquisiciones analíticas, para prestar luz a las disquisiciones científicas? Quedaría sin influencia eficaz en la lucha por el progreso indefinido en todas sus manifestaciones, que lleva al perfeccionamiento; sería un mero boceto de lo que debe ser, y en especial de la misión que está llamada a llenar en el mundo de la ciencia trascendental".

Mucha más relevancia alcanzaron las *Lecciones de Geometría analítica* de Santiago Mundí i Giró, aparecidas en 1883 en Barcelona, lo cual, al parecer podía herir sensibilidades en la dominante capital⁶² e irritar a quienes se aferraban a los viejos tratados franceses:

"Al publicar estas lecciones de Geometría analítica, no hemos creído presentar una obra original, ni mucho menos censurar, de ningún modo, las que suelen servir de texto en nuestra Universidades. Son sencillamente un resumen de las lecciones que explicamos en cátedra, y con su impresión esperamos presentar un verdadero beneficio a nuestros alumnos".

Del gran éxito de esta obra, muy completa y bien estructurada, se da cuenta en la reedición de 1893. En efecto, fue adoptada como texto en la Facultad de Ciencias y en Escuela general preparatoria de ingenieros y arquitectos de Madrid, y, además, en las facultades de Sevilla, Granada y La Habana; en 1892 recibió un informe favorable del Real Consejo de Instrucción Pública. Como colofón, obtuvo la Medalla de Oro de la Exposición Universal de Barcelona de 1888 y fue premiada de nuevo en la de Chicago de 1893.

García de Galdeano, por su parte, publicó en sus años de catedrático de instituto varios textos de Geometría elemental, en el último de los cuales, aparecido en 1888, optó por incluir temas de geometría proyectiva plana y en el espacio inspirándose en la exposición de Chasles en su trabajo sobre los Porismas⁶³. Esta obra contiene además referencias a las geometrías no-euclídeas, y en este contexto aparecen referencias a la literatura italiana (Battaglini): téngase en cuenta que en este periodo había ya iniciado su correspondencia con Cremona y, en efecto, en adelante los trabajos italianos son una de sus principales fuentes en geometría⁶⁴. En los años noventa, García de Galdeano, siendo ya catedrático de la Universidad de Zaragoza, publicó su *Geometría general* en dos partes; y Miguel Vegas, catedrático en la Universidad de Madrid desde 1891 y Jiménez Rueda, que sucedió a Villafañe en Valencia en 1896, publicaron sendos textos de geometría proyectiva analítica, adaptados a la orientación que ambos habían impreso a la asignatura⁶⁵.

El potencial humano que se refleja en el cuadro anteriormente descrito hizo posible, por una parte, una considerable receptividad a la nueva literatura sobre geometría proyectiva producida por las escuelas técnicas alemanas e italianas, obra de Cremona, Favaro, Fiedler, Reye y otros, y, contemporáneamente la difusión de otras teorías geométricas, como las geometrías no euclídeas y la geometría diferencial, esto es, las ideas de Lobatchevskiy, Bolyai, Gauss, Monge, Riemann y Beltrami. Nos detendremos brevemente a considerar este caudal de temas nuevos, cuya entrada en el país ha sido ampliamente estudiada por Mariano Hormigón y José Llombart; y analizaremos después en detalle los estudios de geometría proyectiva, que fueron sin duda los que tuvieron mayor impacto en el país.

En los años ochenta, en efecto, según han mostrado Bernalte, Llombart y Viñas, comenzó a hablarse en España de geometrías no-euclídeas. En 1881 la revista barcelonesa *Crónica científica* publicó una traducción de un artículo sobre la experiencia en las ciencias exactas de J. Hoüel en el que se incluyen referencias a los modelos de geometrías no euclídeas de Beltrami y Klein⁶⁶. Pero el primer trabajo de un autor español es el publicado por Lauro Clariana tres años más tarde en la misma revista, expuesto en la línea de sus creadores, Lobatchevskiy y Bolyai, esto es, desde el punto de vista de la generalización de las fórmulas trigonométricas⁶⁷. Pero especialmente fue en las páginas de *El Progreso Matemático*, en una serie de artículos divulgativos de García de Galdeano y Ventura Reyes y Prósper, donde estos temas fueron más ampliamente tratados; ambos autores fueron activos miembros del Comité Lobatchevsky de la Universidad de Kazán -organismo que menciona específicamente esta actividad-, mostrando un gran interés por estos temas⁶⁸.

A fines de siglo la cuestión de las geometrías no-euclídeas había adquirido un cierto protagonismo. En efecto, en esos años se desarrolló en Barcelona una encendida polémica -que ha sido puesta a la luz por Viñas- sobre el tema, con llamativos matices ideológicos⁶⁹, puesto que enfrentó a Clariana y a José Domenech Estapá con Mundí, activo militante del *Partit Republicà Històric*:

"Els contendents passen a ésser-ne en Mundi, en Domènec i en Clariana; al començ, el primer les accepta, el segon se'n fa càrrec, l'últim de cap de les maneres no les pot acceptar, i tant és així que exclama: 'El picot revolucionari ja no respecta quasi res de les coses velles', després d'una forta invectiva contra Lobachevskiy, fent-hi, àdhuc, intervenir Déu per a tractar de menjacapellans els que hi creuen; i com que una de les obres del rus porta el nom de Pangeometria, lliga aquest nom amb el de panteisme".

En la polémica, el tema se entrecruzarà con cuestiones relativas a la noción de infinito, en particular del infinito geométrico en el contexto de la geometría proyectiva; lo cual no impide que sigan adelante los estudios barceloneses sobre el tema⁷⁰.

Por otra parte, García de Galdeano se ocupó de las geometrías no euclídeas en una conferencia, impartida en marzo de 1898, dentro del curso sobre la moderna organización de la matemática que impartió en lugar tan destacado como el Ateneo de Madrid⁷¹. En 1901 la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid convocó un premio sobre el tema; y, finalmente, Bartrina, el autor más prolífico sobre la materia, compartió con Esteban Terradas el premio Agell de la Real Academia de Ciencias y Artes de Barcelona correspondiente al bienio 1905-1907 por su trabajo⁷² *Tratado didáctico de las geometrías no euclídeas*, publicado en 1908. Es interesante la sensibilidad sobre el tema que, por lo demás, no es exclusiva de Barcelona, y que remite de nuevo a la relación ciencia-ideología característica del desarrollo de la ciencia en España⁷³: así, significativamente, Fernández Vallín perteneció al Comité Lobachevskiy antes citado; y a principios de 1907, la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid presenció un feroz ataque a Lobachevskiy y Helmholtz por parte de Arrillaga⁷⁴, un año después, no obstante, de que el jesuita José A. Pérez del Pulgar publicara en la *Revista de la Real Academia de Madrid* un artículo titulado "Ensayo de geometría analítica no euclidiana", publicado después como apéndice a la segunda edición del *Tratado de geometría analítica* de Vegas⁷⁵. Pero, como tema general de la cultura científica, el cierre lo puso Rey Pastor con su amplia exposición -que señala con claridad la conexión con los problemas de fundamentos y con la sistematización de la geometría de Klein- en un ciclo de conferencias en el Ateneo de Madrid en 1915.

Reyes y Prósper realizó una interesante contribución al conjunto de trabajos que se sucedieron en la revista alemana *Mathematische Annalen* a partir de la publicación en ella, en 1871, del primer y famoso artículo de Felix Klein titulado "Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie"⁷⁶. Reyes y Prósper publicó una primera nota en 1887, con el encabezamiento genérico "sobre las geometrías no euclídeas"; y en 1888, apareció una copia de una carta dirigida a Pasch, junto con la respuesta de éste⁷⁷. En lo sucesivo, no obstante, Reyes y Prósper dejó a un lado el modelo de la geometría y se interesó por cuestiones de lógica abstracta. Sus escritos sobre el tema aparecieron también en este caso en *El Progreso Matemático*, y constituyen una temprana tentativa de exposición sistemática de la modernísima línea de investigación -en algunos aspectos en formación- en lógica simbólica. En 1891 emprendió incluso la traducción de la obra *Vorlesungen über Algebra der Logik* (1890) de Ernst Schröter, que lamentablemente no llegó a terminar⁷⁸.

De este modo, y al margen de los propios libros de texto señalados al principio, el hábito de publicar trabajos se extendía indudablemente. En 1880, Lasala publicó una memoria sobre *Generalización de la teoría de líneas proporcionales*, calificada como obra de mérito relevante por la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid dos años después, en la que se tratan temas de la geometría moderna⁷⁹. En 1891 Durán Loriga publicó un librito titulado *Tres capítulos de Geometría superior* que es también una exposición de nivel muy elemental de las nociones básicas de geometría proyectiva (principio de los signos, relación anarmónica, involución y homografía)⁸⁰. Pero en los años noventa es García de Galdeano, desde su recién asumida posición de catedrático de Geometría analítica, el protagonista indiscutible de la difusión de la enorme riqueza de las teorías geométricas del siglo que se cerraba. A lo largo de una larga serie de artículos aparecidos en su revista, *El Progreso matemático*, -que fueron luego recopilados en forma de un libro en dos volúmenes, la *Geometría general* antes mencionada- trató la casi totalidad de los temas de la geometría de la segunda mitad de siglo⁸¹: la Geometría del triángulo, que ocupa un lugar preferente y que fue tema de trabajo de una serie de matemáticos franceses con los que estuvo en contacto García de Galdeano; la geometría proyectiva, incluyendo la algebraización de la escuela alemana (Möbius, Plücker) y los desarrollos subsiguientes; la geometría no-euclídea, incluyendo el enfoque de Riemann, Helmholtz y Beltrami; la idea de variedad o de geometría n-dimensional de Grassmann y Riemann; y la geometría diferencial de Gauss y Riemann. En estos trabajos García de Galdeano hace particular hincapié en la aplicación en un modo siempre más general de los métodos algebraicos a la geometría, tema al que dedicó una memoria monográfica titulada⁸² *Las modernas generalizaciones expresadas por el Algebra simbólica, las geometrías no-euclídeas y el concepto de hiperespacio* (1896).

En la década siguiente, seguramente debido a una nueva preocupación, a saber: la introducción de una nueva asignatura en Zaragoza de Cálculo infinitesimal, se ocupó de la presentación didáctica de la geometría diferencial. Elaboró dos textos (aparecidos en 1904 y 1905) de una extraordinaria calidad, que son los hitos fundamentales de la introducción de esta temática en España, y en los que sigue básicamente a Darboux⁸³. Habría que añadir a esto, por último, la exposición de la parte básica de la Topología, que daba sus primeros pasos -con la potente guía de Poincaré- en los años del cambio de siglo⁸⁴. Faltaba, no obstante, para consolidar todos estos esfuerzos individuales -característicos de la cultura española- la filtración a nuevas generaciones de estudiosos de un saber matemático concorde con el ritmo de los tiempos⁸⁵.

2. La geometría proyectiva en el último cuarto de siglo

En los años ochenta se produjo un interesante intento de modernizar la enseñanza universitaria de la geometría aprovechando el pequeño margen de maniobra permitido por las modificaciones antes citadas de la regulación legal. Precisamente el carácter que esta regulación imprimía a las enseñanzas de la facultad de ciencias provocó una especial receptividad hacia las matemáticas producidas en el ámbito de los centros de enseñanza técnicos europeos en los años setenta y ochenta, particularmente, lo que se da en llamar geometría aplicada⁸⁶: los estudios de geometría proyectiva ligados a métodos gráficos, especialmente la estática gráfica de Culmann, desarrollados en Alemania e Italia -y prolongados a los llamados métodos grafomecánicos-, y sucesivamente otros temas, como los estudios de geometría cinemática liderados por Mannheim en el entorno de la *Ecole Polytechnique*. El relieve dado en el país a la función de las matemáticas en la formación de cuadros técnicos permitió, como se verá a continuación, que la actividad matemática relacionada con esta función social tuviera un canal de entrada relativamente fluido. Al propio tiempo, la penetración de este tipo de temas permitió acceder a una corriente de investigación de naturaleza puramente teórica, la geometría proyectiva sintética: la importancia asignada al cultivo de estos estudios condicionó decisivamente -en el aspecto doctrinal- el incipiente proceso de consolidación de una investigación matemática independiente en España.

2.1. La actividad en Barcelona

Hacia 1880 se detectaba un considerable interés en la pequeña comunidad matemática catalana por los estudios de geometría proyectiva ligados a la estática gráfica. Entre estos cultivadores se contaba Angel del Romero Walsh (1823-1900), entonces coronel de ingenieros retirado y miembro de la Real

Academia de Ciencias y Artes de Barcelona, persona informada y dueño de una fornida biblioteca, por influencia del cual Santiago Mundí se interesó por la geometría proyectiva de Staudt y las reelaboraciones de Reye, Schröter, Cremona y Favaro⁸⁷. Otros académicos, como Rodríguez Carballo y Domenech, leyeron memorias en la Real Academia de Barcelona sobre la cuestión de las construcciones gráficas y las aplicaciones técnicas de la geometría⁸⁸. Pero la figura más activa iba a ser Mundí, desde su posición de profesor de la Universidad. En 1883 leyó una memoria titulada *Breves apuntes sobre los fundamentos histórico-filosóficos en que se apoya la geometría proyectiva*, en la que se refiere a la obra de Steiner, Chasles y Staudt y explica las conexiones con la geometría analítica, la geometría descriptiva y las aplicaciones a la mecánica⁸⁹. Convencido de la necesidad de introducir estos temas en la enseñanza, utilizó para exponerlos la asignatura recién creada bajo el título de Geometría general, optando al mismo tiempo, de este modo, por eliminar la geometría clásica elemental de la enseñanza universitaria⁹⁰. En el año 1884 apareció una edición autografiada de sus lecciones, preparada por cuatro de sus alumnos, bajo el título *Apuntes de Geometría de la posición*. En las líneas de prólogo escrito por Mundí es bien evidente qué motivaba en ese momento el interés por la *Geometrie der Lage* y cuáles eran las fuentes extranjeras privilegiadas⁹¹:

"Con publicar estas lecciones se hace un beneficio, no sólo a los alumnos de nuestra Universidad, sí que también a cuantos tengan necesidad de dedicarse al estudio de la Grafostática de Culmann, cuyas bases más naturales son el Cálculo gráfico y la Geometría de Staudt.

Aunque Reye y Favaro hayan hecho mucho para vulgarizar la Geometría de Posición, (*Geometrie der Lage*), del Euclides de los tiempos modernos, son aún sus obras, aunque muy notables, excesivamente condensadas y con pocas figuras para que sean comprendidas fácilmente por nuestros alumnos. En cambio, con estas lecciones se adquirirá sin dificultad ninguna, (así lo espero), la importantísima Geometría moderna, que ha reunido el caudal de conocimientos de las obras de Euclides, Apolonio y Pappus a la generalidad de la Analítica de Descartes".

Se funden en este comentario, por una parte, una visión histórica de la geometría proyectiva tal y como queda expuesta en el *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie* de Chasles, reeditado en Francia nueve años antes y considerablemente difundido en España: los métodos proyectivos constituían el escalafón más alto en un desarrollo continuado de la geometría, que recogían y permitían comprender mejor el significado de los resultados de la geometría clásica. Por otra parte, se mencionan los textos básicos de la recuperación de la geometría proyectiva -y, especialmente, de los métodos sintéticos de von Staudt- en el ámbito de

las escuelas técnicas del área alemana; la *Geometrie der Lage* de Reye, publicada en dos volúmenes en 1866 y 1868, era el texto del curso que este autor impartía en el *Polytechnikum* de Zurich, y que precedía al curso de estática gráfica de Culmann⁹².

Los ingenieros industriales en Barcelona, por su parte, mostraron también interés por estos temas. Carlos M^e de Moÿ, presidente de la sección de Barcelona de la Asociación Nacional de Ingenieros Industriales, visitó Italia en 1885 y tuvo ocasión de conocer a Cremona, Saviotti y Dino. El ambiente italiano había tenido especial receptividad hacia las novedades alemanas, con la particularidad de que éstas habían merecido el interés no sólo de las escuelas de ingenieros sino también de matemáticos como Cremona, comprometidos en la renovación educativa y científica del país. Favaro había publicado un texto de estática gráfica, cuyo primer volumen, dedicado a la geometría proyectiva, fue considerado por Reye una mera traducción no autorizada de su obra⁹³. Pero la inspiración de Moÿ era sobre todo la famosa obra *Elementi di geometria proiettiva ad uso dei Istiuiti Tecnici del Regno d'Italia* de Cremona, aparecida en 1873 y a su vez abundantemente traducida, obra que de hecho pretendía extender el estudio de la geometría proyectiva a niveles inferiores al universitario. En 1889 el ingeniero catalán publicó un curso de Geometría proyectiva, prologado por Favaro, al que pretendía hacer seguir dos nuevos volúmenes sobre cálculo gráfico y estática gráfica⁹⁴. En el prólogo, tras indicar las numerosas escuelas técnicas que han introducido la asignatura de estática gráfica en toda Europa, escribe⁹⁵:

"Este solo hecho, es más que suficiente para llevar el convencimiento al ánimo del más incrédulo, de que el estudio de la Estática gráfica es ya hoy indispensable, y que lo mismo que en las demás naciones es preciso establecer en España cursos completos de la misma, en nuestras Escuelas de Ingenieros".

Esta es su peculiar visión del interés que están despertando los métodos gráficos en el ámbito técnico y su repercusión en el trabajo de conocidos científicos europeos⁹⁶:

"Como todas las ciencias, han pasado las matemáticas por muchas vicisitudes, y bien puede decirse, desde que los más insignes matemáticos estimulados sin duda por el descubrimiento de Culmann, dejando a un lado cálculos interminables y fórmulas complicadísimas, se han dedicado por completo al estudio de la Geometría, que las matemáticas han entrado decididamente en la vía del progreso.

Incontestables son las ventajas que la Geometría tiene sobre el análisis, pues además de su sencillez y claridad, permite que las diferentes transformaciones hechas para obtener la solución de un problema, estén todas a

nuestra vista y que puedan seguirse sin dificultad alguna, todas las operaciones de que ha sido necesario valerse para obtener como resultado final dicha solución. (...)

Estas incontestables verdades, han hecho extender la esfera de acción de la Geometría de modo tal, que se ha ido sucesivamente apoderando de muchísimas cuestiones que antes eran exclusivamente del dominio del análisis".

Moÿ señalaba escrupulosamente las fuentes de su trabajo y su alcance, ceñido al objetivo antes indicado⁹⁷:

"(...) sus pretensiones no son otras que señalar el camino que deben seguir los que se dedican al estudio de las matemáticas, para que con más conocimientos científicos que los míos, ampliando y completando la presente obra, trabajen para que pueda pronto estar España, en este terreno, al nivel de las demás naciones".

Algunos indicios permiten afirmar un ulterior seguimiento por los ingenieros industriales de los temas de geometría aplicada. Así, por ejemplo, Viñas menciona los trabajos de geometría cinemática publicados en 1894 y 1899, en las Memorias de la Real Academia de Ciencias y Artes de Barcelona, por el profesor de la Escuela de Ingenieros Industriales Luis Canalda Bargués; éstos, no obstante, merecieron, una vez más, las críticas de Domenech⁹⁸. Las constantes polémicas se producen en un ambiente de creciente bloqueo. Mundí, tras su gran esfuerzo inicial, concentrado principalmente en la publicación de textos, no parece haber continuado sus estudios geométricos ni diversificado sus intereses: en el ámbito de la Facultad se produce un fuerte inmovilismo sólo roto por las discusiones -poco o nada fértiles- sobre las geometrías no-euclídeas y la noción de infinito. Domenech, junto a Clariana, había mantenido en los últimos años de siglo extravagantes posiciones sobre la misma noción de elemento del infinito, negándose a aceptarlo, a las que oportunamente respondió Mundí remitiéndose a los mismos orígenes de estos conceptos en Desargues, en un trabajo publicado en las Memorias de la Real Academia de Ciencias y Artes de Barcelona en 1898⁹⁹.

El pensamiento de Clariana sobre geometría y matemáticas puede servir para dar una idea de las actitudes que imperaban en este sector intelectual. Aun siendo catedrático después de Análisis Matemático, también él consideraba la geometría la disciplina reina de las Matemáticas. Así, en su trabajo sobre *el espíritu de la matemática en los tiempos modernos*, escribía¹⁰⁰:

"Por esto sólo a los métodos geométricos modernos nos atenemos, como quiera que ellos expresan en realidad de verdad el espíritu matemático también de nuestro siglo".

En este trabajo distingue, por una parte los trabajos de geometría descriptiva, iniciados por Monge y desarrollados posteriormente hasta empalmar con la geometría de la posición¹⁰¹:

"No cabe duda que la tendencia de esa geometría [descriptiva] hacia la superior, es notoria, a fin de darle forma científica, y evitar que pueda decirse de ella lo que dijo Chasles en cierta ocasión. Los trabajos realizados en Alemania y Bélgica son considerables para completar los principios de Monge, al objeto de formar un cuerpo de doctrina completa, resultando que la proyección cónica fundamento de la perspectiva, debe constituir la base de esta ciencia, sintetizada en la gavilla, que es una de las formas geométricas fundamentales correspondientes a las de segunda especie.

También entran en esas teorías modernas los principios de correlación, por ser de más alcance en las aplicaciones, que no la teoría homográfica, y de ellos se vale el Dr. Fiedler, además de la razón anarmónica, que forma la base de la homografía según Chasles. El célebre Staudt, en su obra 'Geometría (sic) der Lage' parte sencillamente de la forma anarmónica derivada del cuadrilátero completo, obteniendo sólo así, resultados sorprendentes. (...)

Esto nos lleva como de la mano a hablar algún tanto de esa geometría de posición, superior, general, proyectiva, derivada etc. o como quiera llamarse, que tiende hoy a unirse estrechamente con la geometría descriptiva".

Tras referirse a la obra de Carnot, *como fuente de las teorías que profesan los más respetables geómetras*, continúa¹⁰²:

"Así se abre en nuestro siglo una nueva era para la geometría proyectiva, dándose a conocer Brianchon que completa el principio de Pascal, luego Möbius, Bellavitis, Cremona, Culmann, Reye; y por fin Zech, Gaskin, Poudra, Fiedler, Staud (sic)".

Se remite de este modo a la tradición de estudios ya citada, con el añadido de Fiedler, cuya obra será retomada en profundidad por Torroja. Inmediatamente aparece la referencia a las geometrías no euclídeas¹⁰³:

"Adviértase que en general las doctrinas sostenidas por esos geómetras, hállanse íntimamente relacionados (sic) con la Geometría de Riemann, perteneciente a la escuela de los pseudo-geómetras, última etapa de los pangeómetras; escuela que se separa ya de los principios de Carnot, así como de la verdadera y sana filosofía que debe guiar a una ciencia que por antonomasia se designa bajo el nombre de exacta".

Continúa, explayándose más aún:

"Los nuevos géómetras correspondientes a la escuela trascendentalista o sean los pangeómetras, a pesar de partir de lo empírico, alcanzan el espacio meta-geométrico de los pseudo-geómetras, donde ni los conceptos, ni la imaginación humana, pueden nada, ni mucho menos la experimentación: consecuencia de suyo bastante anómala. Gauss, Riemann y Lobatschewsky, tratan de crear un sistema geométrico independiente de los axiomas de Euclides sobre las paralelas, y en verdad que no dejan de ser curiosos los párrafos que Stallo copia de esos géómetras, en donde se puede apreciar cuál es la fe de los nuevos sacerdotes en la ciencia matemática. Hay quien afirma que los teoremas de Lobatschewsky, Riemann, Helmholtz y Beltrami, forman la única base de la teoría completa y exacta del paralelismo; el entusiasmo llega hasta el punto de exclamar Cliford, que Lobatschewsky es respecto de Euclides lo que Copérnico de Ptolomeo".

Antes de mencionar la teoría de los cuaterniones y el cálculo vectorial, que considera el más fecundo y digno de aplauso, señala abiertamente los errores de las anteriores teorías; se trata de una postura que se puede considerar clásica -ligada a la sólida imagen de la física-matemática clásica y donde la geometría está profundamente relacionada con la Naturaleza-, que se opone al alejamiento de las matemáticas de la esfera del mundo físico en lo que parecen vanas abstracciones sin conexión con la realidad¹⁰⁴:

"Si en nuestros conceptos matemáticos, perdemos la comprobación del mundo real, trabajamos a ciegas, llevando la ciencia por sendas tortuosas y extraviadas, que no ofrecen más que ráfagas luminosas a manera de efectos de fantasmagoría, que se pierden en medio de la noche oscura y tenebrosa. En las ciencias exactas a la par como en las bellas artes, debemos siempre procurar situarnos en la línea de intersección de las dos esferas, representantes del mundo real y del de las ideas".

Este alejamiento será cada vez mayor y en el primer tercio de siglo se manifestará como una tendencia imparable de las matemáticas. En Clariana se entremezcla con elementos ideológicos católicos en un modo algo artificioso; se trata, no obstante, de la percepción de un matemático en un núcleo científico periférico¹⁰⁵:

"Vamos a terminar, por fin, manifestando que las dificultades inmensas que aún se presentan en el vasto campo de la ciencia Matemática para obtener la solución de cuestiones que podríamos llamar fundamentales, dependen sin duda de que varios distinguidos matemáticos, o han considerado la filosofía del cálculo como cosa inútil, o han pertenecido a escuelas filosóficas completamente perjudiciales para poder andar con desahogo por la senda de la verdad.

En este estado, pues, sólo cabe una esperanza, y es que se agrupen los científicos que se honran con el títulos de católicos para que inspirados por una

sana filosofía y con una fe viva en el corazón, logren con tiempo y constancia, el poder afirmar el zócalo de ese templo que se pretende levantar al Señor, como digno ofrecimiento a los beneficios que nos dispensa en dejarnos entrever la sublimidad de su sabiduría infinita al constituir el todo armonioso y admirable de la Creación".

Para empeorar las cosas en Barcelona, el plan de estudios de la licenciatura en matemáticas implantado en 1900, debido al fuerte centralismo y por influencia del grupo de poder madrileño, obedeció, en lo que se refiere a la geometría, no a las orientaciones de Mundí, sino a las de Torroja y sus discípulos; de este modo, la asignatura de Geometría acumulada al catedrático de Geometría analítica pasó a ser especificada como una asignatura de Geometría métrica, creándose una nueva asignatura de Geometría de la posición acumulada al profesor de Geometría descriptiva. Este último era, en Barcelona, precisamente Domenech. En cualquier caso, Mundí siguió considerando que la geometría métrica correspondía a la enseñanza secundaria y explicando en sus clases geometría proyectiva¹⁰⁶. No sabemos lo que enseñaba Domenech en Barcelona, pero no parece que en los primeros años de siglo se movieran muchas cosas en la capital catalana.

2.2. Eduardo Torroja y el grupo de la Universidad Central

Torroja, el matemático más influyente del último cuarto de siglo en España, representa una de las primeras figuras de científico *puro* en el país. Movido, como Mundí, por un cierto interés por la reforma de la enseñanza de la geometría, encontró en la geometría sintética el campo mejor de su sensibilidad como matemático. Así se expresaba ante la Real Academia de Ciencias de Madrid con ocasión de su ingreso en la prestigiosa corporación en 1893¹⁰⁷:

"Las verdades geométricas tienen para mí especial encanto, no sólo cuando admiro la belleza y transcendencia de las más importantes, sino también al contemplar la sorprendente armonía que del conjunto de todas ellas resulta. Entre ellas hay algunas ciertas y evidentes, no susceptibles de demostración, que forman como la base o suelo firme en que asienta todo el edificio científico; otras fundamentales, inmediatamente derivadas de las anteriores, constituyen el cimiento que apoya el verdadero cuerpo de la construcción, compuesto éste de todas las que dan la parte utilizable, a donde acuden en demanda de amparo otras muchas Ciencias o Artes. Por último, encuéntrase otras que sirven de enlace a las diversas partes y ponen de manifiesto la unidad del conjunto, las cuales aparecen como coronación y remate del edificio, desdeñosamente miradas por algunos que, no viendo inmediata su aplicación a las Artes o a otras Ciencias, las juzga simples figuras decorativas, sin fijarse, en su mezzquina manera de ver, en que las que hoy parecen simple remate, pueden bien pronto convertirse en base sobre que se levante nuevo cuerpo de edificio, desde el cual, como situado

a mayor altura, se difundan sus benéficas aplicaciones a campos mucho más dilatados. Que no es el edificio científico como las pobres construcciones materiales, destinadas a un uso concreto previamente determinado, cuyo plan completo concibe el arquitecto, y que, una vez terminadas, se enriquecerán acaso con algunos detalles de ornamentación, pero sin que puedan en manera alguna modificarse sus líneas generales ni sus agujas terminales".

Torroja nació en Tarragona el 10 de marzo de 1945, hijo de Juan Torroja, a la sazón preceptor de educación primaria y natural de Reus y Josefa Caballé, natural de Tortosa¹⁰⁸. Fue *hijo cultural* de la Ley Moyano: en 1861 obtuvo el grado de Bachiller en Artes en el Instituto provincial de segunda enseñanza en su ciudad natal; y continuó sus estudios en la Facultad de Ciencias de Madrid, donde obtuvo el grado de Bachiller en Ciencias en 1864 y el grado de Licenciado en Ciencias, sección de Exactas dos años más tarde con la máxima calificación¹⁰⁹.

Torroja permanecería ligado en adelante a la Universidad Central, salvo un breve paréntesis en la Universidad de Valencia¹¹⁰. En octubre de 1868 fue nombrado Auxiliar con destino en la sección de exactas por el Claustro de la Facultad de Ciencias y un año más tarde *sustituto* en la asignatura de Geometría descriptiva (cátedra ocupada a la sazón por Elizalde), cargo que desempeñó durante casi un lustro. Ambas tareas fueron llevadas adelante sin percibir remuneración alguna, aunque, desde julio de 1869, simultaneó su labor en la Facultad con la de Ayudante del Observatorio Astronómico de Madrid, plaza para la que fue nombrado por oposición y por la que recibía 1.000 escudos anuales. En este centro colaboró con Miguel Merino, con el que participó -en el otoño de 1872- en la triangulación geodésica de España emprendida por el general Carlos Ibáñez e Ibañez de Ibero (1825-1891), ocupándose de la determinación astronómica de la latitud del vértice "Diego Gómez" (correspondiente a la triangulación geodésica de primer orden en la provincia de Salamanca) y de la determinación del azimut que une dicho punto con el situado en el pico Peña de Francia¹¹¹.

En ese mismo periodo, en octubre de 1869, superó el ejercicio final de la carrera de Arquitectura, iniciándose una gran vinculación con la Escuela de Arquitectura de Madrid. En 1871 y 1872 fue nombrado por el Claustro de profesores miembro extraño al profesorado en los tribunales de las asignaturas de Mecánica Aplicada, Topografía y Mineralogía. Tras alcanzar -en febrero de 1873- el grado de Doctor en Ciencias, sección de Exactas, obtuvo la cátedra de *Complementos de Algebra, Geometría, Trigonometría rectilínea y esférica y Geometría analítica de dos y tres dimensiones* de la Universidad de Valencia. Finalmente, en enero de 1876 fue designado, tras oposición¹¹², para ocupar la cátedra vacante por la muerte de Elizalde¹¹³. La segunda cátedra de geometría

de Madrid, como se ha indicado, estaba ocupada entonces por el también profesor de la Escuela de Ingenieros de Caminos Ignacio Sánchez Solís.

En el *Programa* de la asignatura, redactado en noviembre de 1875, algunos comentarios de Torroja remiten al problema de la relación entre teoría y aplicaciones¹¹⁴. Advierte en primer lugar que se limitará a exponer uno entre los muchos sistemas de representación, marcando la aún desdibujada línea divisoria entre el científico y el técnico; esta insistencia en separar ambos campos aun señalando sus interrelaciones es caracterísitica de la personalidad científica de Torroja y es, además, su mayor contribución al ambiente matemático español:

"De este modo, el pintor y el escultor, el arquitecto y el ingeniero, el topógrafo y el geógrafo, el físico y el mecánico, reclamarán cada uno un sistema que se adapte con ventaja a sus perentorias necesidades; y el que, prescindiendo de toda aplicación de la ciencia geométrica, estudie las propiedades generales a todas las líneas y superficies o las peculiares e inherentes a tal o cual familia, género o especie determinada, sin bien debiera utilizar indistintamente todos los sistemas según sea la superficie que por el momento le ocupe, preferirá entre todos ellos, lo mismo que hace en la Geometría analítica, el que le parezca de más general aplicación o de procedimientos de ejecución más sencillos y expeditivos".

Con motivos de esta índole justifica el no incluir el sistema de los planos acotados:

"El sistema de planos acotados, que en algunos tratados de esta asignatura se expone, me parece de aplicación ya muy concreta y determinada y no indispensable por tanto en una cátedra de la Facultad de Ciencias, como lo sería en la de alguna de nuestras Escuelas especiales (...)"

Indica así mismo que la Geometría descriptiva continúa, como es usual, más allá del estudio del método de las proyecciones; y se inclina claramente por completar los estudios con aspectos de los estudios geométricos sintéticos, esto es, puramente geométricos o sin uso de coordenadas:

"se comprende también en ella el estudio de las propiedades generales de las líneas y superficies y aun el de las particulares a cada una de ellas, bajo un punto de vista puramente geométrico y con exclusión casi absoluta de consideraciones algebraicas; y al proceder de esta manera, no sólo se perfecciona el instrumento, acostumbrando la mente y aun la mano a su uso, sino que se prepara, al mismo tiempo, el terreno para que pueda caminarse sin tropiezo en las importantísimas aplicaciones del mismo (...)"

En esta parte de la asignatura propone el estudio de: 1) rectas y planos, 2) generación y representación de superficies curvas y sus planos tangentes, intersecciones y contactos y 3) curvatura de superficies y contactos de segundo orden, y, en particular, superficies regladas, desarrollables, de revolución, helicoidales y de segundo grado,

"pareciéndonos completamente excusado encarecer en este lugar la importancia de las superficies comprendidas en cada uno de ellos, tanto por sus notabilísimas propiedades geométricas, como por las innumerables aplicaciones que de ellas se presentan a cada paso ya en la Física en sus diversas secciones, pero muy especialmente en la Óptica y en la Mecánica y Astronomía, ya en la multitud de artes que a las ciencias geométrica y mecánica demandan continuo y eficaz auxilio".

Desde este mismo año comenzó una continuada labor oficial en la enseñanza universitaria española. En octubre de 1876 fue vocal del tribunal de examen libre de las asignaturas del tercer grupo de la sección de Exactas; en febrero de 1877 fue nombrado por vez primera vocal de un tribunal de oposiciones a Cátedra, la correspondiente a Complementos de Álgebra y Geometría analítica de la Universidad de Granada. Con su nombramiento en la última década de siglo como Consejero de Instrucción Pública se activó esta faceta¹¹⁵.

Excepcional debía de resultar a sus coetáneos la inclinación de Torroja por la ciencia pura y su elección universitaria en lugar del ejercicio de la arquitectura. A partir de su instalación en Madrid inició un ritmo no especialmente intenso pero sí constante de publicación, ligado preferentemente a sus ocupaciones didácticas y su preocupación por el retraso matemático del país¹¹⁶. Se delineaba con él, en efecto, como contemporáneamente con García de Galdeano -en cuya revista colaboró en la última década de siglo-, la figura de matemático profesional con inclinación hacia la investigación matemática independientemente de sus aplicaciones. Los textos, por otra parte, le permitieron ascender puestos en el escalafón, con el correspondiente y significativo aumento de la escasa retribución.

Publicó sus primeros trabajos de geometría en la *Revista de los profesores de ciencias* publicada en Madrid (1874 y 1876) y en los *Anales de la construcción y de la industria*, donde aparecieron una serie de artículos sobre perspectiva axonométrica, recogidos después en un libro (1879). Se trata de cuestiones sobre sistemas de representación de interés aplicado del tipo de las que se ocupaba en su cátedra madrileña, en la que se sigue la nueva exposición de la geometría descriptiva -en relación orgánica con la geometría proyectiva- propuesta por Fiedler¹¹⁷. Sin lugar a dudas, Torroja era en los años ochenta un especialista en geometría proyectiva bien informado de lo que hacían sus

colegas extranjeros y la obra de Fiedler correspondía a sus propias aspiraciones de renovar los estudios geométricos de la facultad de ciencias, aun teniendo en cuenta su vinculación a la formación de ingenieros. La obra alemana, preparada para los estudios de ingeniería, pretendía responder a la exigencia de las *Technische Hochschulen* alemanas de dar a los futuros ingenieros una formación científica de alto nivel, y optaba por, en lugar de relegar la geometría descriptiva a las materias preparatorias, impartirla en conexión con los estudios de geometría proyectiva.

Este texto dedicado a la axonometría le permitió alcanzar la categoría de ascenso como catedrático con dictamen favorable del Consejo de Instrucción Pública de ese mismo año¹¹⁸:

"(...) la materia de que trata, si no completamente nueva, es por lo menos desconocida en nuestro país.

De algunos principios de la Axonometría se ocupó ya Lambert en 1759 pero de una manera incidental, sin que nadie reparase en el fruto que aquella semilla contenía, y fue preciso aguardar al año 1840, para que apareciese ya un cuerpo de doctrina, muy limitado en sus explicaciones prácticas, y solo al caso de la perspectiva isométrica. En 1857 fue cuando se dio grande importancia en Alemania a las ventajas que ofrecía esta representación axonométrica para las Artes de construcción, sin que hasta ahora se haya publicado nada sobre este punto en nuestra vecina Francia, y sí en Bélgica por Breittient bajo un punto de vista distinto del seguido por el profesor de la Universidad Central.

En el capítulo 1º del libro que analizamos el cuadro de los diferentes sistemas de representación, considerados como casos particulares de la transformación homológica, presenta algunas ideas nuevas y una exposición más elemental de la que aparece en otras obras modernas alemanas, que son la únicas que en este asunto se tratan con extensión.

Los problemas fundamentales de la Axonometría están tratados en la obra del Señor Torroja con más generalidad que en los diferentes tratados que se ocupan de esta materia, lo cual permite formular los problemas que pueden ocurrir, prescindiendo de que su aplicación sea más o menos frecuente en la práctica".

De acuerdo con el nuevo planteamiento de la geometría descriptiva, Torroja comenzaba su curso con una cada vez más extensa exposición de las ideas fundamentales de la geometría proyectiva. En un principio debió seguir la tradicional exposición de Chasles, como se muestra en la publicación de una parte de sus lecciones del curso 1879-80, donde se tratan las relaciones proyectivas entre figuras de primera o de segunda categoría. Torroja examina la generación de figuras geométricas a partir de otras de orden inferior.

Introduce una coordenada en series rectilíneas o haces (figuras de primera categoría) por medio de la razón doble y llama proyectivas a las que pueden ser colocadas en posición perspectiva; trata después los elementos imaginarios y la involución. Para el plano y las figuras de segunda categoría introduce coordenadas siguiendo a Fiedler y llama proyectivas a aquellas determinadas por figuras de primera categoría proyectivas entre sí; demuestra que si cumplen esta propiedad, son homográficas (proyectivas en el sentido de Chasles), y estudia afinidad, semejanza, homología y homotecia como casos particulares de la homografía.

Este equilibrio, o la iniciativa de Mundí en Barcelona era, en efecto, el único permitido por la coyuntura; como señalaba Francisco Arillaga en 1893¹¹⁹:

"Y eso que la Universidad, para tales reformas, no goza de completa libertad; y no es cosa llana en ella aumentar una enseñanza.

Menester ha sido entender con lata interpretación cuál debe ser el contenido de la asignatura de Geometría Descriptiva, y formar de ésta un curso en que, antes de llegarse a su particular objeto, se enseñe a los alumnos la parte general de lo que hoy se da como Geometría superior, como Geometría de la posición, o como Geometría proyectiva."

Torroja siguió desarrollando esta idea, aunque dejando de lado a Chasles y apoyándose en Staudt y Reye, en consonancia con el nuevo enfoque que ya en su primer libro había considerado¹²⁰. Este enfoque definitivo apareció publicado en forma de texto autografiado en 1884, como primera parte de un *Programa y Resumen de las Lecciones de Geometría descriptiva*. Este texto, como los apuntes de Mundí de 1884 y el libro publicado en 1889 por de Moÿ -quien incidía en la necesidad de introducir estos estudios en las escuelas superiores de ingenieros-, hicieron accesible al lector español la geometría proyectiva tal como era expuesta en aquel momento en los centros alemanes e italianos de enseñanza superior.

En el último periodo de su vida, Torroja adquirió un enorme prestigio. Elegido miembro de la Real Academia de Ciencias en 1891, en 1892 el texto *Programa y resumen de las lecciones de geometría descriptiva* recibió informe favorable -solicitado por el autor tres años antes- del Consejo de Instrucción Pública, que la consideró de utilidad para la enseñanza universitaria de la Geometría Descriptiva, superior o moderna y de mérito en la carrera del autor¹²¹:

" (...) las poderosas razones que al Señor Torroja han asistido para animarle a romper los añejos y mezquinos moldes de la Geometría descriptiva,

y adoptar otros novísimos, [ilegible] *más amplios y más apropiados a las sin cesar necesidades crecientes y aspiraciones legítimas de la ciencia pura*. La geometría de Monge, utilísima para el Ingeniero y el Arquitecto y para cuantos al arte de la Construcción y al ejercicio de las artes industriales se consagran, se hallaba como cohibida en su desenvolvimiento progresivo por el concepto demasiado pobre que de su objeto y trascendencia científica se tuvo durante mucho tiempo. Como en germen palpitaba en ella otra Geometría de orden superior, que poco a poco se ha ido constituyendo y ensanchando y de la cual forma la primitiva mínima parte, o como derivación secundaria, aunque siempre de importancia [ilegible] en el terreno de las aplicaciones apuntadas. Transformación sorprendente debida a las iniciativas fecundas y trabajos admirables de eminentes matemáticos, franceses y alemanes, principalmente, del siglo actual y casi contemporáneos nuestros, y en todas las naciones civilizadas acogida con merecido aplauso".

En el dictamen se afirmaba que la obra *en la menguada literatura científica de nuestra patria merece ocupar, y efectivamente ocupa sin recomendación extraña por parte de nadie, y como resultado inevitable de mucho valor intrínseco, lugar de preferencia*. En 1899 Torroja publicó, en colaboración con Vegas¹²² un nuevo texto de geometría proyectiva. Sus últimos trabajos son los publicados en las *Actas de la Asociación Española para el Progreso de las Ciencias* y en la *Revista de la Sociedad Matemática Española*, asociaciones en las que ocupó cargos honoríficos. De este modo, la labor matemática de Eduardo Torroja alcanzaría un enorme prestigio y gozaría de una influencia casi absoluta en España.

Probablemente la expresión más clara de la concepción de la geometría que animaba a Torroja se encuentra en los párrafos finales de su discurso de ingreso en la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales en 1893. Se considera en él, por una parte, la tradición de vinculación de la geometría con las aplicaciones, que la convierten -junto con la física-matemática-, en la representación mejor de una visión clásica de las matemáticas¹²³:

"Pero, si (...) descendemos a las aplicaciones, saltan a la vista las ventajas que la Geometría pura presenta sobre la analítica; ventajas que han hecho que en todo tiempo, y cada vez con más decidido empeño, la prefiriesen los hombres prácticos en la resolución de todos los problemas que tienen relación directa o indirecta con la Geometría.

De la Geometría pura se vale el artista en todo lo referente a la Perspectiva lineal que utiliza el pintor, y a la perspectiva relieve indispensable al escenógrafo, y de que tanto partido sacan el escultor en la composición de los bajo-relieves y el arquitecto para estudiar la conveniente disposición de las diferentes partes de una construcción, destinadas a producir determinado efecto.

A ella acude exclusivamente el constructor en todos los problemas referentes a la Estereotomía; a ella pertenecen, y no siempre a sus teorías más elementales, muchas de las cuestiones de la Cristalografía, de la Óptica geométrica, de la Cartografía y de tantas y tantas otras ciencias que sería prolijo enumerar".

Esta tradición ha sido renovada en años recientes, encontrándose nuevas aplicaciones gracias a las construcciones gráficas:

"Y no sólo en estas cuestiones de pura Geometría que constituyen el terreno propio de esta ciencia, sino también en otras muchas de carácter mixto, y aun en algunas que parecen más propias del Cálculo que de la Geometría, se aplica ésta con ventaja en muchas ocasiones. Porque las construcciones gráficas que proporciona la geometría pura, no sólo son más sencillas e intuitivas que los cálculos que pueden llevar al mismo resultado, sino que tienen sobre ellos la ventaja de hacer más difíciles las equivocaciones y más fáciles de descubrir cuando ocurriesen. Y si bien los resultados del cálculo pueden alcanzar mayor grado de aproximación que la proporcionada por las construcciones gráficas, ésta es más que suficiente en todas las aplicaciones de carácter práctico, aparte que aquella mayor aproximación es más ilusoria que real, puesto que, salvo rarísimos casos, la falta de precisión del resultado, más que del procedimiento aritmético o geométrico que se emplea para deducirlo, procede de la que en sí mismos entrañan los datos de observación o experiencia que les han servido de punto de partida.

Por esto la representación y el cálculo gráfico, que tienen su base en las doctrinas de la Geometría pura, encuentran cada vez más partidarios y ensanchan el campo de sus aplicaciones; hasta el extremo de que apenas se encuentra hoy una ciencia de la observación que no los utilice, no sólo para poner de manifiesto los resultados de sus observaciones, sino también para combinarlos y deducir de ellos las consecuencias a que naturalmente conducen".

Se observan aquí argumentos que también de Moÿ utilizaba, sobre el papel que la geometría proyectiva esta desempeñando en contextos que parecían reservados al análisis. Se mencionan, por supuesto, los cambios en la enseñanza técnica de los años setenta y ochenta:

"Dígalo si no, para no citar más que un ejemplo, la Estática gráfica que con su aplicación al cálculo de la resistencia de materiales, ciencia enteramente nueva, creada por Culmann, como aplicación de la Geometría de la posición de Staudt, pocos años después de llegar esa obra a su conocimiento; ciencia que sustituyendo por trazados gráficos sencillos los prolijos cálculos de resistencia empleados hasta hace pocos años, prepara una completa reforma en la enseñanza de las escuelas técnicas, dando en ellas la preferencia a los estudios de Geometría pura sobre los de Cálculo, que dominaban casi por completo".

Conviene hacer notar, no obstante, que en Torroja se detectan ya aspectos de la mentalidad del matemático *puro*, acuñada en los centros científicos alemanes, en parte como herencia del influjo de la corriente del idealismo; ligado, en su caso, a aspectos de un pensamiento católico¹²⁴:

"Poco podía pensar Staudt, cuando componía su obra, guiado únicamente por el deseo de dar a la Geometría más amplia y sólida base, en esta aplicación que tan pronto debía hacerse de las teorías en ella consignadas: lo cual es ciertamente un ejemplo muy apropiado para estimular al estudio de las cuestiones puramente científicas, y darles el más amplio desarrollo de que son susceptibles, prescindiendo de que puedan o no encontrar aplicaciones prácticas; y también para contestar a aquellos que no dan importancia a los trabajos científicos de carácter elevado si no ven enseguida sus aplicaciones, y aun con preferencia, las que contribuyen a aumentar nuestras comodidades y fomentar este refinamiento de la vida material que, para no pocos, da la medida exacta del grado de civilización de un pueblo. ¡Como si el espíritu no distase infinitamente de la materia, y en igual proporción no aventajasen los adelantos intelectuales, y más aún los morales, a los puramente materiales!".

De este modo, Torroja, a partir de sus primeros trabajos en torno a sus preocupaciones docentes en geometría descriptiva, comenzó a interesarse por cuestiones teóricas de geometría proyectiva en la línea de Staudt. Del discurso de ingreso en la Real Academia de Ciencias de Madrid se desprende una actitud de Torroja hacia la geometría del siglo XIX exenta de posiciones polémicas como las que caracterizaban a alguno de sus colegas barceloneses. Así, al mencionar la traducción recíproca de propiedades geométricas en propiedades algebraicas, se refiere a la introducción natural de espacios n -dimensionales¹²⁵:

" (...) consorcio admirable que tanto ha contribuido a ensanchar el campo de la Geometría a medida que iba progresando la teoría de las funciones y de las formas algebraicas, y también a llevar al estudio de éstas el grado de claridad, en cierto modo intuitiva, propio de la Geometría.

Es tan grande para el Algebra esta ventaja que, lamentando algunos analistas no poder traducir al lenguaje geométrico las propiedades de las funciones de más de dos variables independientes, han ideado esos espacios de cuatro o más dimensiones, desprovistos por completo de realidad objetiva, pero que contribuyen poderosamente a estimular el descubrimiento de notabilísimas propiedades de las ecuaciones diferenciales de un número cualquiera de variables, y permiten enunciarlas con sencillez mediante el lenguaje geométrico, por corresponder a otras ya conocidas de las líneas y superficies del espacio de tres dimensiones: propiedades que, de otro modo, no se hubieran quizá descubierto ni sería fácil apreciar en toda su extensión".

Por otra parte, al tratar la introducción de los elementos del infinito, expone cómo es independiente del axioma de las paralelas, esto es, se puede desarrollar un cuerpo de teoría sin suposición ninguna sobre el paralelismo, y a continuación señala el significado de las diversas geometrías euclídeas y no euclídeas¹²⁶:

"Atiéndase a que todo lo dicho es independiente de que en un plano haya una o muchas rectas que pasen por un punto y no corten a otra del mismo plano; es decir, que cada recta contenga uno o muchos puntos impropriamente tales.

Si, conformándonos con el postulado de Euclides, admitimos un sólo punto impropriamente tal en cada recta, con lo anterior tendremos la base de la teoría de las paralelas, y a dicho punto llamaremos, con Staudt, la dirección de la recta, o su punto del infinito. Sobre cada plano habrá una sola recta impropia, que es su orientación o su recta del infinito; y en el espacio habrá un solo plano impropriamente tal, plano del infinito, que contiene todas las direcciones y orientaciones posibles.

Pero si admitimos que por un punto exterior a una recta pasan varias que no la corten, estando todas en un plano, habremos de admitir en toda recta infinitos puntos impropios; y las rectas que los proyectan desde aquél punto forman un ángulo plano completo que, junto con el de las proyectantes de los puntos propiamente tales, constituyen todo el haz. De tal modo, que los últimos puntos están separados de los primeros, por los que corresponden a los lados de dichos ángulos, los cuales suelen llamarse puntos del infinito de la recta. En este caso, todo plano contiene infinitas rectas impropriamente tales, y en el espacio existen infinitos planos que merecen esta misma calificación.

Por último, si supusiésemos que dos rectas de un plano se cortan siempre, cualquiera que sea su posición relativa, esto equivaldría a admitir que no existe punto alguno, ni recta ni plano impropios o en el infinito. Estos tres supuestos corresponden a las llamadas por algunos respectivamente Geometría parabólica, hiperbólica y elíptica".

No obstante, en su magisterio y en sus estudios Torroja se concentró casi exclusivamente en los métodos sintéticos en geometría proyectiva, entonces, por lo demás, muy en boga. En definitiva, lo que Rey Pastor calificaba todavía en 1916 de *revolución geométrica operada en España por medio de Torroja*¹²⁷, esto es, su apego a la obra de Staudt y la geometría sintética, consistió pues esencialmente en que Torroja se alineó con un modo de ver el quehacer matemático y, en particular, geométrico, que, en la segunda mitad del siglo iba a discurrir por vías secundarias pero que tuvo un nutrido y militante grupo de representantes. Torroja no abordó los problemas más difíciles de la investigación sintética; su obra *Teoría geométrica de las líneas alabeadas y de las superficies desarrollables*, publicada en 1904 recoge un

conjunto de resultados sobre teoría de curvas en el sentido clásico, incluyendo algunos estudios de generación proyectiva de dichas figuras y otros sobre problemas de geometría diferencial tratados en modo sintético, al modo de los estudios franceses de geometría pura y aplicada a finales de siglo. El único resultado original de Torroja señalado por Alvarez Ude corresponde a la teoría de curvas desarrollada fervientemente por los seguidores de Cremona; se trata de una extensión de la noción de curvatura a los puntos del infinito, aparecida en un estudio publicado por Torroja por vez primera en una serie de artículos aparecidos en *El Progreso matemático* en 1894 y 1895¹²⁸.

En el discurso de ingreso en la Real Academia de Ciencias figuran, no obstante, referencias a algunos de los problemas más recientes en el ámbito teórico de la geometría proyectiva. En primer lugar, aparece una referencia a las cuestiones de fundamentación de la geometría proyectiva: tras ocuparse de las diversas definiciones de proyectividad, da cuenta de las publicaciones sobre la cuestión del teorema fundamental de la recta proyectiva que se sucedieron en los *Mathematische Annalen*, y remite a la exposición de Reye y a la traducción de Pieri de la obra de Staudt¹²⁹:

"Quien desee enterarse de esta interesante controversia, encontrará los principales documentos a ella relativos en la importante revista *Mathematische Annalen* de Leipzig, tomos VI, VII, XVII y XVIII.

La objeción a la demostración de Staudt puede formularse brevemente diciendo que pudieran ser dobles todos los puntos de la serie derivados de una de las redes de Möbius, es decir, todos los que con tres fijos dan razones anarmónicas conmensurables, sin serlo ninguno de los demás; en cuyo caso, ni habría en la recta ningún segmento cuyos puntos fuesen todos dobles, ni tampoco se podría encontrar en ella ningún segmento determinado que no contuviese puntos dobles en su interior; y, por tanto, no sería aplicable la demostración de Staudt.

La dificultad radica, pues, en la noción de continuidad, tan difícil de establecer, y que, donde quiera que interviene, suscita conflictos análogos. La manera de salvarla puede verse en la importante obra de Th. Reye, *Geometrie der Lage*, en cuya primera edición consignó la demostración de Staudt sin variación, pero en las sucesivas la modificó convenientemente; y también la traducción italiana que C. Segre ha hecho de la *Geometrie der Lage* de Staudt, en la que, por respeto al texto original, ha suplido con notas su deficiencia en este particular".

Además, el tema de la exposición puramente geométrica de la teoría de curvas y superficies algebraicas, es decir, la continuación de los trabajos de Staudt, interrumpidos en las tres últimas décadas de siglo, a excepción de la

obra de Kötter, es expuesto como problema básico de la investigación sintética¹³⁰:

"De modo que si la teoría puramente geométrica de las líneas y superficies de segundo orden está completa, y el estudio de las de tercero y cuarto orden se encuentra muy adelantado, la teoría general de las de un orden cualquiera está todavía en periodo de formación, a pesar de los importantes trabajos que a ellas han dedicado eminentes geómetras [cita a Kötter]; y no es de extrañar que así suceda atendida la dificultad del asunto, cuya exposición analítica presenta aún tantas nebulosidades.

Pero la experiencia de lo pasado nos permite abrigar bien fundada esperanza de que pronto se encuentren a igual altura las dos teorías, analítica y geométrica, de las líneas y las superficies, como ha sucedido con tantas otras a las cuales parecía adaptarse mejor una que otra de las dos formas de exposición de las verdades geométricas".

Torroja muestra aquí un nivel de información interesante en el campo de la geometría proyectiva, más aún si se tiene en cuenta que, como parece claro, jamás viajó al extranjero, y no debió mantener siquiera contacto epistolar con sus colegas europeos del periodo. El esfuerzo económico que los viajes podían suponer -y quizá el esfuerzo de vencer la inercia- sólo fue realizado por García de Galdeano, presente en los círculos internacionales del periodo: fue García de Galdeano sin duda quien transmitió en el ambiente matemático español la necesidad de entrar en contacto con el extranjero. Las preocupaciones de Torroja parecen haber sido muy otras: piénsese que, pese a una carrera universitaria considerablemente exitosa, en octubre de 1887 solicitó y obtuvo autorización para dedicarse a la enseñanza privada de las asignaturas del examen de ingreso en la Escuela preparatoria de Ingenieros y Arquitectos creada en 1886¹³¹ y en la Escuela Superior de Arquitectura¹³². En cualquier caso, Torroja formó en Madrid en las dos últimas décadas de siglo una grupo de discípulos, entre los cuales el que más colaboró con él fue Miguel Vegas (1865-1943). La tesis doctoral de este último apareció publicada en 1888 bajo el título *Estudio geométrico de las líneas alabeadas y haces de planos de tercer orden*; en la introducción se remite explícitamente a la línea de estudio de Staudt¹³³:

"El estudio de la más arduas cuestiones geométricas, por procedimientos puramente geométricos por una parte, y las aplicaciones que de este estudio se ha hecho a la Geometría Descriptiva por otra, ponen fuera de duda la grandísima importancia que tiene en los momentos actuales la llamada por algunos Geometría superior. Así lo comprenden Alemania, Italia y Bélgica, que son las que en la actualidad van a la cabeza del movimiento científico, y a ella dirigen sus investigaciones sus geómetras; así lo entiende Francia, y Chasles, uno de sus matemáticos más eminentes, da a conocer en sus múltiples cuanto por

desgracia diseminadas memorias, una multitud de curiosas e importantes propiedades de líneas y superficies, aunque basándose en diferentes principios".

Colaborador de Torroja en ese periodo fue también Cecilio Jiménez Rueda (1858-1950), que fue nombrado en 1888 Auxiliar Numerario de la Facultad de Ciencias de Madrid, cargo al que acumuló desde 1892 el de Ayudante de Dibujo. Tras ganar la cátedra de Valencia en 1896, permaneció en dicha ciudad cuatro años y volvió a Madrid como catedrático de Geometría métrica. Se formó también con él José G. Alvarez Ude (1876-1958), catedrático de Geometría descriptiva entre 1896 y 1916, fecha en la que se trasladó a Madrid; Alvarez Ude marca ya el inicio de una nueva generación de matemáticos, en unión del último y más notable discípulo de Torroja, Julio Rey Pastor (1888-1916), quien presentó su tesis doctoral, *Correspondencias de figuras elementales con aplicación al estudio de las figuras que engendran*, en 1908. En efecto, ni Vegas ni Jiménez Rueda debieron salir de España hasta 1912, en su poco brillante expedición al Congreso Internacional de Matemáticos de Cambridge¹³⁴. Sin embargo Alvarez Ude, que conoció a García de Galdeano cuando contaba apenas veinte años, viajó precozmente al extranjero. En 1910 obtuvo una pensión de la Junta para ampliación de estudios para viajar a Alemania¹³⁵, donde tuvo ocasión de conocer cómo se impartían las materias geométricas en las universidades alemanas: asistió a cursos de Knoblauch en Berlín (sobre *Geometría analítica* y sobre *Teoría de líneas y superficies*) y de Dochlemann en Munich (sobre *Geometría descriptiva* y sobre *Geometría proyectiva*).

Aunque no se conservan documentos sobre su relación con García de Galdeano, no cabe duda que Alvarez Ude supo aprender del veterano matemático: siendo discípulo de Torroja, su carrera científica tuvo un estilo radicalmente nuevo. Como fruto de su estancia en Alemania preparó unas lecciones sobre correspondencias geométricas, además de la traducción de la obra *Vorlesungen über der neurere Geometrie* de Pasch, realizada en colaboración con Rey Pastor, alumno suyo de geometría descriptiva el curso 1908-1909. Esta obra -que apareció en castellano prologada y completada por el propio Pasch- era, en efecto, pieza clave en el problema de la fundamentación y posterior axiomatización antes citada; con esta y otras iniciativas, a lo largo de su carrera científica, Alvarez Ude contribuyó notablemente a la introducción de nuevas ideas en geometría proyectiva y a la dirección de trabajos de investigación, básicamente en colaboración con Rey Pastor. Este, con sus ya patentes dotes y habilidad en cuestiones organizativas, se ocuparía de tramitar la publicación por parte de la Sociedad Matemática Española y la Junta para Ampliación de Estudios de la obra de Pasch; a su vez, viajó a Alemania e Italia en los años 1912, 1913 y 1914.

Rey Pastor se había formado en Zaragoza junto a García de Galdeano; a raíz de sus estudios de doctorado -realizados necesariamente en Madrid- comenzó a abordar algunos temas abiertos de la geometría sintética citados por Torroja; las palabras de introducción a su tesis doctoral dan idea de un cambio cualitativo producido en el ambiente matemático español, que culminarían en el despegue de la investigación autónoma en el país en el primer tercio del siglo XX¹³⁶:

"En la geometría llamada proyectiva hay dos sistemas didácticos y de investigación, si no opuestos, al menos muy diferentes: el creado por el insigne Staudt y seguido por Reye, Fiedler, Torroja, Sannia, Enriques, etc., que importó en nuestro país mi querido maestro señor Torroja; y el cultivado por Chasles, Jonquières, Cremona, Weyr, Capelli, Tognoli, etc. El primero, que constituye la geometría de la posición, se caracteriza por una gran rigurosidad en las demostraciones, independientes de toda consideración métrica. El segundo, si bien participa en gran manera del espíritu de aquél, admite ciertos postulados geométricos demostrables sólo algebraicamente, sacrificando un poco del rigor lógico en pro de la mayor fecundidad; a este sistema es debido casi todo lo que hoy se conoce de la teoría general de líneas y superficies. Para ver las diferencias que los separan, basta comparar las obras [*Geometrie del Lage* (1847)] y [*Beiträge zur Geometrie der Lage* (1856, 1857, 1860)] de Staudt con las [*Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane* (1862)] y [*Preliminari di una teoria geometrica delle superficie* (1866)] de Cremona, prototipos de uno y otro sistema".

En particular, Rey Pastor se ocupó de la continuación de los trabajos de Kötter y la definición geométrica de curvas mediante sistemas polares (en la *Teoría geométrica de la polaridad en las figuras de primera y segunda categoría*, presentada al concurso ordinario de la Real Academia de Ciencias correspondiente al año 1912), y del problema de la formulación puramente geométrica del teorema fundamental del álgebra, es decir, el problema de los imaginarios. Vegas se refirió a este tema en su discurso de ingreso en la Real Academia de Ciencias en 1909, en el que expuso las ideas concebidas por Staudt para aclarar la significación geométrica de las raíces imaginarias de las ecuaciones, citando también los trabajos de Kötter, Weyr y Grassmann:

"Pero la teoría del imaginarismo, perfectamente establecida y desarrollada en las figuras de primero y de segundo orden por el insigne Staudt, no ha llegado a establecerse de igual modo en las figuras de orden superior al segundo; pues si bien son muchos los esfuerzos realizados con este objeto y muchas las cuestiones relacionadas con esta materia que todos los matemáticos han suscitado, puede afirmarse que, en la actualidad, unos y otras no son más que hechos, importantes sin duda, pero que no llegan a constituir un edificio científico asentado sobre bases sólidas capaces de resistir los ataques de una crítica severa".

El problema de la geometría proyectiva compleja fue objeto de su última obra sobre estos temas, *Fundamentos de la geometría proyectiva superior*, publicada en 1916. El alejamiento de Rey Pastor de estos temas señala el final del predominio de la geometría proyectiva y los métodos sintéticos entre las preferencias de los matemáticos españoles; hacia 1920 se comenzaba a investigar en España en geometría diferencial, análisis y física-matemática. No obstante, la geometría proyectiva siguió manteniendo un lugar privilegiado en la enseñanza universitaria: esta situación condicionó notablemente la evolución de las matemáticas españolas en la primera mitad del siglo XX¹³⁷.

2.3. La geometría proyectiva en el plan de estudios de la sección de matemáticas de las facultades universitarias

El curso impartido por Torroja en la Universidad Central hacia mediados de los años ochenta debía ser verdaderamente extenso y se hacía imperiosa la necesidad de desdoblarlo. Como en Barcelona, la asignatura de Geometría introducida en 1880 propició un comodín para los cambios: Vegas y el propio Torroja consideraron esta reforma un gran paso adelante para el desarrollo de la geometría en España. Consideraremos a continuación cual fue su planteamiento¹³⁸.

Poco después de doctorarse Vegas ganó la cátedra de Análisis Matemático de Zaragoza, y ya en 1891 estaba de regreso en Madrid, donde sucedió a Ignacio Sánchez Solís en la cátedra de Geometría analítica. En 1894 publicó el *Tratado de Geometría analítica* en el que se estudia el espacio proyectivo de una, dos y tres dimensiones (formas de primera categoría, formas planas, formas en el espacio) usando diversos sistemas de coordenadas: cartesianas, plückerianas, además de trilineales y tangenciales (en el plano) y tétraédricas y tangenciales cuaternarias en el espacio. En la segunda edición, publicada en 1907, la exposición se complica más aún con la prolija inclusión de los resultados duales, como lo hacía Torroja, y el estudio de la polaridad; además de que las propiedades métricas aparecen siempre como casos particulares de las propiedades proyectivas. Con estas palabras describía el propio Torroja el libro de texto de su discípulo¹³⁹:

"No se atrevió aún en esta primera edición, sin duda por no creerse con suficiente autoridad, a estudiar, a la par de las figuras planas las radiadas del mismo orden, privándose con esto de abarcar las relaciones proyectivas entre las radiaciones, al igual de las de las figuras planas entre sí y las del espacio homográficas y correlativas entre sí, y en particular las involuciones y los sistemas polares planos y de los de tres dimensiones.

En cambio, en la segunda edición (1907), la transformación es ya completa: estudia, a continuación unas de otras, las figuras planas y las radiadas del mismo orden, y en cada una de ellas las que son correlativas, apareciendo idénticas las ecuaciones que expresan propiedades correlativas que se refieren a puntos y rectas de un plano y a rectas y planos de una radiación, y las que resuelven los problemas correspondientes a la mismas. (...)

En todas las cuestiones antepone las de carácter proyectivo, dejando para el segundo lugar las métricas, que se refieren a cada uno de los casos particulares más interesantes; y esto no sólo en las figuras de primero y segundo orden, sino también en las de orden superior, como ocurre al estudiar la curvatura de las líneas y superficies en general".

Según señala el propio Vegas, se hizo cargo de las enseñanzas de la asignatura de Geometría¹⁴⁰,

"pero siguiendo la marcha que yo consideraba la más apropiada a la manera de ser que le correspondía en el marco de las enseñanzas dadas en la Facultad de Ciencias. Admitiendo que no se debía hacer abstracción de las propiedades métricas de las figuras geométricas, y teniendo en cuenta que al Sr. Torroja le era imposible explicar con el cuidado que exige la teoría de líneas y superficies por la corta duración del curso de geometría descriptiva, me pareció que se debía separar de esta materia la geometría de la posición para incluirla en el curso de geometría general, explicando las propiedades métricas de las figuras geométricas como casos particulares de las propiedades proyectivas; y rogué al Sr. Torroja que publicara los trabajos sobre el tema hechos por él".

Todas estas *novedades* quedaron así plasmadas en letra de imprenta en un libro elaborado conjuntamente por Torroja y Vegas, *Tratado de geometría de la posición y sus aplicaciones a la geometría de la medida*, que apareció en 1899. De esta manera la *Geometría analítica* impartida por Vegas era de hecho en una relectura -con coordenadas- del curso anterior, rematada finalmente con las lecciones de descriptiva de Torroja en el último curso de carrera¹⁴¹:

"La transformación de la geometría analítica ha alcanzado de este modo en España su pleno desarrollo y es justo admitir que esto es debido principalmente a nuestro sabio y querido profesor Sr. Torroja, que en el capítulo de su primer tratado de geometría descriptiva que se refiere a la determinación de las figuras de 2ª y 3ª categoría, da las bases de los sistemas de coordenadas proyectivas gracias a los cuales la geometría analítica ha podido avanzar con paso firme y decidido por las nuevas vías que tan fecunda han hecho a la ciencia del espacio".

Un enfoque semejante fue adoptado por Jiménez Rueda en Valencia, donde publicó, en 1898, una obra para la asignatura de Geometría general, titulada *Tratado de las formas geométricas de primera categoría*, a la que sigue

el *Tratado de las formas de segunda y tercera categoría*. En el primero de ellos comienza con una exposición de los conceptos elementales de la geometría, que cree necesaria *siendo muy deficientes los conocimientos geométricos, que la mayoría de estos [alumnos de la facultad de Ciencias] suelen traer a las Universidades*; desarrolla después un curso de geometría proyectiva sintética¹⁴²:

"Y como las relaciones métricas de carácter proyectivo de Chasles y Steiner tienen también sus encantos, y son por donde, de un modo natural, entra en los dominios de la Analítica la Geometría Proyectiva, hemos juzgado conveniente no prescindir de aquéllas en absoluto, sino más bien armonizar ambas escuelas, la de Staudt y la de Chasles, aunque procediendo en orden inverso de como hasta aquí se ha hecho, esto es, exponiendo las verdades de la Geometría pura de Posición con absoluta independencia de toda noción anterior, y sin el concepto de cantidad, como hace Staudt; y fundando en ellas las relaciones de carácter métrico; lo que no sólo simplifica la exposición, sino que quita monotonía al conjunto y proporciona recursos de demostración enteramente nuevos y elegantes, como se ve en el curso de este tratado, y como se verá mejor aún en los de las formas de segunda y de tercera categoría.

Así creemos que esta asignatura responde a su fin en nuestra facultad de Ciencias, que no puede ser otro que servir de base a los estudios posteriores de Analítica y Descriptiva. Tal como está redactado nuestro curso, tiene además la ventaja de que puede prescindirse, si se quiere, de toda la parte métrica, sin que se rompa la trabazón y enlace de la parte puramente de la posición".

En el prólogo, Jiménez Rueda se refiere específicamente a las aplicaciones¹⁴³:

"Gracias al ilustre Culmann, es también hoy directamente aplicable la Geometría proyectiva al arte de la Construcción, llegando a ser substituidas en muchos casos, las complicadas integrales del cálculo de resistencias, por un simple dibujo.

Con los *diagramas recíprocos* de Maxwell y los *polígonos de fuerza y funiculares* de Culmann, entra de lleno aquella ciencia en los dominios de la Mecánica y de la Física; sin contar con las aplicaciones que de los haces y radiaciones proyectivas, puede hacer esta última en la teoría de la luz.

Así es, que si en 1869 pudo decir Jenkin, de los ingenieros de su época, que *pocos sospecharían* que esta doctrina pone a su disposición un método nuevo, notabilísimo por su exactitud y sencillez, hoy no podría sostener esa afirmación, porque la Geometría Proyectiva se enseña y aplica ya en casi todas las escuelas de Ingenieros.

Decimos todo esto, porque ya que no el amor a la ciencia por la ciencia, sea al menos su utilidad la que abra paso definitivamente en nuestra patria a teorías que se enseñaban en Alemania hace cincuenta años".

De este modo, lo que en inicio había sido la introducción más o menos afortunada de una nueva teoría dió lugar a una extraordinaria homogeneización de las enseñanzas de geometría en la Central; más aún, este planteamiento fue sancionado por el Plan García Alix para todo el país, con las inmediatas consecuencias que hemos señalado para la incipiente actividad -ignorada en Madrid- en la Universidad de Barcelona. Téngase en cuenta que tanto Torroja como Vegas ocuparon un cargo de consejero de Instrucción Pública¹⁴⁴:

"Los esfuerzos y los trabajos realizados por el Sr. Torroja obtuvieron eco entre sus alumnos, obteniendo la formación de una verdadera escuela de geometría en España, donde el Estado se ha visto obligado a modificar el plan de estudios de la Facultad de Ciencias y a dividir el curso de geometría general en geometría métrica y geometría de la posición".

El plan que abría el nuevo siglo incluía las siguientes asignaturas:

1. *Geometría métrica*, que en palabras de Jiménez Rueda, *no es otra que la geometría clásica de Euclides ordenada en la mayor medida posible e influida por la geometría moderna o sintética*.¹⁴⁵

2. *Geometría analítica*

3. *Geometría de la posición*

4. *Geometría descriptiva*, en el cuarto curso.

Se creaba además una asignatura de *Estudios superiores de Geometría*, pero exclusivamente en Madrid al ser una asignatura del doctorado. Esta cátedra fue acumulada inmediatamente a Torroja¹⁴⁶, a quien sucedió a su jubilación en 1916 Vegas. Torroja fue nombrado Catedrático honorario con voz y voto en las Juntas de la Facultad de Ciencias por Real Orden de 24 de enero de 1916. Los contenidos de esta asignatura, que podría haber servido para introducir una mayor variedad de teorías geométricas, no se apartarían mucho de la línea purista a la que Torroja se había adherido; Rey Pastor se lamentaría más tarde de que se le hubiera impedido impartir la asignatura¹⁴⁷.

La radical uniformidad de los temas geométricos que se estudiaban en Madrid contrasta con la situación en Zaragoza, donde, desde su asignatura de Complementos de Cálculo infinitesimal -creada en 1909, a iniciativa de la Universidad de Barcelona, en Madrid, Barcelona y Zaragoza- y con la

colaboración de Rius y Casas en los dos cursos de Análisis Matemático, García de Galdeano introducía una enorme variedad de temas; una descripción aproximada es brindada por Patricio Peñalver¹⁴⁸:

"Parmi tous ces programmes, celui qui a été rédigé par notre savant confrère M. Zoel García de Galdeano, est celui qui embrasse un plus grand nombre de théories, quoiqu'il n'exige que de légères notions sur toutes: dans son programme de Compléments, figurent les groupes de substitutions et de transformations, les ensembles de Cantor, la représentation conforme à la méthode de Schwarz, les surfaces de Riemann, le prolongement analytique, les intégrales hyperelliptiques et abéliennes, les fonctions polyédriques, modulaires, harmoniques, fuchsienes, hypergéométriques, et quantité d'autres théories que nous ne détaillons pas pour ne pas rendre ce mémoire interminable".

Bien percibía Zoel García de Galdeano que el panorama geométrico del siglo XIX se caracterizaba por una enorme pluralidad de desarrollos: geometría diferencial, espacios multidimensionales, grupos y geometría, y por supuesto las geometrías no euclídeas. La introducción en España de esta temática estaba, no obstante, bloqueada en los años del cambio de siglo por el inmovilismo universitario sin que el ambiente universitario registrara en matemáticas ninguna movilidad. El catedrático de Zaragoza fue seguramente una de las pocas personas que fue consciente del mucho daño que producía esta organización de los estudios, y de hasta qué punto rebajaba el alcance del que, al fin, era el primer plan que consagraba unos estudios puros de matemáticas, y desde luego, el único en describirlo clara y lúcidamente. En 1908, en el curso del primer congreso de la Asociación Española para el Progreso de las Ciencias, celebrado en Zaragoza, hizo algunas advertencias de enorme valor, que muestran hasta qué punto conocía bien las dificultades de implantar en España una formación matemática acorde con los tiempos¹⁴⁹. Enfatiza la necesidad de que la formación universitaria abarcara en la medida de lo posible la variedad que presentaban las matemáticas del siglo recién terminado, sin distinguir conocimientos de primera y segunda clase¹⁵⁰:

"Antes, las ramas de la Matemática se desarrollaban aisladas, con una independencia casi absoluta. Actualmente las ideas se compenetran, y no se puede tratar de una sola, en las ramas superiores, sin hablar de otras varias. Hoy, el verdadero matemático no es exclusivamente *geómetra o analista*. Debe ser lo uno y lo otro, pues el número, o si se quiere el tiempo, se compenetra en el espacio, y *no podemos hallar medio de preferir el uno sobre el otro*."

Notaremos, además, que hay una línea divisoria entre el matemático teórico y el práctico, a saber, la Geometría descriptiva y la Mecánica. Desde esta región común, el matemático se eleva hacia la teoría y el ingeniero desciende hacia las aplicaciones materiales".

Distinguía así la aplicación práctica de las matemáticas de su desarrollo teórico, algo que ni mucho menos estaba claro en el ambiente intelectual español¹⁵¹:

"La enseñanza universitaria no debe confundirse con la preparación para carreras especiales, en las que el objeto exclusivo es la adquisición de ciertos conocimientos exigidos en los programas oficiales, para aplicarlos inmediatamente a un fin práctico. Aunque puedan llegar a este resultado algunos buenos alumnos universitarios, el fin inmediato de dicha enseñanza es el progreso de la cultura y de la ciencia nacional, la elevación del nivel intelectual de cada nación; dicho fin no es local, sino internacional".

Esto no desmerecía para García de Galdeano la importancia conferida a la Matemáticas, la Física y la Química por el hecho de poder *influir en el fomento de las industrias y el desarrollo intelectual de las naciones*, en un proceso continuo que se muestra de fecundación recíproca¹⁵²:

"Y esta superior cultura intelectual, que es lo primero, es fuente de multitud de estudios de aplicación y estímulo o potencialidad para otros nuevos, según comprueban los hechos".

Se ocupaba también del problema de la distinción entre los contenidos correspondientes a enseñanzas medias y los universitarios; y de la distribución de estos en los años de la licenciatura, en particular en cuanto a la geometría y al modo de plantear las asignaturas geométricas, con una crítica velada a los colegas madrileños¹⁵³:

"Se supone que al ingresar los alumnos en las Facultades, además de la Aritmética, la Geometría elemental y el Algebra, hasta las ecuaciones de segundo grado, *tienen ya nociones de Geometría descriptiva, analítica*, definición y representación de funciones, etcétera; todo esto adquirido por medio de modelos, ejemplos, intuiciones y definiciones, sin demostrar rigurosamente y adquirido al modo que se adquieren los conocimientos en Ciencias naturales.

Con estos antecedentes, ya en la edad en que la razón despierta, se les podrá enseñar el Algebra, bajos la preponderante y sugestiva idea de los grupos de sustituciones, que ejercitan las inteligencias en los problemas combinatorios; la Geometría descriptiva, a la que se adapta la intuición; la Geometría analítica, aligerada de los *perniciosos* procedimientos de sistemas de representación que, como avalanchas, se aglomeran y resultan andamiajes vacíos, sin finalidad ni objeto concreto sobre qué aplicarse, prefiriéndose las representaciones geométricas de las formas homogéneas, tan útiles y necesarias en todo el sistema de la matemática actual, evitando un aparato formidable que impone a las inteligencia para luego pocos resultados prácticos".

La cuestión de las dificultades enormes que ofrecían las asignaturas de geometría proyectiva está muy presente¹⁵⁴:

"Es necesario extender la clase de los que se dedican a la Matemática, favoreciendo su vocación con procedimientos que reúnan atractivos, en vez de acumular *dificultades repulsivas*".

Y critica la prepotencia de la geometría proyectiva en el Plan¹⁵⁵:

"¿Quién puede adquirir vocación por la Ciencia, dentro del reducido ciclo en que se mueven nuestros programas vigentes, que, salvo la Geometría de la posición y la Analítica proyectiva, tan sólo llegan, en Análisis, a lo descubierto por Euler y Lagrange, con algún moderno aditamento? Esto es ahora, lo constitutivo de nuestra enseñanza, dificultada por un dogmatismo artificioso y un rutinismo perjudicial".

No caben palabras más justas, en efecto, para describir el empantanamiento que había sucedido a unos años ochenta bastante creativos: la inercia descomunal y la fijación de tópicos sobre la *excelencia* de la geometría, y más aún de la obra de Staudt. García de Galdeano habla de *evitar las repeticiones* que ya hemos mencionado, esto es, el modo en que las asignaturas geométricas prácticamente se hacen el eco unas a otras; habla de *dotar a nuestras Universidades de todas las enseñanzas que se dan en las Universidades extranjeras*, distinguiendo lo que ha pasado a considerarse elemental y de *simplificar varias asignaturas, ya sobradamente anticuadas*, como lo eran, de hecho a finales de la primera década de siglo, asignaturas que veinte años antes habían ofrecido ciertamente su interés¹⁵⁶:

"Se embotan las inteligencias al recorrer, casi paralelamente, las geometrías descriptiva, analítica, de la posición e infinitesimal, para no recogerse como fruto de las primeras más que unas nociones incompletas de las secciones cónicas y de las superficies correlativas, y de las últimas algunas definiciones, a lo sumo de líneas de doble curvatura y de las superficies.

De aquellas debe transportarse a la segunda enseñanza la parte clásica, muy simplificada¹⁵⁷.

La Geometría de la posición, en su integridad, con cuanto le sea asimilable, constituirá la esencia del puro geómetra, con tendencias a la estática gráfica, que lleva hacia el espíritu puramente geométrico. Pero, frente a esta tendencia del espíritu puramente geométrico, se ha de colocar, para la integridad del desarrollo de la inteligencia, la Geometría analítica, edificada en una dirección por los Chasles, Plücker, Steiner, Laguerre, Halphen y en otra, por Cayley, Clebsch, Salmon, que comprende la Geometría enumerativa, la Geometría sobre una curva algebraica y la teoría geométrica de las formas homogéneas".

Es decir, todos los estudios geométricos desarrollados por medio de la aplicación de las cada vez más potentes técnicas algebraicas, y que son el embrión de la moderna geometría algebraica. Esta propuesta se relaciona, por supuesto, con la de introducir el álgebra superior, que se ha extendido como un reguero de pólvora por la superficie de las matemáticas¹⁵⁸:

"(...) pues sin el Algebra, ¿cómo al principiar los estudios universitarios podríamos tratar de los números algebraicos, de las funciones algebraicas, y luego de las curvas algebraicas y de las integrales algebraicas, que llenan un mundo en los dominios de la Matemática?"

Se trata, en definitiva, de una aguda percepción del proceso de integración de las teorías geométricas en teorías más generales¹⁵⁹:

"El Análisis comprende una región más elevada, donde, como la especie en el género, entran lo algebraico y lo trascendente, la Arithmetica y la Geometría, las funciones y su representación geométrica, las diferenciales y las curvas y superficies integrales".

Estas ideas se condensan en el interesantísimo programa de estudios de geometría propuesto por García de Galdeano, señalando que es el que se estudia en Alemania, Estados Unidos, Francia e Inglaterra. Es el siguiente:

1. *Geometría*, que comprende Geometría descriptiva y de la posición. (Obras de consulta: La Gourmerie, Fiedler, Staudt, Torroja u otras análogas).

2. *Geometría analítica*. (Obras de consulta: Clebsch, Salmon, Andoyer, etc.).

3. Geometría infinitesimal (Obras de M. Darboux, Koenigs, Bianchi).

Simultáneamente García de Galdeano, al tratar de *la matemática en su estado actual*, se esforzó por presentar un visión variadísima de la multiplicidad de líneas de investigación en geometría que, con más o menos futuro, habían atravesado el cambio de siglo. Así, se refiere a la Topología o geometría sobre un fondo flexible, a lo que llama Geometría vectorial, la geometría enumerativa, la geometría birracional de Cremona, las variedades de Riemann y sus aplicaciones a la física y la mecánica¹⁶⁰. Se detiene en algunas temas de actualidad, en un periodo, como él mismo dice, crítico, *el que señala decisivamente la línea divisoria entre el periodo clásico y el moderno*. Se refiere a desarrollos crecientemente abstractos, como la teoría de invariantes¹⁶¹:

"Las funciones simétricas, las alternadas, los determinantes, invariantes y covariantes, extienden la Geometría de Chasles, mediante el nuevo algoritmo fundado por Boole y elevado a la categoría de disciplina matemática por Cayley, Aronhold, Clebsch, Jordan etc., en la que ejerce preponderante influencia el simbolismo.

Las formas polares y los covariantes de diversas especies son meros instrumentos de existencias y de correlación".

al tiempo que, recíprocamente, la geometría sigue ofreciendo una riqueza interpretativa:

"Hoy, la Matemática es la ciencia de las transformaciones (...) Pero un nuevo carácter debemos examinar en las transformaciones; aquellas que se ofrecen como representaciones sensibles, como imágenes de un sistema matemático. Tales son las representaciones invariantivas y covariantes, por medio de la Geometría, o la representación en el plano de una superficie, o la representación, también en el plano, debida al Sr. Klein, de las Geometrías hiperbólica, parabólica y elíptica, o la representación esférica de Gauss o la de la planimetría euclídea en la pseudoesfera de Beltrami".

Se trataba, en definitiva, de luchar contra la inercia dando el salto cualitativo que requería el ulterior desarrollo de las matemáticas en España, y que pasaba por la superación de la fijación en la geometría sintética. La geometría sintética y los métodos gráficos se difundieron por España, al igual que por los diversos países europeos por la vía de la actividad técnica y de los ingenieros, gracias al reclamo que su utilidad en este campo suponía en los países que estaban en periodo de desarrollo de su sistema industrial (comunicaciones, minas, factorías, fluido eléctrico). En el caso de España, en las tres últimas décadas de siglo experimentaba una considerable agudización de su receptividad hacia la ciencia -siempre con el apelativo *útil*-. Pese a la inexistencia todavía de condiciones favorables para el desarrollo de la actividad matemática, se originó un germen de desarrollo, la gestación de un núcleo científico en este campo que concentró su interés doctrinal -por las circunstancias antes expresadas y por otras ligadas a cuestiones culturales- en la geometría proyectiva de Staudt y las reelaboraciones de Reye, Fiedler y Cremona, además de la geometría del triángulo de Lemoine. El aumento del número de publicaciones en los años ochenta se inscribe en la actividad de traducción de obras de toda Europa, predominando aquí, lamentablemente la reelaboración de libros de texto sin citar el original, que, por otra parte, no fue privativa de España.

Pese a que los matemáticos que cultivaron estos estudios constituían un conjunto de profesionales muy condicionados por su actividad docente en la formación de ingenieros, la geometría sintética fue por su propia naturaleza

una vía de acceso directo a los desarrollos puros; de este modo, si la geometría proyectiva es lo principal y sobreabunda excesivamente, en Madrid, Zaragoza y Barcelona se comenzó a hablar y a saber de geometría (de geometría diferencial, de geometrías no-euclídeas, de geometría elemental moderna, de geometría algebraica) y, más aún, de Matemáticas. La esclerotización experimentada en los estudios geométricos en la última década de siglo se sitúa en un contexto cultural anodino y pequeñoburgués de la España de la restauración; aquí, como en otros campos, querer ir *hacia delante* fue a costa de la condena al ostracismo de las provincias, inmerso el país en un fortísimo centralismo que anestesió la receptividad científica de los centros antes señalados. Pero el desarrollo era imparable: una política científica razonablemente bien conducida durante el primer tercio de siglo avivó la mecha de las matemáticas españolas.

NOTAS

1 Recientes trabajos de Ausejo y Velamazán han mostrado este proceso: véase la bibliografía final.

2 Véase Arenzana (1990). Sobre la figura de Vallejo, véase Hernanz & Medrano (1990).

3 García Camarero (1984, 119).

4 Velamazán (1990, 24-26). La geometría descriptiva aparece unida al dibujo en los planes de estudio de 1803 y 1816; la geometría analítica es mencionada explícitamente por vez primera en el plan de 1816. Muchas otras materias incluyen cuestiones de geometría aplicada de nivel interesante, como Perspectiva, Dinámica, Topografía, Fortificación, Castramentación y Arquitectura civil.

5 En la regulación de la Facultad de Filosofía dada por Real Cédula de 12 de julio de 1807 se incluye una cátedra de *Elementos de Aritmética, Algebra y Geometría* y otra de *Aplicación del Algebra a la Geometría* y se recomendaba para ambas el libro de Juan Justo García: hay que tener en cuenta que, según señala Vea (1986, 34) este plan, apoyado por los sectores más consevadores, tomó como modelo para la pretendida reforma universitaria a la Universidad de Salamanca. Todavía en este periodo, por lo demás, no está bien definida la idea de enseñanza superior y la educación secundaria es una parte de la universitaria.

6 Véase Velamazán (1990, 28-29).

7 Véase Vea (1986, 40).

8 En la portada de la undécima edición del *Tratado de Trigonometría rectilínea y esférica y de Topografía*, aparecida en 1867, se lee: "Obra señalada en primer lugar para texto en las Universidades, Institutos y Escuelas profesionales". En el prólogo se refiere Cortázar a su actividad matemática francesa: "Hallándonos en París en 1838, escribimos un Tratado completo de Trigonometría, que no llegó a publicarse: entonces descubrimos, entre varias cosas, las cuatro analogías de Delambre, descubiertas ya por este célebre

astrónomo desde 1807, pero ignoradas por todos los autores posteriores de Trigonometría (...) En 1847 remitimos a Mr. Terquem nuestras cuatro fórmulas y la demostración de las analogías de Neper, para que las publicase en el periódico suyo titulado *Nouvelles Annales de Mathématiques*: Mr. Terquem dio a luz nuestra demostración de las analogías de Neper, sin mentar la cuatro fórmulas. (...) Los programas modernos del Gobierno francés las incluyen también, y como consecuencia todos los autores modernos franceses (...)" [Cortázar (1867, pp. 2 y 3 del Prólogo).

9 Velamazán (1990, 30-31).

10 En Montanuy, Núñez y Servat (1990) se estudian las memorias, casi todas inéditas, de matemáticas presentadas por los académicos hasta 1890, fecha en que estos trabajos comenzaron a ser editados regularmente.

11 Gispert (1989, 52). Gispert delimita la naturaleza de este retraso (p. 51): "D'une part, les 'retards' de l'enseignement comme de la production se réfèrent aux contenus des travaux des mathématiciens français les plus illustres de ces années 1860-1870 qui, sauf exception, ne cultivent ni n'enseignent les branches les plus modernes des mathématiques. D'autre part, ces mathématiciens de grande réputation, qui ont une activité mathématique importante -sur d'autres objets moins récents, avec d'autres méthodes et d'autres outils mathématiques- produisent beaucoup: des traités célèbres en France et à l'étranger (en particulier divers *Cours de l'Ecole Polytechnique*), de nombreux articles dans des grandes revues".

12 Luis de Gaztelu señala cómo una de las novedades del periodo revolucionario sería una concepción más amplia de la tarea de ingeniero ligada a las necesidades de un país industrializado, de acuerdo con la cual el gobierno provisional publicó un decreto que tendía a facilitar la entrada en la Escuela de Caminos: "Dans la première [période], de 1836 à 1868, elle n'eut pour objet unique et exclusif que l'instruction et la préparation du personnel technique destiné à diriger et à administrer les travaux publics de l'Etat, en limitant le nombre d'élèves au strict nécessaire dans le but de satisfaire seulement aux nécessités de l'administration.

Dans la deuxième, que commence en 1868, tous les règlements déterminent l'objet de l'Ecole avec une plus grande amplitude en augmentant un nombre d'élèves supérieur à celui qui est strictement nécessaire pour couvrir les places vacantes dans le Corps des ingénieurs et le nombre des Ingénieurs que l'Ecole a fourni ces dernières années a dépassé beaucoup cette limite, car il y en a beaucoup qui exercent leur profession indépendamment des travaux publics de l'Etat et que sont au service de Compagnies, d'entreprises particulières et d'autres corporations analogues de caractère public ou privé" [Gaztelu (1912, 77)].

13 Citado en Gaztelu (1912, 76). La traducción es mía. A. M. Así, por ejemplo, la *Revista de Obras Públicas* era en este periodo una de las principales publicaciones científico-técnicas del país. A mediados de siglo aparecieron además las escuelas de ingeniería industrial. Probablemente las medidas de tipo educativo iban más deprimidas que las propias necesidades del país: así, por ejemplo, Echegaray, en 1853, apenas terminados sus brillantes estudios, fue

nombrado Ingeniero segundo del Distrito de Granada, con destino en Almería: "Su ocupación en Almería era la de conservar cinco kilómetros y medio que iban contruidos de la carretera de Almería a Gador. La tristeza de verse en el Mundo tan lejos del mundo, la nostalgia de su Madrid, las combatía estudiando las últimas producciones matemáticas de Gauss, Legendre y Lagrange, que se había llevado preventivamente; siguió con la costumbre de leer novelas y descubrió en algunos ratos de ocio que era poeta" [Sánchez Pérez (1932, 52)].

14 Sánchez Pérez (1932, 53).

15 Ver las cifras muy significativas de Gispert (1989-90). Hacia 1870 la geometría, junto con la mecánica y la astronomía es el primer sector entre la producción francesa recogida en el *Bulletin de la Société Mathématique de France*. Para calibrar la relevancia de este fenómeno de transmisión científica, basta considerar la lista de textos usados en la preparación del acceso a la Escuela de Montes en la primera década de siglo proporcionada por Jorge Torner: figuran la traducción del *Traité d'Arithmétique* de Serret, el *Traité d'Algèbre* de Bertrand, la traducción de Sebastián y Portuondo de *Algèbre élémentaire et supérieure* de Briot; y en geometría, el tratado de Rouché y Comberousse del que se tratará más adelante, junto a la *Trigonométrie* de Cortázar. [Torner (1912, 98)].

16 Gispert (1989-90, 9).

17 Los textos establecidos en septiembre de 1851 para la asignatura de *Algebra superior y Geometría analítica* -regulada en la Facultad de Filosofía por el Plan de 1945- eran obra de Zorraquín (1819) y de Santa María. Ver Garma (1978, 30-31) quien remite a la *Colección de leyes, reales decretos...*, tomo LIV, septiembre.

18 Real Decreto de 11 de septiembre de 1858. En la ley Moyano las asignaturas figuran como Algebra, Geometría y Trigonometra, Geometría analítica y Geometría descriptiva. La división en secciones era diversa: ciencias físico-matemáticas, químicas y naturales. (Ley de Instrucción pública de 9 de septiembre de 1857).

19 Las dos primeras materias ya figuraban en el plan de estudios de Filosofía cincuenta años antes, aunque a un nivel seguramente más elemental. La novedad es la introducción de la geometría descriptiva.

20 Jiménez Rueda, hablando de la necesidad de un examen de ingreso en las Facultades de Ciencias, señalaba: "Si por medio de un examen de entrada, los alumnos llegaran a la Facultad con la preparación deseada, se podrían suprimir diversas teorías propias de la enseñanza secundaria (...)". [Jiménez Rueda (1912, 43)].

21 *Programas Generales de Estudios*, Madrid, 1858, p. 25. Citado en Moreno (1988).

22 Véase Hensel (1989), donde se describe la política de contratación de matemáticos en las Technische Hochschule alemanas en el último tercio del siglo XIX.

23 Vea (1986, 91).

24 Lusa (1985, 205-206). Este autor observa además la influencia ya mencionada aquí de las escuelas técnicas francesas -la *Ecole Centrale des Arts et Manufactures* y la *Ecole Polytechnique*- y de los textos franceses.

25 Plan de estudios de 13 de agosto de 1880, Artículo 31. A lo largo de la década se comienzan a establecer nuevos estudios en las demás facultades. Las facultades de ciencias de provincias se veían así atadas de pies y manos; Zaragoza realizó un efímero intento de completar las enseñanzas en el periodo 1868-1875, con el apoyo de las autoridades locales.

26 *Regio Decreto n. 842 del 14 settembre 1862 di approvazione del Regolamento universitario e di quelli della Facoltà di giurisprudenza, di medicina e chirurgia, di scienze fisiche, matematiche e naturali, e di filosofia e lettere.*

27 *Regio Decreto n. 3434 (Serie 2ª) dell'8 ottobre 1876 che approva il regolamento generale universitario e i regolamenti speciali delle Facoltà e scuole di applicazione per gli ingegneri (G. U. n. 251 del 27 ottobre 1876).* En el Reglamento de 1910 se mantienen las materias de geometría analítica, proyectiva y descriptiva con dibujo -unidas salvo en las facultades que específicamente conservan cursos distintos- y, en su caso, geometría superior. Es indudable la mayor riqueza y agilidad del ambiente matemático universitario italiano; véase, por ejemplo, uno de los pocos trabajos sobre el tema, Fiocca & Pepe (1989, 4): "Con l'unità nazionale l'attrazione dei centri più attivi della ricerca si accentua ancora di più, e le riforme dei programmi dei corsi intraprese con iniziative locali (si pensi all'insegnamento di Ulisse Dini a Pisa), con il circolare dei libri e con il trasferimento dei docenti finiscono con dare l'impronta anche nelle altre sedi ad un insegnamento rinnovato dell'analisi matematica e della geometria proiettiva e descrittiva". El modelo seguido era, en cualquier caso, el alemán, que queda perfectamente reflejado en el *Erlanger Antrittsrede* de Klein en 1872; véase Rowe (1985).

28 *Revista de obras públicas*, Madrid, 1866, 261-265. Documento reproducido en Peset & Garma & Pérez Garzón (1978, 183-190).

29 Echegaray (1867, 3). Sobre la *Revista de los Progresos de las Ciencias*, véase Pérez & Muñoz (1988).

30 VICUÑA, G. (1876) *Cultivo actual de las ciencias físico-matemáticas en España*, Discurso de apertura del curso 1875-76 en la Universidad Central.

31 Real Decreto de 30 de noviembre de 1877

32 Plan de Estudios de 13 de agosto de 1880. Este plan dividió la facultad en secciones de físico-matemáticas, físico-químicas y naturales.

33 AGEA, legajo 5401-39 (E. C.)

34 AGEA, legajo 5404-19 (E. C.)

35 AGEA, legajo 5404-60 (E. C.). Domenech obtuvo la cátedra por traslado, pues desde 1888 era catedrático de Geodesia.

36 AGEA, legajo 5402-33 (E. C.)

37 AGEA, legajo 5403-7 (E. C.)

38 AGEA, legajo 5405-11 (E. C.)

39 AGEA, legajo 5403-36 (E. C.)

40 AGEA, legajo 5403-37 (E. C.)

41 AGEA, legajo 5405-11 (E. C.)

42 AGEA, legajo 5408-2 (E. C.)

43 Los estudios completos de la Licenciatura no se llegaron a establecer. Todavía en 1956, cuando ocupaba la cátedra Vidal Abascal, señalaba Rey Pastor el aislamiento de los catedráticos de matemáticas de Sevilla

44 AGEA, legajo 5404-16 (E. C.)

45 AGEA, legajo 5405-11 (E. C.)

46 AGEA, legajo 5403-7 (E. C.)

47 AGEA, legajo 5405-11 (E. C.)

48 AGEA, legajo 5404-6 (E. C.)

49 AGEA, legajo 5405-13 (E. C.)

50 AGEA, legajo 5407-4 (E. C.)

51 Las memorias matemáticas del Boletín han sido estudiados en Núñez y Servat (1988), donde figuran las referencias bibliográficas de los trabajos mencionados.

52 Octavio de Toledo (1912, 3-4). La siguiente iniciativa señalada de traducción de textos matemáticos alemanes fue la emprendida por José G. Alvarez Ude y Rey Pastor de la obra sobre axiomatización de la geometría proyectiva de Pasch. [Pasch (1913)] .

53 BALTZER, R. (1880) *Elementos de matemáticas*. Parte tercera: Álgebra. Madrid, Imprenta de Segundo Martínez, p.VII.

54 Loc. cit. El capítulo VII del tomo dedicado a la Trigonometría (Baltzer (1881)) se titula Fórmulas proyectivas, e incluye los teoremas de Ceva, Menelao, Pascal, Brianchon, Desargues y el concepto de razón doble, temas incorporados a la geometría moderna elemental en el periodo.

55 ROUCHE, E. & COMBEROUSSE, CH. (1868) *Traité de Géométrie élémentaire. Première partie, Géométrie plane*. Paris, Gauthier-Villars, p. XXIII.

56 Ibidem, p. XIX.

57 Rouché & Comberousse (1878, XXI).

58 Rouché & Comberousse, op. cit., 1868, p. XX.

59 Vea (1986, 104 y ss.) señala como especialmente productivo el periodo 1880-1893.

60 Pionero en este ámbito fue Echegaray, con sus dos libritos de problemas de geometría elemental clásica y analítica publicados en 1865 (Echegaray (1865a) y (1865b)).

61 Villafañe (1883, 7).

62 Mundí (1893, 3). Se reproduce la advertencia preliminar de la 1ª edición. Según Viñas (1987, 136), en los cursos 1876 y 1878 Santiago Mundí, académico de la RACAB desde 1867 fue encargado de impartir un curso avanzado de geometría analítica en el que siguió a Salmon, Hesse y los franceses L. Painvin y J. Carnoy.

63 Ver Hormigón (1983). Nos referimos al libro García de Galdeano (1888), cuya parte segunda incluye relación anarmónica, divisiones homográficas, involución, homología, correlación etc. Existe una reimpresión del libro de 1889 en cuya cubierta se indica el nuevo cargo de catedrático de

Zaragoza y el título se completa de la manera siguiente: *Geometría elemental conforme con el desarrollo actual de las teorías modernas*.

64 Archivo Cremona, Università "La Sapienza" di Roma. La primera carta conservada de García de Galdeano, fechada en Toledo en marzo de 1883, muestra como ya entonces se había iniciado el contacto con Cremona, quien aceptó más adelante figurar entre los colaboradores de *El Progreso Matemático*.

65 Véase más adelante § 2. 2 y ss.

66 Bernalte & Llombart & Viñas (1988, 972). Se trata del trabajo: HOUEL, J. (1881) "La experiencia en las ciencias exactas". *Crónica científica*, 4, 105-108 y 129-132.

67 Loc. cit. El trabajo es: Clariana (1884). En la exposición sigue al militar y matemático belga Tilly, del que se publicó una biografía en la *Gaceta de matemáticas elementales*.

68 Véase el folleto *Compte rendu du bureau local du Comité Lobatchefsky. 1893-1895*. (en ruso).

69 Véase Viñas (1987, 140). Clariana se debió sentir cercado, hasta el punto de cuestionarse si el desconocimiento de la obra de Cauchy en España era debido a su catolicismo (CLARIANA, L. (1890) *Breve estudio crítico acerca de la matemática en el siglo XIX*. Barcelona, RACAB. "Memorias de la RACAB" (3ª época), 1).

70 El conjunto de la polémica es tratada en Viñas (1987, 139-144). Sobre otros aspectos de la polémica, véase § 2. 1.

71 Bernalte & Llombart & Viñas (1988, 975). Publicado en García de Galdeano (1900).

72 Ibidem, p. 976. Sobre los trabajos de Bartrina, ver Llombart (1990).

73 Véase Hormigón (1990).

74 Bernalte & Llombart & Viñas (1988, 977).

75 Véase Llombart (1990, 345), donde se mencionan otros trabajos de Bozal (1903) y (1905), Jiménez Rueda (1903), Moliné (1903), Thibinger (1904), Vegas (1904) y Durán Loriga (1906).

76 Véase Millán (1990b).

77 Reyes y Prósper (1887) y (1888). El trabajo de Pasch es PASCH, M. (1888) "Über die uneigentlichen Geraden und Ebenen". *Mathematische Annalen*, 32.

78 Véase Val (1960).

79 Llombart (1988, 967). En los dos primeros años de *El Progreso Matemático* publicó un par de artículos geométricos.

80 En ese mismo año Julián Chave y Castilla, regente de la Escuela práctica agregada a la normal de maestros de Santiago, publicó un ensayo de una nueva teoría de la proporcionalidad de las líneas rectas prologado por el ingeniero de montes y académico Rafael Alvarez Sereix, que escribía: "(...) de algunos años a esta parte se advierte un renacimiento en la geometría que acrece su preponderancia. A la época en que, ansiosos de la mayor generalidad posible, afanábanse los matemáticos por resolver todas las cuestiones valiéndose del análisis, ha sucedido otra de reacción; y así como Laurent, por ejemplo, rehuía sistemáticamente en su Mecánica racional el empleo de figuras, ahora se inicia

la tendencia contraria, y profesores eximios, como Lévy, dan a luz extensas producciones que explican la solución de arduos problemas de Estática, con el solo auxilio de procedimientos gráficos, que tienen su base en la Geometría".

81 Los tomos a los que nos referimos son García de Galdeano (1892) y (1895). En Hormigón (1983, 213-217) se realiza un análisis histórico de estos trabajos.

82 Ibidem, p. 217.

83 Un estudio de ambos libros, que son los volúmenes III y V de su "Tratado de Análisis matemático" se incluye en loc. cit., pp. 217-220. García de Galdeano se inspira en Darboux y Bianchi; es interesante comparar como los temas principales de geometría diferencial del siglo XIX desgranados por Darboux en su conferencia de tipo histórico pronunciada en Estados Unidos en 1904 son tratados sin que se eche en falta ninguno en los trabajos de García de Galdeano.

84 Se trata del quinto libro de la obra *Principios Generales de la Teoría de funciones*, publicada en Zaragoza en 1904 (tomo II del "Tratado de Análisis matemático"). Ibidem, pp. 217-219.

85 De lo considerado hasta ahora se desprende claramente que la afirmación de Laín (1982, 35) de que *la matemática que hacia 1890 se enseñaba en España era la vigente en Europa medio siglo antes* es, al menos en lo referente a la geometría, inexacta. Más bien al contrario, ese año cierra una década de culminación de un desarrollo -especialmente brillante, como se verá en lo que sigue, en relación a la geometría proyectiva-; se inicia entonces un decaimiento progresivo de la actividad científica. Este fenómeno ha sido señalado por Ruiz (1981, 466), quien indica como el desarrollo fue obstaculizado por la posición hegemónica de la oligarquía en el bloque de poder, y considera a figuras como Ramón y Cajal un caso aislado más que la muestra de una situación de crecimiento. En lo que sigue se pretende argumentar esta tesis analizando en detalle lo ocurrido con la geometría en el ámbito de las matemáticas.

86 Sobre esta producción geométrica, relacionada con las aplicaciones, en la segunda mitad del siglo XIX, se prepara una publicación en colaboración con Mariano Hormigón.

87 Ver Viñas (1988, 136-137). En Núñez, Montanuy y Servat (1990) se comentan brevemente dos memorias de Romero: la primera de ellas, no publicada, es el discurso de ingreso en la RACAB, leído el 14 de febrero de 1878, sobre la historia e importancia de los estudios de la geometría moderna; la segunda es un estudio de tipo sintético titulado que fue publicado por la Academia. Romero (1876-1884).

88 Se trata de la memoria leída por Jose M^a Rodríguez Carballo el 14 de mayo de 1881, publicada en *La graficidad en geometría* (Rodríguez Carballo (1876-1884)) y el discurso de ingreso de Domenech, leído el 22 de noviembre de 1882, *Memoria sobre la geometría proyectiva y su aplicación a la arquitectura*. Ver Núñez, Montanuy y Servat (1990).

89 Esta memoria permaneció inédita; véase Núñez, Montanuy y Servat (1990).

90 Ver Viñas (1987, 136 y ss.).

91 Mundi (1884, 5-6).

92 Sobre los métodos gráficos de Culmann, véase Scholz (1984).

93 Así lo señalaba Reye en el prólogo de la edición francesa de su obra, traducida por Chemin y aparecida en 1881, con dos años de retraso respecto a una traducción francesa de la obra de Favaro!. Algo semejante ocurría con la obra de Mundi, que al fin y al cabo, tenía el modesto título de Apuntes y apareció autografiada. Considérese como la estructura de la transmisión matemática estaba transformada en este último cuarto de siglo; el ambiente de la *Ecole Polytechnique*, representado por Chemin -*répétiteur* de la escuela francesa-se mostraba mucho menos ágil que el ambiente italiano.

94 La correspondencia que mantuvo con Cremona se conserva en el Archivo Cremona, Università "La Sapienza" de Roma. En ella se ponen de manifiesto los problemas que debía suponer incluso obtener las obras extranjeras recientes: "Resultado de los estudios que en dichas obras [de Salvioti y Dino] he hecho y también muy especialmente en la primera parte de su Geometría proyectiva traducida al Francés por el ingeniero militar Ed. Dewulf, y algunas otras, me he decidido a publicar una obra completa de Estática gráfica, empezando como es natural por la Geometría, que estoy muy próximo a terminar.

El objeto principal de molestar a V. es, después de participarle mis proyectos, saber si tiene V. publicada la segunda parte de su Geometría proyectiva pues yo la he mandado a pedir y me han dicho que caso de que la haya V. publicado está agotada la edición: por lo tanto yo me atrevo a rogar a V., pues no creo le sea difícil proporcionarse un ejemplar de dicha segunda parte, se sirva remitírmelo que yo se lo devolveré a V. *dentro de dos meses*: si así lo hace, se lo agradeceré a V. muchísimo.

Al mismo tiempo, creo me concederá V. su permiso para que en mi Geometría proyectiva entresaque lo que de la de V. me parezca conveniente, para el objeto que me he propuesto". [Carta de 1 de diciembre de 1887].

95 Moý (1889, VIII).

96 Ibidem, p. VIII-IX.

97 Ibidem, p. IX.

98 Ver Viñas (1987, 141-142). Clariana, ingeniero industrial de formación, había publicado en 1879, siendo catedrático del Instituto de Tarragona, un *Tratado de cinemática pura*.

99 Sobre esta discusión, véase Viñas (1987, 141 y ss.).

100 Clariana, L. *El espíritu de la matemática* ..., p. 4. No se conoce la fecha exacta de este trabajo, que Hormigón sitúa en torno a 1900; véase Hormigón (1987).

101 Ibidem, p. 5.

102 Ibidem, p. 6.

103 Loc. cit.

104 Ibidem, p. 7.

105 Ibidem, p. 8.

106 Publicó inmediatamente un texto: Mundi (1904).

107 Torroja (1893, 3-4). Su personalidad, curiosamente, fue comparada por de Rafael (1918, 203) con la de Cauchy: "y en cuanto a su piedad sólo sufre comparación con la proverbial del sublime descubridor del cálculo de los residuos, Agustín Cauchy".

108 Según certificación del Instituto de segunda enseñanza de Tarragona sobre la partida de bautismo que obraba en su poder, depositada en el Archivo General de la Administración (en adelante, AGEA), Legajo 1470-76 (E. y C.). No obstante, todas las referencias biográficas indican el año 1847.

109 Según certificación académica expedida en la Universidad Central a 18 de febrero de 1869, loc. cit.

110 Los datos que siguen proceden de una Hoja de servicios con fecha 31 de mayo de 1877, loc. cit.

111 Véase Rafael (1918, 202) y la nota necrológica aparecida en *Gaceta de Matemáticas Elementales*, 2, 92, donde se remite al tomo 1 de las *Memorias del Instituto Geográfico y Estadístico*. Ibañez e Ibañez de Ibero, cofundador de la Asociación Geodésica Internacional en 1866 y posterior presidente, promovió el establecimiento del Instituto Geográfico y Catastral en 1870, del Cuerpo de Geodestas o Ingenieros geógrafos y del Cuerpo Estadístico.

112 Se trata de unas oposiciones largas -duraron los ejercicios del 2 de diciembre de 1875 al 15 de enero de 1876- en parte por lo concurridas, pues se presentaron, además de Torroja, los arquitectos Francisco de Urquiza y Enrique Berrocal, los ingenieros industriales Francisco de Orbe, Mariano Laucha y Gregorio García de Meneses -este último doctor en Ciencias-. El tribunal, presidido por Joaquín Núñez de Prado y compuesto por Gumersindo Vicuña y Tomás Ariño, catedráticos de la Central, Jose Castelar y Federico Pérez de Nuevos, catedráticos de la Universidad de Barcelona, y los académicos José Morer y Manuel M^a de Azofra -Merino renunció por su relación con uno de los opositores-, propuso a una terna de la que el Consejo de Instrucción Pública eligió a Torroja. Los opositores manejaron libros de Olivier, Adhémar, Leroy, La Gournerie, Fresca, Vallée y Elizalde, sin que se les pudieran proporcionar los de Bardin y Babinet.

113 Con un sueldo de 3.000 y de 4.000 pesetas anuales respectivamente (los catedráticos de Madrid estaban mejor retribuidos). La categoría de ascenso suponía un aumento de 1.000 pesetas en el sueldo. En 1882 disfrutaba en razón de su posición en el escalafón de 6.000 pesetas y, en 1895 -cuando ocupaba en él el puesto 90-, 7.500 pesetas. En enero de 1900 obtuvo la categoría honorífica de término con antigüedad de 1893: en ese momento cobraba 8.500 pesetas. En octubre de 1912 ocupaba en puesto 15 del escalafón, con un sueldo de 12.000 pesetas. AGEA, Legajo 1470-76 (E. y C.).

114 Manuscrito "Oposiciones a la cátedra de Geometría descriptiva vacante en la Universidad Central. Programa presentado para las mismas por D. Eduardo Torroja. Noviembre de 1875", AGEA, Legajo 1445-43 (E. y C.).

115 Dice Enrique de Rafael en el artículo necrológico antes citado: "figurando por tal motivo, como presidente de un sin número de tribunales de oposiciones a cátedras de ciencias matemáticas".

116 Alvarez Ude (1919).

117 Véase Fiedler (1871). Alvarez Ude destaca la demostración del teorema de Pohlke (1860) y del teorema de Schlömich-Weisbach. La segunda parte de esta obra, dedicada a los problemas de la exposición clásica de la Geometría descriptiva (proyecciones ortogonales), no llegó a ser publicada.

118 Dictamen del Consejo de Instrucción Pública de 31 de octubre de 1879, en vista de lo informado por la Sección 3ª, de acuerdo con el artículo 232 de la Ley de Instrucción Pública [posiblemente de 1868 con modificaciones de 1874, véase Veá (1986, 97)]. El ponente encargado de informarla fue Campuzano, aunque falleció antes de emitir su opinión. La categoría de ascenso le fue concedida por Real Orden de 26 de junio de 1880. Documentos depositados en el AGEA, Legajo 1470-76 (E. y C.).

119 Torroja (1893, 80).

120 Véase Vegas (1909, 51): "Habiéndome yo propuesto desde que de aquella asignatura y de su enseñanza me había encargado, exponerla y explicarla por los fecundísimos procedimientos de la Geometría pura; y alterando el plan tradicional, hasta entonces seguido en las Facultades de ciencias y Escuelas de España, resolví hacer preceder su estudio de unas nociones de Geometría de la Posición tomadas de la fundamental obra de Staudt, y que no pude hasta mediados de 1884 publicar". Ese año tuvo como alumno a Cecilio Jiménez Rueda, que provenía de la Universidad de Granada.

121 La sección 3ª, con asistencia de Vallín, Carderera, Calleja, Bolívar, Sarroca y Merino, emitió el dictamen con fecha 24 de julio de 1892. Este dictamen le hizo merecedor de la categoría honorífica de catedrático de término. AGEA, Legajo 1470-76 (E. y C.). El subrayado es mío. A. M.

122 Alvarez Ude (1919, 12).

123 Torroja (1893, p. 70-71)

124 Ibidem, p. 72.

125 Ibidem, p. 6.

126 Ibidem, p. 17.

127 Véase su comentario en Rey Pastor (1916a).

128 Véase Alvarez Ude (1919, 8-10).

129 Ibidem, p. 38-39. Se trata de la obra Staudt (1889), traducida por Pieri a instancias de Segre. Sobre el tema del teorema fundamental, véase Millán (1990b).

130 Torroja (1893, 68-69). Se refiere a la obra Kötter (1887).

131 En esta escuela, que funcionó entre 1886 y 1892, se estudiaban tres años comunes a todas las ingenierías y a Arquitectura, tras los cuales se pasaba a las respectivas escuelas especiales. El examen de entrada, además de dibujo, inglés y francés, incluía tres pruebas de Aritmética y Geometría, Algebra y Trigonometría y Geometría analítica; se trataba, según Gaztelu (1912, 82-84), profesor de dicha escuela, de un examen muy duro que exigía como mínimo dos años de preparación privada, incluyendo la teoría de invariantes en Algebra y las teorías de involución, homografía y otras teorías modernas en Geometría. Las licencias para enseñanzas privadas estaban reguladas por Real Orden de 18 de septiembre de 1886.

132 Esta solicitud, informada favorablemente por el Decano de la Facultad de Ciencias (*no creo que sufrirá perjuicio alguno la enseñanza oficial, pues así es de esperar del Profesor que en tantos años no ha faltado un sólo día a la Cátedra de la que es titular*), ofreció algunas dudas al Rectorado de la Central, expuestas al Director general de Instrucción Pública: "considerando (...) no puede precisarse a pesar de su carácter de aplicación hasta que punto estas [asignaturas] puedan ser distintas de las que se explican en la Facultad de Ciencias, ha acordado consultar a usted si el que suscribe prodrá concederle la autorización y en caso afirmativo, si convendrá imponer al Sr. Torroja la condición de no formar parte de los Tribunales de exámen para los alumnos que se presentan en esta Universidad a la prueba de estudios privados y de no admitir en su Academia particular a los matriculados en la enseñanza oficial de la Facultad de Ciencias". [Consulta de 7 de octubre de 1887, depositada en el AGEA, Legajo 1470-76 (E. y C.)]. Estas condiciones le fueron efectivamente impuestas; en el curso siguiente 1888-89 volvió a solicitar autorización.

133 Vegas (1888, 5-6). Tanto de esta observación de Vegas como de otros escritos, como por ejemplo de Clariana (véase las citas correspondientes a las notas 16 y 33), se desprende que Bélgica gozaba de un lugar de privilegio en la opinión común española. En unión de Alemania y de Italia, se presenta como escenario privilegiado del desarrollo científico; estos países constituyen así el modelo de desarrollo tecnológico e industrial que despertaba en España una incondicional admiración. Esta impresión aparece también en testimonios literarios, como por ejemplo este fragmento firmado por Galdós en enero de 1878, donde se describen -con una pizca de ingenuidad ante el progreso científico-técnico- unas minas en el norte de España:

"Allá en las más remotas cañadas, centenares de hombres golpeaban con picos la tierra para arrancarle, pedazo a pedazo, su tesoro. Eran los escultores de aquellas caprichosas e ingentes figuras que permanecían en pie, atentas, con gravedad silenciosa, a la invasión del hombre en las misteriosas esferas geológicas.

Los mineros derrumbaban aquí, horadaban allá, cavaban más lejos, rasguñaban en otra parte, rompían la roca cretácea, desbarataban las graciosas láminas de pizarra samnita y esquistosa, despreciaban la caliza arcillosa, apartaban la limonita y el oligisto, destrozaban la preciosa dolomía, revolviendo incesantemente hasta dar con el silicato de cinc, esa plata de Europa que, no por ser la materia de que se hacen las cacerolas, deja de ser grandiosa fuente de bienestar y civilización. Sobre ella ha alzado Bélgica el estandarte de su grandeza moral y política. ¡Oh! La hoja de lata tiene también su popeya". [PEREZ GALDOS, B. (1988) *Marianela*. Madrid, Librería y casa editorial Hernando. 37ª edición, 57-58].

134 Ni ellos ni Torroja, por otra parte, pertenecieron al *Circolo Matematico di Palermo*, al que García de Galdeano se incorporó -a la vez que Laisant- en 1891. La participación española en esta importantísima asociación internacional fue regular, llegando a ser, en la época de mayor esplendor del *Circolo* -hacia 1914-, la undécima -de un total de veinticinco países- en número de socios; significativamente, los españoles que formaron parte del *Circolo*

pertenecían principalmente al área de influencia de García de Galdeano. Véase Brigaglia & Masotto (1982).

135 *Memoria de la Junta para ampliación de estudios correspondiente a los años 1910 y 1911*. Madrid, Junta para Ampliación de Estudios, 1912, p. 30.

136 REY PASTOR, J. (1909, 3).

137 Este era sin duda el sentimiento de los protagonistas del periodo, entre ellos el propio Rey Pastor. En 1962 Vidal Abascal -sirva esto como testimonio de los matemáticos del periodo franquista- se remitía a las palabras de Rey Pastor en 1956, en su discurso de contestación a San Juan con ocasión del ingreso de éste en la Real Academia de Ciencias: *A fines del siglo XIX damos un salto de gigante con la introducción de Staudt, más estudiado aquí que en Alemania, pero la Geometría se enderezó por el rumbo analítico, y tanto Cremona como Torroja, y quienes los seguimos, quedamos otra vez fuera de cauce*. Y el propio Vidal Abascal añadía: "Ese fuera de cauce, hay que decirlo con dura sinceridad para hacer honor al legado del egregio maestro, desfasó a la matemática española por otros cincuenta años. Todavía pesan hoy como farragoso lastre en nuestros más significados matemáticos esos años, aún recientes, en que una de las asignaturas más importantes de la carrera era la Geometría descriptiva, y que los métodos gráficos y sintéticos eran estudiados en España con el esfuerzo y entusiasmo que nuestros antepasados ponían, por ejemplo, en atravesar los Andes". Vidal Abascal (1962, 119).

138 Hormigón (1983) se ha ocupado de estos cambios en la enseñanza, analizando en particular la crítica de García de Galdeano a las posiciones de Vegas en la exposición que preparó para el Congreso de Cambridge de 1912, que aparecen publicadas en GARCÍA DE GALDEANO, Z. (1913) *Sumario de mis cursos de Cálculo Infinitesimal con arreglo al nuevo método de enseñanza*. Zaragoza. Las circunstancias que rodearon la participación española al Congreso han sido analizadas por Hormigón en una conferencia con ocasión del V Congreso de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas (Murcia, 1989), en prensa.

139 El fragmento correspondiente aparece en el discurso de contestación en Vegas (1909, 53). García de Galdeano no dejará de criticar, un año después de la aparición de esta segunda edición, la materia incluida en este texto.

140 Vegas (1912, 11-12).

141 Ibidem, p. 18-19.

142 Jiménez Rueda (1898, IV-V).

143 Loc. cit.

144 Vegas (1912, 13). Está pendiente de estudio el funcionamiento del Consejo de Instrucción Pública, organismo omnipresente en la enseñanza en la España del XIX, en relación con las matemáticas.

145 Jiménez Rueda, (1912, 28). Véase JIMENEZ RUEDA, J. (1903-08) *Lecciones de geometría métrica*, Madrid.

146 Por Real Orden de 28 de septiembre de 1900. AGEA, Legajo 1470-76 (E. y C.).

147 Véase Millán (1990b, 376).

148 Peñalver (1912, 69). El *academicismo* exagerado que se detecta en las memorias presentadas en Cambridge tiene su correlato en Italia en la situación del Congreso de Roma en 1908; Brigaglia & Masotto (1982, 226) detectan como el predominio del ambiente académico de Roma minó las fuerzas de la comunidad matemática italiana.

149 Ausejo está estudiando en detalle las contribuciones de García de Galdeano a la reuniones de la Asociación Española para el Progreso de las Ciencias; véase Ausejo (1990b).

150 García de Galdeano (1908a, 1). El subrayado es mío. A. M.

151 García de Galdeano (1908b, 7).

152 Loc. cit.

153 García de Galdeano (1908a, 3-4). El subrayado es mío. A. M. Se refiere claramente al texto de Vegas, proponiendo como alternativa temas más avanzados de la geometría de coordenadas, la teoría de invariantes en su formulación geométrica.

154 Ibidem, p. 4.

155 García de Galdeano (1908b, 5).

156 Ibidem, p. 5.

157 Se extiende sobre la geometría que cabría introducir en secundaria, a *imitación de la que se practica en los gimnasios alemanes y los liceos franceses*.

158 Ibidem, p. 6.

159 Ibidem, p. 7.

160 García de Galdeano (1908c). Se observa que en la primera década de siglo no menciona la Geometría del Triángulo, que tanto le había interesado en los años anteriores.

161 Ibidem, p. 26.

BIBLIOGRAFIA

ALVAREZ UDE, J.G. (1919) "Don Eduardo Torroja". *Revista Matemática Hispano Americana*, 1, 1-13.

ARENZANA, V. (1990) "El rigor en los libros de Geometría en los comienzos del siglo XIX. José Mariano Vallejo y las Adiciones a la Geometría de Don Benito Bails". *Llull*, 13 (24), 5-19.

AUSEJO, E. (1990) *Science and Society in Contemporary Spain. Proceedings of the XVIIIth International Congress of History of Science (Hamburg-Munich, 1-9 August 1989)*. Zaragoza, SEHCTAR, Universidad de Zaragoza.

_____ (1990b) "Applied Mathematics in Spain: The Spanish Association for the Advancement of Sciences (1908-1936)". In: A. Díaz, et al. (eds.) (1990), 219-223.

BALTZER, R. (1881) *Elementos de matemáticas. Trigonometría*. Madrid, Imprenta de Segundo Martínez.

BERNALTE, A. & LLOMBART, J. & VIÑAS, J. (1988) "Introducción de las geometrías no-euclídeas en España". In: Esteban, M. et al. (coord.) (1988), tomo II, 969-977.

BRIGAGLIA, A. & MASOTTO, G. (1982) *Il circolo matematico di Palermo*. Bari, Edizioni Dedalo.

CALDERON, L. (1890) "Algunas ideas sobre la geometría y morfología natural". *Boletín de la Institución Libre de Enseñanza*, 14 (320), 164-168.

CANALDA, L. (1894) *Aplicaciones de la Geometría cinemática. Transformación de la ecuación del círculo en la recta, cuando el radio adquiere una magnitud infinita, por medio del rombo de Peaucellier*. Barcelona, Real Academia de Ciencias y Artes de Barcelona.

_____ (1899) *Aplicaciones de la Geometría cinemática*. Barcelona, Real Academia de Ciencias y Artes de Barcelona.

CLARIANA, L. (1884) "Nociones de trigonometría general". *Crónica científica*, 7, 193-200.

CORTAZAR, J. (1867) *Tratado de Trigonometría rectilínea y esférica y de topografía*. Madrid.

CREMONA, L. (1873) *Elementi di geometria proiettiva ad uso dei Istituti Tecnici del Regno d'Italia*. Roma/Torino/Milano/Firenze, G. B. Paravia e Comp.

CHASLES, M. (1875) *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géométrie, particulièrement de celles qui se rapportent à la géométrie moderne*. 2ª edición. Paris, Gauthier-Villars.

CHAVE Y CASTILLA, J. (1891) *Ensayo de una nueva teoría de la proporcionalidad de las líneas rectas*. Madrid, Imprenta de Ricardo Rojas.

DÍAZ, A. & ECHEVERRÍA, J. & IBARRA, A. (eds.) (1990) *Structures in Mathematical Theories. Reports of the San Sebastian International Symposium. September 25-29, 1990*. San Sebastián, Servicio Editorial de la Universidad del País Vasco.

ECHEGARAY Y EIZAGUIRRE, J. (1865a) *Problemas de geometría analítica. Primera parte. Analítica de dos dimensiones*. Madrid.

_____ (1865b) *Problemas (elementales) de geometría. Primera parte. Problemas de geometría plana*. Madrid.

_____ (1867) *Introducción a la Geometría superior*. Madrid.

ELIZALDE, J. A. (1873-78) *Curso de Geometría descriptiva*. Madrid.

ESPAÑOL, L. (ed.) (1990) *Estudios sobre Julio Rey Pastor (1888-1962)*. Logroño, Instituto de Estudios Riojanos.

EZQUERRO, J. A. & MARTINEZ, M. A. & UGARTE, M. D. & VELAMAZAN, M. A. (1990) "Applicability as a criterion of generation and selection of mathematical theories". In: A. Díaz et al. (eds.) (1990), 357-362.

FANO, G. "Exposé parallèle du développement de la géométrie synthétique et de la géométrie analytique pendant le 19ième siècle". In: *Encyclopedie des Sciences Mathématiques pures et appliquées*, Artículo III, 3, traducido por S. Carrus.

FAVARO, A. (1879) *Leçons de statique graphique. Première partie: Géométrie de position*. Paris, Gauthier-Villars.

FIEDLER, O. W. (1871) *Die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage*. Leipzig.

FIOCCA, A. & PEPE, L. (1989) "L'insegnamento della matematica all'Università di Ferrara dal 1771 al 1942". In: *Università e cultura a Ferrara e Bologna*. Firenze, Leo S. Olschki Editore.

GARCIA CAMARERO, E. (1984) "La Matemática en la España del siglo XIX". In: M. Hormigón (ed.) (1984a), tomo 2, 115-130.

GARCIA DE GALDEANO, Z. (1888) *Geometría elemental*. Toledo.

_____ (1892) *Geometría general. Parte 1ª*. Zaragoza.

_____ (1895) *Geometría general. Parte 2ª*.

Sistematización de la Geometría. Zaragoza.

_____ (1904a) *Tratado de Análisis Matemático*.

Tomo II: Principios generales de la teoría de funciones. Zaragoza.

_____ (1904b) *Tratado de Análisis Matemático*.

Tomo III: aplicación del cálculo diferencial al estudio de las figuras planas. Zaragoza.

_____ (1905) *Tratado de Análisis Matemático. Tomo*

V: aplicación del cálculo diferencial al estudio de las figuras en el espacio. Zaragoza.

_____ (1908a) "Algunas observaciones pedagógicas acerca de la Matemática". In: *Memorias presentadas por Don Zoel García de Galdeano. Actas del Congreso de Zaragoza de la Asociación Española para el Progreso de las Ciencias*, 1-4.

_____ (1908b) "Plan de Enseñanza Matemática". In: *Memorias presentadas por Don Zoel García de Galdeano. Actas del Congreso de Zaragoza de la Asociación Española para el Progreso de las Ciencias*, 5-10.

_____ (1908c) "La Matemática en su estado actual". In: *Memorias presentadas por Don Zoel García de Galdeano. Actas del Congreso de Zaragoza de la Asociación Española para el Progreso de las Ciencias*, 23-34.

GARMA, S. (1978) "La enseñanza de las matemáticas en España en el segundo tercio del siglo XIX". *Llull*, 1 (2), 26-34.

_____ (1988) "Cultura matemática en España en los siglos XVIII y XIX". In: J. M. Sánchez Ron (ed.) (1988), 93-127.

GAZTELU, L. (1912) "Les Mathématiques à l'Ecole d'Ingénieurs de Ponts et Chaussées". In: C. Jiménez Rueda (1912a), 75-96.

GISPERT, H. (1989) "L'Enseignement scientifique supérieur et ses enseignants, 1860-1900: les mathématiques". *Histoire de l'éducation*, 41, 47-78.

_____ (1989-90) "Le milieu mathématique français et ses manuels (1870-1900)". *Sciences et techniques en perspective*, 16, 1-7.

_____ (1990) "Features of the French mathematics development and of the higher education institutions (1860-1900)". *Prépublications, Université de Paris-Sud (Mathématiques)*.

HENSEL, S. (1989) "Zu einigen Aspekten der Berufung von Mathematikern an die Technischen Hochschulen Deutschlands im letzten Drittel des 19. Jahrhunderts". *Annals of Science*, 46, 387-416.

HERNANZ, C. & MEDRANO, J. (1990) "José Mariano Vallejo: notas para una biografía científica". *Llull*, 13 (25), 427-446.

HORMIGON, M. (1981) "El Progreso Matemático (1891-1900): un estudio de la primera revista matemática española". *Llull*, 4 (6-7), 87-115.

_____ (1982) *Problemas de Historia de las matemáticas en España (1870-1920)*. Zoel García de Galdeano. Tesis doctoral, Universidad Autónoma de Madrid.

_____ (1983) "García de Galdeano y la modernización de la geometría en España". *Dynamis*, 3, 199-229.

_____ (ed.) (1984a) *Actas del II Congreso de la Sociedad Española de Historia de la Ciencia (Jaca, 27 de septiembre - 1 de octubre de 1982)*. Zaragoza, Sociedad Española de Historia de las Ciencias.

_____ (1984b) "El Paradigma Hilbertiano en España". In: M. Hormigón (ed.) (1984a), tomo 2, 193-211.

_____ (1985) "La formación de Rey Pastor como estudiante en la Universidad de Zaragoza". In: L. Español (ed.) *Actas del I Simposio sobre Julio Rey Pastor*. Logroño, Instituto de Estudios Riojanos, 193-204.

_____ (1987b) *Catálogo de la producción matemática en España entre 1870 y 1920*. Zaragoza, SEHCTAR, Universidad de Zaragoza.

_____ (1988) "Las matemáticas en España en el primer tercio del siglo XX". In: J. M. Sánchez Ron (ed.) (1988), 253-282.

_____ (1990) "Science et Etat à l'Espagne contemporaine". In: E. Ausejo (ed.) (1990), 13-21.

INDEX du Répertoire Bibliographique des Sciences Mathématiques, publié par la Commission Permanente du Répertoire. Paris, Gauthier-Villars, 1893.

ISRAEL, G. & NURZIA, L. (1983) "Correspondence and manuscripts recovered at the Istituto matematico 'G. Castelnuovo' of the University of Rome". *Historia Mathematica*, 10, 93-97.

JIMENEZ RUEDA, C. (ed.) (1898) *Tratado de las formas geométricas de primera categoría precedido de una introducción sobre los conceptos fundamentales de la geometría e ilustrado con 118 figuras intercaladas en el texto*. Valencia.

_____ (1898) *Tratado de las formas geométricas de segunda categoría*. Valencia

_____ (1912a) *L'Enseignement des Mathématiques en Espagne. Mémoires présentés au Congrès de Cambridge*. Madrid.

_____ (1912b) "Enseignement de la géométrie métrique à la Faculté des sciences". In: C. Jiménez Rueda (1912a), 21-49.

_____ (1918) *Discurso leído ante la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales por el señor D. Cecilio Jiménez Rueda en su recepción pública*. Madrid, Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.

KÖTTER, E. (1887) *Grundzüge einer rein geometrischen Theorie der algebraischen ebenen Kurven*. Berlin.

LAIN, P. (1982) "La Ciencia en España". *Boletín informativo de la Fundación Juan March*, 115, 33-38.

LOMBART, J. (1987) "*Crónica científica*. Catálogo de autores de la sección I: Ciencias Exactas". *Llull*, 10 (18-19), 139-146.

_____ (1988) *Catálogo de la revista Gaceta de Matemáticas Elementales-Gaceta de Matemáticas (1903-1906)*. Zaragoza, Seminario de Historia de la Ciencia y de la Técnica de Aragón, Universidad de Zaragoza.

_____ (1989) "Un estudio sobre la revista *Gaceta de Matemáticas Elementales-Gaceta de Matemáticas (1903-1906)*". *Llull*, 12 (22), 7-32.

LLOMBART, J. & BERNALTE, A. (1988) "Noticia sobre Atanasio Lasala y Martínez (1847-1904), catedrático de Instituto". In: Esteban, M. et al. (coord.) (1988) *Estudios sobre Historia de la Ciencia y de la Técnica*, tomo II. Valladolid, Junta de Castilla y León., 963-968.

_____ (1990) "El estudio de las geometrías no euclídeas en España a comienzos del siglo XX en España. La obra de José Bartrina y Capella (1861-1946)". In: Español, L. (ed.) (1990), 341-353.

LORIA, G. (1919) "Le matematiche in Ispagna ieri e oggi". *Scientia*, 25, 353-359 y 441-449.

LOPEZ PIÑERO, J.M. (1979) "La marginación de la ciencia en la España contemporánea". In: GONZALEZ BLASCO, P. & JIMENEZ BLANCO, J. & LOPEZ PIÑERO, J.M. *Historia y sociología de la ciencia en España*. Madrid, Alianza Editorial, 72-93.

LUNDGREEN, P. (1990) "Engineering Education in Europe and the U.S.A., 1750-1930: The rise to the Dominance of School Culture and the Engineering Professions". *Annals of Science*, 47, 33-75.

LUSA, G. (1985) "Las Matemáticas en la Ingeniería: la obra de Rey Pastor". In: Español, L. (ed.) (1985), 205-219.

_____ (1987) "El debate acerca de las Matemáticas en la Ingeniería: aportaciones de E. Terradas". In: *Cinquanta Anys de Ciència i Tècnica a Catalunya*. Barcelona, Institut d'Estudis Catalans, 121-133.

MILLAN, A. (1990a) "Methods of synthetic geometry in the second half of the nineteenth century". In: Díaz et al. (eds.) (1990), 283-288.

_____ (1990b) "El Teorema fundamental de la recta proyectiva en la obra 'Fundamentos de la geometría proyectiva superior' de Julio Rey Pastor". In: Español, L. (ed.) (1990), 355-377.

_____ "La enseñanza universitaria de la geometría en España (1875-1920)". In: *Actas del V Congreso de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas*. Murcia, en prensa.

MONTANUY, M. & NUÑEZ, J. M. & SERVAT, J. (1990) "La Matemática en la Real Academia de Ciencias y Artes de Barcelona: las Memorias durante el periodo 1770-1890". *Llull*, 13 (24), 107-130.

MORENO, A. (1988) *La física académica en España (1700-1900)*, Madrid, CSIC.

MOY, C. M. de (1888) *Estática gráfica. Primera parte: Geometría Projectiva*. Barcelona.

MUNDI Y GIRO, S. (1884) *Apuntes de geometría de la posición tomados de las explicaciones del Dr. D. Santiago Mundi, catedrático de dicha asignatura en esta Universidad, por D. Julio Enamorado, D. Arturo Ydrach, D. Luis Cuello y D. Arturo Vidal*. Barcelona: autografiado.

_____ (1893) *Lecciones de Geometría analítica*. Barcelona.

_____ (1904) *Lecciones de Geometría métrica*. Barcelona.

NUÑEZ, J. M. & SERVAT, J. (1988) "La matemática y la Institución Libre de Enseñanza: concepciones teóricas y pedagógicas". *Llull*, 11 (20), 75-96.

OCTAVIO DE TOLEDO, L. (1912) "D. Eulogio Jiménez". *Revista de la Sociedad Matemática Española*, 2, 1-5.

_____ (1932) "Echegaray. Rasgos biográficos". *Revista Matemática Hispano Americana*, 2ª serie, 7, 49-63.

PASCH, M. (1913) *Lecciones de Geometría moderna*. Traducción española de J. Rey Pastor y J. G. Alvarez Ude de la primera edición alemana, con adiciones del autor. Madrid, Junta para Ampliación de Estudios.

PENALVER, P. (1912) "L'enseignement du calcul infinitesimal aux Facultés des Sciences Espagnoles". In: Jiménez Rueda (1912a), 63-74.

PÉREZ, M. C. & MUÑOZ, F. (1988) "La Revista de los Progresos de las Ciencias Exactas, Físicas y Naturales". In: Esteban, M. et al. (coord.) (1988), tomo I, 543-552.

PESET, J.L. & GARMA, S. & PEREZ GARZON, J.S. (1978) *Ciencias y Enseñanza en la Revolución burguesa*. Madrid, Siglo XXI.

PICON, A. (1989) "Les ingénieurs et la mathématisation. L'exemple du génie civil et de la construction". *Revue d'Histoire des Sciences*, 12 (1-2), 155-172.

PLANS, J.M. (1926) "Las matemáticas en España en los últimos cincuenta años". *Ibérica*, 25, 172-174.

PONCELET, J. V. (1965) *Traité des propriétés projectives des figures, ouvrage utile à ceux que s'occupent des applications de la géométrie descriptive et d'opérations géométriques sur le terrain*. Tome premier. Deuxième édition, revue, corrigée et augmentée d'annotations nouvelles. Paris, Gauthier-Villars.

PORTUONDO, A. (1879) *Notas al Tratado de Geometría elemental de E. Rouché y C. de Comberousse. Para el uso de los candidatos a las Escuelas Especiales civiles y militares*. Madrid.

RAFAEL, E. de (1918) "Don Eduardo Torroja". *Ibérica*, 10, 202-203.

REY PASTOR, J. (1910) *Correspondencia de figuras elementales. Con aplicación al estudio de las figuras que engendran*. Madrid.

_____ (1916a) *Introducción a la Matemática Superior*. Madrid, Biblioteca Corona.

_____ (1916b) *Evolución de la Matemática en la Edad Contemporánea*. Madrid, Conferencias de la Sección de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales del Ateneo de Madrid.

_____ (1916c) "José Echegaray". *España*, 2 (87) 21-9-1916, 702-703.

_____ (1951) *La Matemática Superior. Métodos y Problemas del Siglo XIX*. Buenos Aires-Madrid, Editorial Iberoamericana.

REYE, T. (1881) *Leçons de géométrie de position*. 2 vols, Paris, Gauthier-Villars.

REYES Y PROSPER, V. (1886) "Sur la géométrie non-euclidienne". *Mathematische Annalen*, 29,154-156.

_____ (1888) "Sur les propriétés graphiques des figures centrales". *Mathematische Annalen*, 32,157-158.

ROMERO WALSH, A. d. (1876-1884) *Investigaciones sobre los sistemas polares*. Barcelona, Real Academia de Ciencias y Artes de Barcelona.

ROUCHE, E. & COMBEROUSSE, CH. (1878) *Tratado de Geometría elemental*. Madrid.

ROWE, D.E. (1985) "Felix Klein's Erlanger Antrittsrede. A transcription with English Translation and Commentary". *Historia Mathematica*, 12, 123-141.

RUIZ, D. (1981) "España 1902-1923: vida política, social y cultural". In: Tuñón de Lara, M. (ed.) *Historia de España*. Barcelona, Labor, Tomo VIII, "Revolución burguesa, oligarquía y constitucionalismo (1834-1923)", 461-527.

SANCHEZ PEREZ, J. A. (1932) "Echegaray. Rasgos biográficos". *Revista Matemática Hispano-Americana*, (2ª s), 7, 49-58.

SANCHEZ RON, J. M. (ed.) (1988) *Ciencia y sociedad en España: de la Ilustración a la Guerra Civil*. Madrid, Ediciones El Arquero, CSIC.

_____ (1990) "José Echegaray: matemático y físico-matemático". In: *José Echegaray*. Madrid, Fundación Banco Exterior, 11-132.

SCHOENFLIES, A. "Géométrie projective". In: *Encyclopedie des Sciences Mathématiques pures et appliquées*, Artículo III, 8, traducido por A. Tresse.

SCHOLZ, E. (1984) "Projektive und vektorielle Methoden in Culmanns Graphischer Statik". *NTM-Sch. Gesch. Naturwiss. Technik u. Med.*, 21 (2), 49-64.

SEGRE, C. (1891) "Su alcuni indirizzi nelle investigazioni geometriche". *Rivista di Matematiche*, 1, 42-46.

SHINN, T. (1979) "The French Science Faculty System, 1808-1914: Institutional Change and Research Potential in Mathematics and the Physical Sciences". *Historical Studies in the Physical Sciences*, 10, 271-332.

STAUDT, G.C.C. von (1889) *Geometria di Posizione*. Torino, Fratelli Bocca Editori.

TOMEIO, M. (1962) *Biografía científica de la Universidad de Zaragoza*. Zaragoza.

TORNER, J. (1912) "Les mathématiques à l'Ecole d'ingénieurs des Eaux et Forêts". In: Jiménez Rueda (1912a), 97-106.

TORROJA, E. (1879) *Axonometría o perspectiva axonométrica*. Madrid.

_____ (1880) *Resumen de algunas lecciones de Geometría descriptiva explicadas en la Universidad de Madrid por el Catedrático de la misma D. Eduardo Torroja, en el curso académico 1879 a 1880*, Madrid.

_____ (1884) *Programa y resumen de las lecciones de Geometría descriptiva explicadas en la Universidad Central por D. Eduardo Torroja*, tomo I, Madrid.

_____ (1893) *Discursos leídos ante la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales en la recepción pública del Sr. D. Eduardo Torroja y Caballé el día 29 de Junio de 1893*. Madrid, Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.

_____ (1899) *Tratado de Geometría de la Posición*. Madrid.

_____ (1904) *Teoría geométrica de las líneas alabeadas y las superficies desarrollables*. Madrid.

_____ (1909) *Tratado de Geometría de la Posición y sus aplicaciones a la teoría de la medida*. Madrid.

VAL, J. del (1960) "Un lógico y matemático español del siglo XIX: Ventura Reyes y Prósper". *Revista de Occidente*, 2ª época, 4, 252-261.

VEA, F. (1986) *Las matemáticas en los Planes de Estudio de enseñanza secundaria en España en el siglo XIX*. Zaragoza, Seminario de Historia de la Ciencia y de la Técnica de Aragón, Universidad de Zaragoza.

VEA, F. & HORMIGON, M. (1989) "Plan de estudios de 1894". In: *Actas del II Simposio de Enseñanza e Historia de las Ciencias (Pamplona, 23-25 septiembre 1985)*. Zaragoza, Universidad de Zaragoza, 357-377.

VEGAS, M. (1888) *Estudio geométrico de las líneas alabeadas y haces de planos de tercer orden*. Madrid.

_____ (1909) *Discursos leídos ante la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales en la recepción pública del Sr. D. Miguel Vegas y Puebla-Collado el día 13 de Junio de 1909*. Madrid, Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.

_____ (1912) "M. Torroja et l'évolution de la géométrie en Espagne". In: Jiménez Rueda (1912a), 5-19..

VELAMAZAN, M.A. (1990) "L'Enseignement des Mathématiques dans les Ecoles Militaires en Espagne au XIXème siècle". In: Ausejo, E. (ed.) (1990), 23-37.

VELAMAZAN, M.A. & AUSEJO, E. (1989) "Los planes de estudio en la Academia de Ingenieros del Ejército de España en el siglo XIX". *Llull*, 12 (23), 415-453.

VIDAL ABASCAL, E. (1962) "El profesor Rey Pastor". *Revista Matemática Hispano-Americana*, 4ª Serie, 21 (2), 116-120.

VILLAFANE, J. M. (1883) *Elementos de geometría analítica*. Valencia.

VIÑAS, J. (1987) "El zero i l'infinit: la geometria a Barcelona al tombant de segle". In: *Cinquanta Anys de Ciència i Tècnica a Catalunya*. Barcelona, Institut d'Estudis Catalans, 135-148.