LLULL, vol. 13, 1990, 5-19

EL RIGOR EN LOS LIBROS DE TEXTO DE GEOMETRIA EN LOS COMIENZOS DEL SIGLO XIX. JOSE MARIANO VALLEJO Y LAS *ADICIONES A LA GEOMETRIA DE DON BENITO BAILS*

VICTOR ARENZANA HERNANDEZ
Seminario de Historia de la Ciencia y de la Técnica de Aragón

RESUMEN

En el presente artículo se analiza el cambio de orientación que sufrió la enseñanza de la geometría en España a comienzos del siglo XIX y la dependencia que tuvo nuestro país de las orientaciones científicas y pedagógicas europeas.

En primer lugar se describen las opiniones sobre la enseñanza de la geometría en el siglo XVIII expuestas por Benito Bails en su obra Elementos de Matemáticas, *donde expone cómo la docencia de esta materia había abandonado, en todo el continente, el rigor euclídeo y su aprendizaje se basaba en la intuición.*

A continuación se estudia la obra Adiciones a la Geometría de don Benito Bails *(1806) de José Mariano Vallejo, en la cual puede apreciarse una vuelta al rigor euclídeo y a los métodos demostrativos de Arquímedes.*

ABSTRACT

In this paper the change of orientation in the teaching of geometry in Spain at the beginning of the 19th century is analyzed, as well as its dependence on the scientific and pedagogical orientations in Europe.

In the first part the opinions about the teaching of geometry in the 18th century exposed by the spanish mathematician Benito Bails (1730-1797) in his work Elementos de Matemáticas *(Elements of Mathematics, 1772-1783) are described. This author emphasized the fact the euclidean rigor had been given up in Europe, so that the teaghing of geometry is based upon intuition.*

Then the book Adiciones a la Geometría de Don Benito Bails *(Additions to Benito Bails' Geometry), published by José Mariano Vallejo (1779-1846) in 1806 is studied.*

Recibido el 7 de febrero de 1989

Este nuevo rumbo en la enseñanza de la geometría en España es debido, en buena medida al conocimiento que tenía Vallejo de los libros de texto de Lacroix, Legendre y Bertrand.

Vallejo contribuyó a la difusión de la obra de estos autores con su labor en el Real Seminario de Nobles de Madrid y con la publicación de las Adiciones, *que aportaba rigor geométrico a la obra de Bails, la cual había tenido gran aceptación popular.*

It is shown how this mathematician turns back to Euclide and Archimedes' methods, mainly because of the influence of the books from Lacroix, Legendre and Bertrand.

Vallejo took on the diffusion of these works by means of his activities at the Real Seminario de Nobles *at Madrid and his publication of these* Aditions *to Benito Bails' Geometry well widespread in Spain.*

Palabras clave: Historia de las Matemáticas, Enseñanza de las Matemáticas, Geometría, Método de Exhaución, Siglos XVIII y XIX, Benito Bails, José Mariano Vallejo.

1. Introducción

En el siglo XVIII la postura general de los ilustrados de la mayor parte de los países frente a la educación era muy uniforme. Todos ellos estaban convencidos de que la educación era un factor decisivo para conseguir el desarrollo del hombre y de la sociedad, de ahí su insistencia en la labor educativa hasta el punto que muchos llegaron a pensar que todos los valores culturales se podían medir en la proporción en que eran capaces de fomentar la educación. En esta situación, los jóvenes eran considerados como la tierra donde sembrar las nuevas ideas, tanto científicas, como sobre el derecho, la economía, la concepción del mundo, etc.

Las ciencias no se libraron de este afán pedagógico y tampoco las matemáticas; pronto empezaron a aparecer libros de texto para facilitar a los jóvenes la enseñanza de las mismas. El libro de texto tuvo una importancia capital en la difusión de la ciencia moderna. Con el título de *Elementos, Principios* o *Compendios* aparecieron libros que constituían verdaderos cuerpos doctrinales que se situaron en frente del escolasticismo. Estas obras estaban destinadas a tener la máxima difusión y, aunque jugaron un papel decisivo en la enseñanza de las ciencias para un gran número de personas, que no hubieran podido comprender las grandes teorías científicas en la versión original de sus autores, en muchas ocasiones se produjeron divulgaciones que afectaban al rigor, e incluso al espíritu, de la propia teoría, si bien facilitaban la difusión de la misma y sus aplicaciones.

En geometría se rompió el modelo euclídeo y se apeló a la intuición, estableciendo una serie de axiomas intermedios en sustitución de proposiciones demostrables en el sistema establecido por el matemático griego.

2. Benito Bails y la Geometría

Benito Bails (1730-1797), en el prólogo del primer tomo de su obra enciclopédica *Elementos de Matemáticas* (1772-1783), expuso de un modo claro y preciso los criterios que había observado para la elaboración de la geometría que recogió en su libro y los motivos por los que adoptó la metodología expositiva empleada en su obra.

En el prólogo comenzaba diciendo que había tomado la decisión de no seguir los *Elementos* de Euclides, puesto que, aunque la belleza y el rigor de su exposición había hecho que muchos autores en todas las épocas consideraran esta obra como la Biblia de la geometría, resultaba de una dificultad extremada y de lento aprendizaje para los principiantes[1]. Bails apoya su decisión de no seguir los *Elementos* de Euclides y, por consiguiente, de abandonar el modo riguroso de la exposición euclídea en favor de otros métodos demostrativos que resultaran más fáciles a los principiantes, con la opinión de prestigiosos autores de libros de matemáticas de toda Europa que habían optado por una vía expositiva encaminada a facilitar el aprendizaje de la geometría a costa de no seguir el método de Euclides.

A continuación se aportan las opiniones de distintos autores de libros pedagógicos de geometría de diferentes países, todos ellos citados por Benito Bails en *Elementos de Matemáticas.*

El primer autor que cita Bails para justificar su postura es Christian Wolff (1679-1754), el cual en el tomo primero de su obra *Elementa Matheseos Universae* (1743) introduce el principio de semejanza y la lógica latina para hacer más accesible la enseñanza de la geometría. Manifestando esta decisión con las siguientes palabras:

> "Euclides, y á su exemplo todos los Matemáticos que ha habido despues de él, no han tenido mas fundamento de todos sus demostraciones, que el principio de la congruencia. Pero habiéndome dado á conocer el ingeniosísimo Leibnitz la noción de la similitud, ó semejanza, previniéndome que podía ser de mucho uso en la Geometría, el qual despues de meditar en ello conocí que podía ser dilatadísimo: no puse el menor reparo en introducir en la Geometría el principio de la semejanza. Me ha servido, conforme se verá, para demostrar con suma facilidad muchas proposiciones cuya evidencia no se puede manifestar por el principio de la congruencia, sino por rodeos"[2].

Continuando este autor diciendo en el tomo quinto de la misma obra:

"Aunque no damos en esta obra los Elementos de Euclides, quantas proposiciones hay en estos se hallarán, ó en Arismética, ó en la Geometría, ó en el Algebra, conforme lo harémos patente mas adelante. Nuestro principal cuidado ha sido demostrarlas en todo rigor, ajustando nuestras demostraciones á las reglas que dimos en nuestra Lógica latina; pero acomodándolas á la capacidad de los principiantes, constándonos por la experiencia de muchos años el grandísimo beneficio que de aquí se les sigue"[3].

En este mismo sentido se manifiesta Vito Caraveli en su obra titulada *Euclides Elementa quinque postrema solidorum scientiam*, publicada en Nápoles en 1730, cuando dice:

"No he compuesto esta obrita para los Geómetras; pero aseguro que será de alguna utilidad á los principiantes, de manera, que con menos tiempo y trabajo llegarán sin tropiezo alguno al término adonde otros apenas han llegado, ó han llegado por un camino áspero, é intransitable. ¿A quien no espantan, cansan y desatinan, por decirlo así, las larguísimas, y á veces dificultosísimas demostraciones de Euclides, Comandino y Clavio?... Los lectores aplicados, que se decian al estudio de las Matemáticas hallarán en este libro quanto pertenece a la Geometría de los sólidos, pero lo hallaran declarado de modo que para su inteligencia les bastará con mediana aplicación; y con el fin de proporcionarles este alivio, he desechado las demostraciones difusas, é intrincadas de Euclides, substituyendo en su lugar otras mas breves y mas fáciles"[4].

En el tomo primero de sus *Elementa Geometriae theoricae, et practicae* de Lechi, impreso en Milán en 1753, se explica el abandono del rigor euclídeo en estos términos:

"Algunos hombres, extremados partidarios de lo antiguo, quieren que los muchachos estudien la Geometría por Euclides, y no por otro autor ninguno: que por ser Euclides un escritor de mucho nombre, le miremos por razón de fama de su antigua gloria con respeto, y casi con reverencia; y que por haberse formado por sus Elementos como una escuela comun de Geometría todos quantos Matemáticos de opinión ha habido en los siglos pasados, sea un atentado apartarse de su obra y de su método; asegurando, que si acaso Euclides se les resiste algun poco á los principiantes, por lo mismo es á propósito para explorar su talento, y dar á conocer aquellos pocos que nacieron, ó se criaron para geómetras... Pues aun cuando concurrieran en los principiantes estas circunstancias ¿que mal habria en allanarles el camino? Puedo asegurar que desde que enseño me ha manifestado la experiencia, que los mas de los primeros teoremas no son proporcionados a la capacidad de los principiantes todavía poco exercitada. Tengo presente, que cuando los iba encaminando poco á poco á las primeras proposiciones, quarta, quinta, sexta, septima, y octava por el orden de Euclides, les entraba siempre el mismo terror que si hubiesen tropezado con escollos muy espantosos. Tambien habían oido decir que en las mismas proposiciones se habian atascado muchos, siendo para muchísimos una puente azarosa, que muy pocos lograr pasar, y seguramente, á no animarlos yo con la mayor eficacia, los mas se hubieran aburrido... Siempre he creído que estos tropiezos, y pura fascinación, son efecto de la mala colocación de las proposiciones de los Elementos, en cuya coordinación he reparado que Euclides solo buscó el método que correspondia á un matemático riguroso, de manera que los teoremas quedaran muy enlazados unos con otros, cuyo método basta sin duda para demostrar, pero no sirve para la enseñanza. Y á no ser que los matemáticos mas acreditados de estos tiempos han puesto ya esta tacha á la obra de Euclides, me guardara yo muy bien de decir mi parecer. Y de hecho, las mismas proposiciones que tanto molestan á los muchachos, se les harian muy fáciles de entender, si empezando por las mas sencillas, fuesen exercitando poco á poco su entendimiento y fantasía acostumbrándose á considerar primero, y comparar unos con otros tantos ángulos. ¿Habrá acaso quien no confiese que todo el libro segundo de Euclides es trabajosísimo para los principiantes? El cual ninguna fatiga les costaría si se les hubiese dexado para mas oportuno lugar la consideración de aquellos rectángulos y quadrados formados por varios segmentos de líneas. No digo nada de los demas libros... Y si hay algun medio de curar del todo, ó minorar por los menos este terror ¿que razón habrá para que dexemos de aliviar el trabajo, y precaver el aburrimiento de los que en adelante quisiesen dedicarse al estudio de la Geometría? Y en esto tengo no solo garantes, mas tambien por autores de mi dictamen quasi todos los escritores Italianos y Ultramontanos, que escribieron mucho antes que yo, los cuales no hemos de pensar que lo hiciesen por capricho, ni con el intento de derribar á Euclides del alto lugar en que le tenia asegurado el consentimiento de tantos siglos. No por cierto. Todos confiesen unánimes que es Euclides un geómetra perfecto y cabal. Pero tengamos presente estas palabras de Ciceron; ¿Que no se ha adelantado nada en el discurso en tantos siglos, cono en el talento y la aplicación de tantos hombres? ¿Nada se ha añadido á lo que dexó Euclides"[5].

También el padre Odoardo Gherli, en una de las obras más elogiadas por Bails: *Gli Elementi Teorico-Practici delle Mathematiche Pura* (1770), dice para justificar su alejamiento de los Elementos de Euclides:

"Aunque el método de Euclides ha sido y es todavia comunmente adoptado, porque jamas se aparta del método geométrico mas riguroso, cuya circunstancia esencial es dar al entendimiento exactitud, regla y precisión, sin embargo porque interrumpe continuamente el orden de las cosas, á lo que deben atribuirse en mi entender las insuperables dificultades que para á la mayor parte de los principiantes, he tenido por acertado no seguirle, bien que sin quebrantar jamas las leyes de la demostración, á fin de allanar el camino á los que quisieren dedicarse á esta sublime necesaria ciencia; y con adoptar (conforme lo han practicado otros antes de ahora) el metodo mas obvio y natural, por el cual de las nociones mas sencillas se pasa á los teoremas de mayor dificultad, y mediante una continuada cadena, por decirlo asi, he procurado quitar la obscuridad, y hacer de facil acceso aquellas proposiciones que en Euclides son el escollo de los muchachos, aunque de mas que mediana capacidad. Así me ha parecido que encaminaría por un camino mas facil y breve á los principiantes al conocimiento de los mas ocultos arcanos de esta ciencia, y lograria atajar su natural instabilidad y ligereza, que con inquieta inconstancia los mueve á cansarse y disgustarse luego de todo; siendo cierto que la extremada proligidad, sobre ser molesta para los mozos de talento, no alivia a los que son de corto alcance"[6].

También hubo matemáticos ingleses que dejaron a un lado el método expositivo de Euclides. William Emerson dice, en su obra publicada en Londres en 1763 *The Elements of Geometry. In wich the principal propositions of Euclid, Archimedes, and others, are demonstrated after the most easy manner*, lo siguiente:

"Pero no hemos de creer que en aquellos tiempos antiguos estuviese tan adelantada esta ciencia [la Geometría], como ahora, sino que en los siglos siguientes hombre de gran talento la fueron perfeccionando con su estudio y penetración en que está hoy dia. Por lo que no es de extrañar que Euclides y Archimedes usasen de rodeos para demostrar muchas proposiciones que los modernos demuestran cón mas brevedad y claridad. De suerte que no se puede negar que en los Elementos de Euclides hay muchísimas proposiciones inútiles, que solo sirven para demostrar, siguiendo su plan, las proposiciones que siguen despues. Pero no están colocadas pòr el orden, ni con el método correspondiente porque trata con freqüencia en un mismo lugar asuntos diferentes, mezclándolos sin elección, y sin atender á la naturaleza de las cosas, ni al enlace de unas cosas con otras; y tambien suele tocar un mismo punto en distintos lugares; siendo patente que de aquí no puede originarse sino confusión. Pero en estos Elementos hay tambien muchas proposiciones desconocidas de los antiguos Matemáticos, los cuales son de tanta utilidad como las de Euclides"[7].

Puede apreciarse, según Bails, que en muchos países de Europa había una corriente que relegaba los *Elementos* de Euclides y adoptaba otro método expositivo que tendía más a apoyarse en la intuición y otros principios extrageométricos para facilitar el aprendizaje de los estudiantes. Si se tiene en cuenta que la enseñanza de la geometría había permanecido inamovible a lo largo de veinte siglos y que el análisis infinitesimal estaba consiguiendo uno de los éxitos más sonados de la historia de la ciencia con la reducción de los principios de la mecánica y la astronomía a lenguaje matemático se debía pensar, como, de hecho, lo expresó Lagrange (1736-1813)[8], que el objeto de estudio de la matemática se estaba agotando y que se estaban comenzando a perfilar unas disciplinas matemáticas tan acabadas y estables como la geometría. En una situación semejante parecía lógico intentar facilitar la Enseñanza de las matemáticas, porque, por un método u otro, se llegaría a comprender la magnitud de los descubrimientos matemáticos, ya que eran estables y acabados. Si a esta situación interna de la concepción de las matemáticas se le une la imperiosa necesidad que veían los gobiernos ilustrados de extender el conocimiento de esta materia a toda la sociedad nos podemos hacer una idea de porqué la enseñanza de la geometría relajó el rigor que tenía la geometría desde los tiempos de Euclides en el siglo III a. C..

No obstante, también en el siglo XVIII hubo defensores de los *Elementos* de Euclides. Cuando Thomas Simpson (1710-1761) escribió su obra *Elements of Plane Geometry* dejando de lado el rigor, recibió la crítica de Robert Simson (1687-1768), que había publicado una edición de los *Elementos* de Euclides[9].

Benito Bails se dejó llevar por la moda imperante en la exposición de la geometría y elaboró la suya a partir de las de los autores que se han mencionado anteriormente con lo cual en la enseñanza de esta materia en España se siguió la línea marcada por la mayor parte de los autores de libros de texto y, por consiguiente, lejos del método de Euclides.

3. Un cambio en la enseñanza de la geometría: José Mariano Vallejo

A comienzos del siglo XIX se comenzaron a apreciar en España algunos cambios en la enseñanza de la geometría, debidos también, en buena medida, a la influencia de la matemática europea. José Mariano Vallejo (1779-1846) fue uno de los primeros que contribuyó a esta evolución. Con él se produjo una vuelta al rigor de la geometría de los *Elementos* de Euclides. La concepción de Vallejo sobre cómo se debía enseñar la geometría se encuentra recogida en *Adiciones a la Geometría de Don Benito Bails*, publicada en 1806. Esta obra tiene su origen en las lecciones que impartió durante el curso 1803-1804 en el Real Seminario de Nobles de Madrid[10], cuyo contenido está esbozado en el *Certamen público de primer año de Matemáticas*, que se celebró en Madrid el día dieciocho de Julio de 1804[11]. Las lecciones del Seminario fueron del agrado de la Real Academia de San Fernando, la cual patrocinó su publicación en una obra que se pudiera usar por los alumnos de la Academia y en todos aquellos centros donde se explicara la obra de Benito Bails. Fruto del interés que despertaron en la Academia las lecciones de Vallejo fue la publicación de las *Adiciones* anteriormente mencionadas.

3.1. Adiciones a la Geometría de don Benito Bails de José Mariano Vallejo

Adiciones a la Geometría de don Benito Bails es un librito de ochenta y cinco páginas (más diez del prólogo) que tiene por objeto no sólo completar la geometría de Bails, sino realizar algunas aportaciones interesantes a la enseñanza de la misma[12]. La razón que se esgrime en el prólogo para justificar la oportunidad de su publicación es la de poner en claro para la juventud el estudio de la circunferencia, el cono y el cilindro, que en las geometrías al uso habían perdido la precisión y el rigor propios de la geometría, debido al abuso que se había hecho de la utilización de las nociones de infinito e infinitésimo en la geometría elemental[13].

El uso de los principios del cálculo infinitesimal había producido en la geometrías, según Vallejo, dos efectos perjudiciales que las *Adiciones* pretendían denunciar y remediar. El primero era la utilización de procedimientos extrageométricos (como el cálculo infinitesimal) dentro de la geometría que producía numerosos círculos viciosos en los razonamientos. Ya que, por ejemplo, al tratar en la geometría elemental el círculo como polígono de un número infinito de lados infinítamente pequeños, se estaba considerando esta figura tal y como se debía estudiar en el cálculo diferencial; por este motivo era un razonamiento falaz decir que la geometría elemental apoyaba con sus resultados los del cálculo infinitesimal cuando se conseguían con su utilización las mismas consecuencias que las obtenidas con la geometría. Ya que el hecho de añadir a los principios de ésta los conceptos de infinito e infinitésimo había hecho desaparecer el término de comparación[14]. El segundo, y no menos importante, era el de elevar a la categoría de axiomas proposiciones que se podían demostrar por los postulados de Euclides[15] y que se admitían habitualmente sin demostración por considerarlas evidentes. El ejemplo que se pone en el prólogo de la obra para justificar la necesidad de demostrar algunas proposiciones admitidas comúnmente como evidentes es el siguiente:

"Porque aunque sea cierto que de dos curvas, cuyos extremos se confunden, la que más se separa de la recta es la más larga, no se concibe sin demostración que el conjunto de dos tangentes tiradas desde un mismo punto a los extremos de un arco sea mayor que la longitud de mismo arco, pues aquel mayor desvío de las dos tangentes respecto de la línea recta podría muy bien ser recompensado o excedido por la curvatura del mismo arco,..."[16].

La vuelta al rigor euclídeo es clara cuando dice que para aceptar como cierto este resultado es preciso demostrar la proposición primera del libro décimo de Euclides, de la cual depende el enunciado anterior y otros resultados similares[17].

Llegando a concluir que, con este tipo de exposición de la geometría, tenía razón Jacobo Bernoulli (1654-1705) cuando afirmaba que la teoría matemática del círculo se creía, pero no se demostraba[18], ya que eran demasiadas las cuestiones que, en esta materia, se admitían porque parecían evidentes e intuitivamente ciertas y no por estar probadas con razonamientos geométricos.

Las ideas sobre la enseñanza de las matemáticas se encuentran recogidas en el prólogo de la obra, que está realizado por un socio de la Academia de San Fernando (probablemente el director); en él se repiten las ideas que Vallejo había expresado en las páginas que hacen de prólogo y que figuran con el título de Advertencia de *Certamen público del primer año de matemáticas* (1804)[19].

3.2. Influencias de la obra

Se afirma con frecuencia, y así se recoge en el *Diccionario Histórico de la Ciencia Moderna en España* que Vallejo, sin conocer la obra de los entonces considerados los renovadores de la matemática europea, como Sylvestre Lacroix (1765-1844)[20], Adrien Marie Legendre (1751-1833)[21] y Bertrand (fl. 1800)[22], coincidió con ellos en el modo de concebir las matemáticas; pero esto no es cierto, puesto que el mismo Vallejo afirma haberlos manejado con anterioridad a la publicación de sus *Adiciones*. Para la redacción de esta obra Vallejo manejó los libros de los autores anteriormente mencionados, que suponían un avance notable, en lo que a rigor se refiere, respecto a los libros de texto de matemáticas que se habían venido utilizando tradicionalmente en España.

Se debe matizar esta última afirmación, ya que el texto de Lacroix lo conocía cuando impartió las clases del Seminario de Nobles en el curso 1803-1804 que dieron origen a las *Adiciones* de 1806; la obra de este autor, junto con la de Arquímedes, constituyó la fuente de inspiración de sus clases. Los libros de los otros dos autores los adquirió en octubre de 1804, como lo afirma el autor[23]. Aunque esto vaya en contra de la concepción de Vallejo como genio aislado, cuyo rigor y orientación pedagógica de las matemáticas eran coincidentes con las pautas que regían los nuevos modos de la enseñanza de las mismas, se debe destacar la importancia que tiene, dentro del panorama de la matemática española, el hecho de que el texto de Lacroix se utilizara en España durante el curso 1803-1804, aunque sólo fuera para inspirar las clases de un profesor. Mucho más teniendo en cuenta que el texto de Lacroix se había publicado en 1797 y que la influencia de este autor se encuentra plasmada en las *Adiciones*.

En todo caso, de lo que no cabe duda es que las *Adiciones* constituyen un punto de enlace entre la geometría del siglo XVIII, intuitiva, poco rigurosa y muy aparente para el movimiento general de ideas creado por la *Enciclopédie* y la geometría del siglo XIX, más rigurosa y axiomática[24]. Este punto de enlace se pone aún más de manifiesto desde el momento que esta obra de Vallejo (que tiene las características, en lo que a exactitud, rigor y precisión se refiere, de una obra del siglo XIX) tiene como objeto poner al día la obra de Bails, que recoge el espíritu de la concepción de la geometría en el siglo XVIII[25].

3.3. *El planteamiento de la geometría en las Adiciones*

El contenido geométrico de las *Adiciones* de José Mariano Vallejo afectan a once párrafos de la geometría recogida en el tomo primero de los *Principios de Matemáticas* de Benito Bails[26].

La obra está constituída por una serie de teoremas que se deben intercalar entre distintos párrafos de los *Principios de Matemáticas* de Bails. Su objetivo era unir de una forma rigurosa algunos conceptos, que Bails había relacionado haciendo uso de la intuición o de los conceptos de infinito e infinitésimo para demostrar proposiciones de la geometría elemental. Resulta evidente, por tanto, que esta obra de Vallejo no resultaba plenamente útil si no se utilizaba junto con los *Principios* de Bails, puesto que la referencia a los párrafos de esta obra es continua y sin ella resulta una colección de teoremas con demostración rigurosa, pero sacados de contexto.

Comienzan las *Adiciones* con unas definiciones, teoremas y proposiciones que se utilizan para las demostraciones posteriores de la obra. Después de definir los conceptos de constante, variable y ecuación demuestra unos resultados que constituyen la base conceptual de las demostraciones realizadas. Estos son:

Teorema. I. Si dos cantidades X, B, una variable y la otra constante, la variable X, al paso que crece, se acerca más a la constante B, la cantidad B será mayor que la variable X.

Teorema II. Si de dos cantidades X, B, una variable y la otra constante, la variable X al paso que mengua, se acerca al valor de B, esta cantidad B será menor que la cantidad X.

Teorema III. Dadas dos cantidades desiguales, digo, que si de la mayor se quita la mitad, y de lo que queda la mitad, y de lo que queda la mitad, y así sucesivamente, llegaré a tener un resultado que será menor que la otra cantidad por pequeña que sea.

Teorema IV. A toda cantidad variable X se la puede hacer menor que cualquier cantidad dada por pequeña que sea.

Teorema V. Si dos cantidades invariables A y B son tales que su diferencia A - B sea menor que una tercera cantidad K, por pequeña que pueda ser esta cantidad, estas dos cantidades son iguales entre si.

Teorema VI. Si tres cantidades X, A, B son tales que la primera X, que se supone variable, pero siempre mayor o menor que las otras dos A, B que son constantes, se puede aproximar a ambas en el mismo tiempo, tanto como se quiera, dichas cantidades A y B serán iguales.

Teorema VII. Si dos cantidades variables X, Z se pueden acercar tanto como se quiera á las dos cantidades constantes A y B, y además la relación X/Z de las dos primeras es constante, digo que la relación es la misma que la A/B que tienen las dos constantes[27].

Con la utilización en las demostraciones geométricas de estos resultados, Vallejo elimina de la geometría elemental el uso de las nociones de infinito e infinitésimo (al menos en los pasajes en que estos conceptos aparecen en los *Principios* de Bails, que son en la determinación de la longitud de la circunferencia, área del círculo y en el cálculo de áreas y volúmenes del cono y el cilindro).

Reconoce Vallejo que este modo de demostrar en geometría es el que se llama método de exhaución empleado por los griegos[28], con lo cual era plenamente consciente de que la recuperación del rigor en geometría suponía una vuelta a la geometría de Euclides, si bien enriqueciendo la obra de este matemático griego con las aportaciones y métodos demostrativos de autores como Arquímedes. Así lo pone de manifiesto en las *Adiciones* al afirmar que cuando se dispuso a preparar las lecciones impartidas en el Seminario de Nobles que sirvieron de base para la elaboración de esta obra comenzó a redactarlas extrayendo su contenido directamente de las obras de Arquímedes; pero que reflexionando después sobre el método que había seguido Lacroix, le pareció el de este autor más apropiado para el estado en que se hallaban las ciencias en ese momento y se resolvió a seguirlo estableciendo aquellas proposiciones que eran indispensables para darle todo el rigor que es propio de la geometría[29].

Valiéndose de estas proposiciones modificó once pasajes de los *Principios* de Bails. A continuación se describe sucintamente el contenido de los seis primeros, ya que con ellos queda patente el método utilizado por el autor.

Primero. Esta modificación viene después de la definición que se da en los *Principios* de igualdad de ángulos y sustituye a la parte que se dedica en esta obra a la medida de ángulos. Vallejo orienta la medida de ángulos mediante la determinación de la medida común y, si no la tienen, la relación aproximada de dos segmentos y de dos arcos[30]. Acaba este párrafo con la determinación de la unidad de medida de ángulos[31].

Segundo. Vallejo añade este epígrafe después del párrafo de los *Principios* que afirma: Para un triángulo dado el mayor lado está opuesto al mayor ángulo. Bails demuestra esta proposición por consideraciones entre los arcos y las cuerdas, mientras que Vallejo expone unas proposiciones previas, tales como:

a) La suma de dos lados de un triángulo es mayor que el tercero.

b) La recta es la distancia más corta entre dos puntos.

c) Si entre dos puntos se trazan una recta y diferentes curvas cóncavas o convexas hacia el mismo lado, la curva que más se acerca a la recta es la más corta[32].

Tercero. Esta modificación se añade después de la proposición de Bails que dice que dos triángulos que tienen sus lados perpendiculares son semejantes y consiste en aplicar esta propiedad a la demostración de los teoremas del cateto y de la altura[33].

Cuarto. Esta modificación amplía la noción de proporcionalidad geométrica. Bails enuncia el teorema de la paralela media y Vallejo añade los teoremas directo y recíproco de Thales[34].

Quinto. Después de la proposición de los *Principios* que afirma que la razón entre líneas homólogas de figuras semejantes es un valor fijo igual a la razón de semejanza, Vallejo introduce proposiciones como las que siguen:

a) Dado un polígono regular inscrito en un círculo, inscribir otro de doble número de lados y hallar el lado de este último.

b) Si en un círculo se inscribe un polígono cualquiera después otro de doble número de lados, y así sucesivamente, la ságita de estos polígonos irá siendo más de dos veces menor y llegará a ser menor que cualquier cantidad dada por pequeña que sea.

Demuestra proposiciones análogas para polígonos circunscritos[35].

Sexto. Vallejo añade este conjunto de proposiciones para completar y dar rigor mediante el método de exhaución a la exposición poco rigurosa desde el punto de vista matemático que hace Bails en sus *Principios* al considerar el círculo como polígono de un número infinito de lados al que se le puede aplicar sin más la fórmula del cálculo del área para polígonos regulares. La proposición más importante que establece es la siguiente:

La diferencia entre la superficie del polígono circunscrito a un círculo y la del polígono inscrito del mismo número de lados, se puede hacer menor que cualquier cantidad dada por pequeña que sea[36].

En los cinco puntos restantes aplica el método de exhaución a la determinación de la superficie lateral y el volumen del cilindro, el cono y la esfera.

Vallejo refleja en sus obras posteriores una gran preocupación por la claridad en los fundamentos de la geometría y la concatenación lógica de los razonamientos a partir de los mismos. Esta inquietud hace patente en el *Compendio de Matemáticas Puras y Mixtas*, donde, a través de notas a pie de página, unas veces se envanece de sus aportaciones en algunas definiciones de la geometría[37], otras da noticia de cuestiones que están en la base de los fundamentos de la geometría como la problemática del Postulado V de Euclides y las aportaciones de Adrien Marie Legendre (1752-1833)[38] y en varias ocasiones ataca la producción geométrica de algunos autores, como Thomas Simpson[39], a los que critica por tomar como axiomas proposiciones demostrables a partir del sistema de axiomas de la geometría. Es una pena que un hombre con la formación matemática, el prestigio y la influencia política[40] de Vallejo se dedicara (aunque sea tarea importante), casi exclusivamente, a clarificar los fundamentos y no se ocupara de difundir en España la geometría descriptiva y la matemática que se estaba impartiendo, por ejemplo, en *L'Ecole Polytechnique*, que hubiera reportado grandes beneficios a la matemática española.

NOTAS

1 BAILS, B. (1793) *Elementos de Matemáticas, Tomo I*, Madrid, Vda. de Joaquín Ibarra, p. XX.
2 BAILS, B. (1793) *Op. Cit.*, pp. XXIV-XXV.
3 BAILS, B. (1793) *Op. Cit.*, p. XXV.
4 BAILS, B. (1793) *Op. Cit.*, pp. XXVI-XXVII.
5 BAILS, B. (1793) *Op. Cit.*, pp. XXVII-XXXII.
6 BAILS, B. (1793) *Op. Cit.*, pp. XXXII-XXXIII.
7 BAILS, B. (1793) *Op. Cit.*, pp. XXXIV-XXXV.
8 A finales del siglo XVIII muchos de los grandes matemáticos estaban convencidos de que la matemática se convertiría en pocos años en un tema acabado, porque creían que se estaban realizando todos los descubrimientos que esta materia podía dar de sí. Lagrange decía en una carta que escribió a D'Alembert, fechada el 21 de Septiembre de 1781 que la mina de la matemática era ya demasiado profunda y que de no encontrar nuevas vetas se debería abandonar en un periodo de tiempo más o menos largo.

9 Thomas Simpson añadió un apéndice que figura en la tercera edición de su *Geometría* de 1768 (y con toda seguridad en alguna edición anterior, dado que murió el autor en 1761) titulado *Notes Geometrical and critical on the elementariy part of this work* con el intento de satisfacer los reparos que había puesto en su obra Robert Simpson en él destacaba los grandes defectos que tenía, a su juicio, la obra de Euclides. En el caso de Thomas Simpson, las críticas que recibió desde la concepción euclídea de la geometría le hicieron modificar su obra, pero pesaba más en su ánimo el hecho de hacer más fácil la enseñanza de la geometría. *Cfr.* BAILS,B. (1793) *Op. Cit.*, p. XXXV.

10 Vallejo obtuvo por oposición la Cátedra de matemáticas, ataque, fortificación y defensa de plazas del Real Seminario de Nobles de Madrid.

11 El mismo día se celebró el *Certamen público de segundo año de Matemáticas* en el Seminario de Nobles de Madrid bajo la dirección de su catedrático Martín Tadeo Rosell.

12 En el prólogo se elogia la obra más por acometer una tarea de profundización en los fundamentos de la geometría que por venir a completar el libro de Bails. *Cfr.* VALLEJO, J.M. (1806) *Adiciones a la Geometría de Don Benito Bails*, Madrid, Imprenta de la hija de Ibarra, p. I.

13 VALLEJO, J.M. (1806) *Op. Cit.*, p. II.

14 VALLEJO, J.M. (1806) *Op. Cit.*, pp. II-III.

15 VALLEJO, J.M. (1806) *Op. Cit.*, pp. IV-VI.

16 VALLEJO, J.M. (1806) *Op. Cit.*, p. VI.

17 VALLEJO, J.M. (1806) *Op. Cit.*, p. VIII.

18 VALLEJO, J.M. (1806) *Op. Cit.*, p. IV.

19 Puede comprobarse esta coincidencia de ideas entre el prólogo que la Academia hace a las *Adiciones* y la *Advertencia* que hace de prólogo *in* VALLEJO, J.M. (1804) *Certamen público de primer año de Matemáticas*, Madrid, pp. 49-50.

20 La Convención creó la Escuela Normal para que se encargara de la formación de los futuros profesores en 1793. Enseñaron en ella profesores de la talla de J.L. Lagrange (1736-1813), P.S. Laplace (1749-1827), G. Monge (1746-1818), A. Vandermonde (1735-1796). Monge tuvo por adjuntos a S. Lacroix (1765-1844) y J. Hachette (1769-1834), los cuales siguieron a su maestro cuando al año siguiente fue destinado a organizar la recién creada Escuela Politécnica. Lacroix escribió *Traité du calcul differential et du calcul integral* (1797), que fue, como señala Félix Klein, manantial de muchas obras de cálculo infinitesimal del siglo XIX.

21 La *Geometrie* de Legendre se publicó en 1794 y alcanzó la decimoquinta edición en 1881. Legendre restauró, junto con Lacroix y Bertrand el rigor en los razonamientos matemáticos, en clara oposición al espíritu intuitivo y poco riguroso inaugurando por A. Arnaud (1612-1694) y A. Clairaut (1713-1765). El primero comenzó atacando el rigor euclídeo y el segundo desarrolló una manera intuitiva de pensar en geometría. *Cfr.* SERGESCU, P. (1940) *Mathematiciens Francais du temp de la Revolution Francaise, Analele Academiei romane*, Seria III. *Tomul* XVI, Men. II. pp. 513-537.

22 Bertrand fue profesor en Ginebra y miembro de la Academia Real de Ciencias y Bellas Letras de Berlín hacia 1800. Con frecuencia se confunde con J.L. Bertrand (1822-1900), famoso matemático francés del siglo XIX.

23 El propio Vallejo afirma que los adquirió en esa fecha en la librería de Ramos. *Cfr.* VALLEJO, J.M. (1806) *Op. Cit.*, p. 21.

24 SERGESCU, P. (1940) *Op. Cit.*, p. 532.

25 La obra de Bails recoge la orientación de la geometría como l'*Encyclopèdie* imprimió a las matemáticas, ya que su fuente de inspiración está en obras como la de Bezout, que fueron escritas por encargo de ilustrados y amigos de los enciclopedistas.

26 Son los párrafos 329, 444, 521, 501, 527, 555, 618, 623, 635, 645 y 652 de BAILS, B. (1788) *Principios de Matemáticas, Tomo I*, Madrid, Imprenta de la Viuda de Ibarra.

27 VALLEJO, J.M. (1806) *Op. Cit.*, pp. 1-8.

28 VALLEJO, J.M. (1806) *Op. Cit.*, p. 1.

29 VALLEJO, J.M. (1806) Op. Cit., p. 20.

30 Se llama medida común de dos magnitudes A y B a otra magnitud C que cabe en A y en B un número entero dos veces.

31 VALLEJO, J.M. (1806) *Op. Cit.*, pp. 8-15.

32 VALLEJO, J.M. (1806) *Op. Cit.*, pp. 15-22.

33 VALLEJO, J.M. (1806) *Op. Cit.*, pp. 22-28.

34 VALLEJO, J.M. (1806) *Op. Cit.*, pp. 28-30

35 VALLEJO, J.M. (1806) *Op. Cit.*, pp. 30-48.

36 VALLEJO, J.M. (1806) *Op. Cit.*, pp. 49-55.

37 Vallejo dice que él había dado en su *Tratado elemental de Matemáticas* (1813) la definición de línea recta como aquella que tiene todos sus puntos en la misma dirección. Algunos en aquel momento preferían otra definición más operativa, tal como la de distancia más corta entre dos puntos. La alegría de Vallejo es patente cuando encuentra la definición de recta, que considera suya, en el *Diccionario de Matemáticas* (1836) de A.S. Montferrier. *Cfr.* VALLEJO, J.M. (1855) *Compendio de Matemáticas*, p. 348.

38 VALLEJO, J.M. (1855) *Compendio de Matemáticas*, pp. 373-380.

39 VALLEJO, J.M. (1855) *Op. Cit.*, p. 383.

40 Vallejo viajó de 1823 a 1832 por Francia, Bélgica, Inglaterra y Holanda y visitó los grandes centros de enseñanza europeos. En París asistió a las clases de A.L. Cauchy (1789-1857) e hizo amistad con P.S. Laplace (1749-1827). A su vuelta se dedicó a propagar los métodos de enseñanza que había aprendido en el extranjero y fue nombrado Inspector de Instrucción Pública y Director General de Estudios.