Llull, vol. 8, 1985, 5-19

UN INEDITO DE ROBERVAL SOBRE EL LIBRO V DE LOS ELEMENTOS DE EUCLIDES Y SU TRANSMISION HACIA ITALIA (1645) *

JEAN CASSINET
Toulouse (Francia)

RESUMEN

El registro de manuscritos nº 1531 de la Biblioteca Municipal de Toulouse (Francia) contiene 11 copias de textos de Fermat efectuadas en 1644-45 por cuenta del matemático romano Michelangelo Ricci durante los viajes a Italia de Duvendus y del padre Mersenne.

Este registro contiene un texto inédito de G. Personne de Roberval de 39 páginas desarrollando en 22 teoremas la teoría del orden entre razones de cantidades a partir de la definición nº 7 del Libro V de los Elementos *de Euclides. Roberval demuestra que la relación así definida es total (apéndice a la definición completada por él), asimétrica (Teorema 2) y transitiva (Teorema 5). Prue-*

ABSTRACT

The register of manuscripts numer 1531 of the Bibliotheque Municipale de Toulouse (France) contains 11 copies of Fermat's text made in 1644-45 for the roman mathematicien Michelangelo Ricci, on the travels of Duverdus and father Mersenne to Italy.

This register contains an unpublished text of G. Personne de Roberval of 39 pages which develops in 22 theorems the order theory between ratios stanting from the seventh definition of the fifth book of Euclid's Elements. *Roberval proves that this relation is total (appendix to the definition completed by him), asymmetrical (Theorem 2) and transitive (theorem 5). He proves the compability of this relation with the product*

* Traducción de Mariano Hormigón Blánquez

ba la compatibilidad de la relación con la multiplicación por racionales (Teorema 6), la multiplicación de dos razones del mismo denominador (Teoremas 19,20). Muestra la relación del orden con las operaciones habituales con razones (inversión, alternativa, composición, división), lo que constituye la parte no original del texto (Teoremas 10, 11, 12, 13, 14, 18). Una parte muy original trata de la densidad *del semi-grupo ordenado de razones de cantidades (Teoremas 7, 8, 9, 21), tratando el teorema 21 de las cantidades "no numéricas" y demostrado por el método de* exhaución ((∀H) (∀K) ((A+H)/B>C/D & (A-K)/B<C/D ⇒ A/B = C/D)

Finalmente el Teorema 15 es la Proposición 18 del Libro V; él da la utilización del postulado de existencia de la cuarta proporcional a tres cantidades dadas.

by rationals (theorem 6), the product of two simpliafle *ratios (theorems 16, 17) and the addition of two ratios with the same denominator (theorems 19, 20). He proves also the relation between order and usual operations with ratios (inversion, alternative, composition and division), which constitutes the non-original part of the text (theorems 10, 11, 12, 13, 14, 18). A very original part is that concerning the* density *o the ordered semigroup of ratios (theorems 7, 8, 9, 21), this last one dealing with "non numerical" quantities and proved by the exhaustion method.* ((∀H) (∀K) ((A+H/B>C/D & (A-K)/B<C/D ⇒ A/B = C/D)

Finally the fifteenth theorem is the eighteenth proposition of the fifth book; he gives two proofs (the first one direct, the second one indirect) without using the postulate of the fourth proportional to three given quantities.

Palabras clave: Roberval, Euclides, siglo XVII, Matemáticas.

El registro de manuscrito número 1531 de la Biblioteca Municipal de Toulouse es una colección de diversos textos matemáticos del siglo XVII que ocupa 128 folios numerados, en cuarto y encuadernados bajo el título italiano de *Miscellanea di cose matematiche non stampate di diversi.* Esta miscelánea está desde 1967 en Toulouse y proviene de la librería parisina Alain Brieux (catálogo 1967 pp. 73-79); el origen de este manuscrito es italiano, concretamente del sabio romano Michelangelo Ricci (1619-1682) (sobre este tema, véase el artículo de P. Costabel en *Revue d'Histoire des Sciences, 1962, 2, 77-87).*

La historia de esta miscelánea está directamente relacionada con dos viajes de sabios franceses a Italia a finales de 1644 y principios de 1645: el de Duverdus, alumno de Roberval, y el del Padre Mersenne; el primero llega a Italia en Octubre de 1644, provisto de una cartera de documentos que contiene textos de Roberval y Fermat, entre los que destaca uno, al parecer autógrafo de Fermat, hoy perdido; Mersenne llega a Roma, vía Florencia, en la Navidad de 1644; de los documentos que lleva, que llegan por mar, entrega algunos a Michelangelo Ricci en Enero de 1645; éste copia o hace copiar buena parte de ellos, como había copiado y hecho copiar manuscritos entregados por Duverdus. De estas copias se compone esencialmente el registro 1531 de la Biblioteca de Toulouse. El interés primordial de este registro se debe a la presencia de 11 textos de Fermat y un texto inédito importante de Roberval.

Relación de los textos de Fermat incluidos en el Ms 1531. Toulouse

.1.	1 f.	Metodo de Maximis et Minimis explicato (en Italiano)		P.T.	Arb.
.2.	2 ff.	Il metodo generale per trovar le tangente delle line curve (en Italiano)		P.T.	Arb.
.3.	3 ff.	Isagoge ad locos ad superficiem		P.T.	Arb.
.4.	6 ff.	Geometrae ad locos planos et solidos Isagoge	V.O.		
.5.	2 ff.	Appendix ad Isagogem topicam continens solutionem problematum solidorum per locos.	V.O.		
.6.	2 ff.	Methodus ad disquirendum Maximam et Minimam.	V.O.		
.7.	1 ff.	Apollonus Pergeaei.	V.O.		
.8.	7 ff.	Datis quatuor punctis spheram..	V.O.		
.9.	4 ff.	Dum syncreseos et anastrophes, Viethae methodum,...		P.T.	Arb.
.10.	2 ff.	Ad methodum de Maxima et Minima. Appendix.		P.T.	Arb.
.11.	1 f.	Doctrinam tangentium antecedit.	V.O.		

V.O.: texto impreso en las *Varia Opera* (1679)
P.T.: texto impreso por primera vez en la edición de Paul Tannery de las *Obras* de Fermat (1891-1894).
Arb.: texto impreso según las copias o los borradores de Arbogast de finales del siglo XVIII.

Sin embargo no vamos a ocuparnos aquí de estos textos sino de un texto importante de Guilles Personne de Roberval que ocupa 20 folios de este registro (del recto del folio 93 al recto del folio 112) y cuyo título latino es:

Quaedam ad librum quintum elementorum Euclidis Ex. D. Aegidio de Roberval

El interés matemático de este texto reside en el hecho de que el autor estudia en él la relación de orden entre razones de cantidades, fundada en las definiciones de base del Libro V de los *Elementos* de Euclides: la definición 5 (numeración Heiberg) que define la igualdad entre razones, la definición 7 que define $A/B > C/D$, completada por Roberval con la de $A/B < C/D$; las relaciones lógicas entre estas diversas definiciones están muy ligadas al carácter total y arquimediano del orden definido sobre el semigrupo de las magnitudes (a este respecto ver J. Gardies y J. Cassinet *Ordre total et archimédien entre grandeurs dans les Eléments d'Euclide* en *Cahiers du séminaire d'Hist. des Math. de Toulouse, 1985,7,1-11*). El texto de Roberval constituye un estudio relativamente exhaustivo de la relación de orden entre razones. Recordemos la definición euclídea por *equimúltiplos*:

$$(A/B > C/D) \overset{\text{df}}{\Leftrightarrow} (\exists m)(\exists n)((m,n \in N^*) \text{ y } (mA > nB) \text{ y } (mC \leqslant nD))$$

a la que Roberval añade (folio 93 recto)

$$(A/B > C/D) \overset{\text{df}}{\Leftrightarrow} (\exists m)(\exists n)((m,n \in N^*) \text{ y } (mA < nB) \text{ y } (mC \geqslant nD))$$

El texto de Roberval contiene 22 teoremas, en su mayor parte originales y no recogidos por los posteriores comentadores de Euclides; a este respecto puede darse una tabla comparativa de los teoremas enunciados y demostrados por Roberval y las proposiciones correspondientes de diversas ediciones de los *Elementos* de Euclides.

Nº de teoremas Roberval	1.2.3.4.5.6.7.8.9.	10.11.12.13.14.15.	16.17.18.19.	20.21.22
Nº de proposiciones en los *Elementos* de Euclides (I)		18.		
en los *Elementos* Euclides (II)		26.27.29.28.30.18.	33.	
en los *Elementos* Euclides (III)		26.27.29.28.30.18.	33.	35

(I) ediciones en las que el Libro V contiene 25 proposiciones (Foix-Candalle (1569), Nasirad-Din (1594), Simpson (1756) y Peyrard (1809)
(II) ediciones en las que el Libro V contiene 34 proposiciones: Campanus (1482), Tartaglia (1569), Clavius (1574), Lemandelé (1622), Barrow (1678) ...
(III) edición A. Tacquet (1672)

Podemos clasificar los teoremas del texto de Roberval en clases correspondientes al tipo de propiedades demostradas.

1. *Teoremas que dotan a la relación definida en el Libro V del carácter de relación de orden total sobre el conjunto de las razones de cantidades*

Dado un conjunto G de cantidades homogéneas, es decir, dotado de la estructura interna de semigrupo ordenado arquimediano anteriormente citada, consideramos las razones de cantidades como pares (A,B) que son, por tanto, elementos del conjunto GxG. Cuando una razón tal, a la que para simplificar denotaremos por A/B, es conmensurable, está asociada a un racional positivo; si B se descompone en q partes alícuotas (iguales), de las cuales A contiene p, entonces la razón A/B es la misma que la razón entre los números p/q; si por el contrario la razón A/B es inconmensurable, es decir, que cualquiera que sea la parte alicuota de B considerada no puede estar contenida un número entero de veces en A, entonces la audacia de la definición 5 del Libro V consiste en dar sentido a la igualdad de dos razones, conmensurables o no. Otro tanto ocurre con la definición 7 (numeración Heiberg) relativa a la ordenación de razones. En tiempos de Roberval la definición 7 llevaba el número 8, que es el que le atribuye Roberval cuando a ella se refiere. Esta definición 7 ha sido ya enunciada anteriormente. Recordemos pues la definición de igualdad entre razones (5 según Heiberg) (edición Peyrard, 1809; p. 1, def .6)[1]:

> "On dit que des grandeurs sont en même raison, la première à la seconde, et la troisième à la quatrième, lorsque des équimultiples quelconques de la première et de la troisième étant comparés à d'autres équimultiples quelconques de la seconde et de la quatrième, chacun à chacun, les équimultiples de la première et troisième sont en même temps plus grands que les équimultiples de la seconde et de la quatrième, ou leurs sont égaux ou plus petits".

Esta definición puede expresarse así:

$$(1)\ A/B = C/D \overset{df.}{\Leftrightarrow} (\forall m)(\forall n)(m,n \in N^* \Rightarrow [(mA > nB \text{ y } mC > nD) \text{ ó } (mA < nB \text{ y } mC < nD) \text{ ó } (mA = nB \text{ y } mC = nD)]).$$

Sin embargo las demostraciones de algunas proposiciones (por ejemplo v.4, v.22, v.23,...) introducen una segunda forma de esta definición que ilustra el siguiente extracto (*Elementos* de Euclides, edición Peyrard, 1809, p.52, v.Pr. XXII):

> "Donc, puisque l'on a trois grandeurs G, K, M et d'autres grandeurs H, L, N égales en nombre aux premières, et que ces grandeurs prises deux à deux, ont la même raison, si par égalité G surpasse M, la grandeur H surpassera N; si G est égal à M, la grandeur sera égale à N, et si G est plus petit que M, la grandeur H sera plus petite que N. Mais G et H sont des équimultiples quelconques de A et D et M et N d'autres équimultiples quelconques de C et F: donc A est à C, comme D est à F".

Esta expresión de la definición de igualdad entre razones es formalmente distinta y puede escribirse:

$$(2)\ A/B = C/D \Leftrightarrow (\forall m)(\forall n)\ (m,n \in N^* \Rightarrow [(mA > nB \Rightarrow mC > nD) \text{ y } (mA < nB \Rightarrow mC < nD) \text{ y } (mA = nB \Rightarrow mC = nD)])$$

Evidentemente las dos formas lógicas no son formalmente equivalentes. En un estudio hecho con J.L Gardies[2] hemos demostrado que el hecho de aceptar que el orden entre magnitudes sea total limita el número de valores de verdad que pueden atribuirse a las seis aserciones atómicas que entran en las fórmulas (1) y (2) a nueve sextuplas de valores para las cuales las dos fórmulas en cuestión tienen el mismo valor lógico; así en el contexto euclídeo las dos formulaciones son equivalentes; incluso se puede ir más lejos y demostrar que la condición de orden total es necesaria y suficiente para asegurar la equivalencia de estas dos definiciones de igualdad entre razones.

Dicho esto volvamos al texto de Roberval; éste comienza con un complemento a la definición 7 (8 para Roberval) consistente en una definición 7' que define A/B < C/D de manera análoga a A/B > C/D (folio 92 r). Inmediatamente después, (folio 92 r) Roberval añade un *Apéndice a la definición 8ª del Libro V* en el cual el autor nos explica que él es el primero en demostrar el carácter total del orden:

"Parceque cela n'a été montré nulle part, nous découvrons que deux rapports quelconques, A à B et C à D, sont soit égaux entr'eux, soit A à B est plus grand que C à D soit plus petit; nous montrons cela ici à partir des équimultiples de cette manière: soit conųe comme (étant) écrite l'infinité des équimultiples des antecédénts A,C et celle des conséquents B,D, ..."

La continuación del razonamiento consiste en decir, bastante brevemente, que las únicas posibilidades halladas en estos dos conjuntos infinitos conducen o bien a la propiedad que define A/B = C/D o bien a una de las dos condiciones que definen A/B < C/D ó A/B > C/D. La enorme brevedad del razonamiento no permite afirmar si las dificultades que podrían surgir en el detalle de la demostración han sido vistas, pero esto no es imposible[2]. Lo que sí hay que señalar es que esta cuestión de la *tricotomía* para el orden entre razones sólo será examinada en la obra de Girolamo Saccheri (*Euclides ab omni naevo vindicatus* impreso en Milán, 1733, p.115), donde se desarrolla bastante curiosamente la demostración indicada por Roberval; esta demostración de Saccheri será retomada por Robert Simpson en sus notas a sus ediciones de los *Elementos* de Euclides, pero para criticar su insuficiencia. En esta cuestión del carácter total del orden, Roberval está , por tanto, bien por delante de Saccheri y a fortiori de Simpson (ediciones de 1756 a 1791).

Dos teoremas ponen en evidencia características esenciales de un orden que son verificadas por la relación en cuestión. Son los teoremas 2 y 5. No insistiremos sobre éste último, que enuncia y demuestra la transitividad del orden ($A/B < C/D$ y $C/D < E/F$ implica $A/B < E/F$). El teorema 2, por el contrario, merece ser tratado más extensamente ya que en él se demuestra de una forma no evidente que la relación definida por Euclides es asimétrica

$$((A/B < C/D \text{ y } A/B > C/D) \text{ es imposible});$$

la necesidad experimentada por Roberval de demostrar esta propiedad subraya bien que éste *penetra* profundamente la naturaleza de la relación de orden.

Pero por supuesto, esta asimetría está enunciada con ayuda de los equimúltiplos bajo la forma: $A/B > C/D$ implica que para todo par de enteros r,s, si se cumple $rC > sD$ entonces $rA > sB$; está claro pues que la negación de la conclusión equivale a afirmar la existencia de dos enteros r,s, tales que $rC > sD$ y $rA \leqslant sB$, es decir a afirmar, según la definición 7, que $C/D > A/B$; luego $A/B > C/D$ implica la negación de $C/D > A/B$[3].

Así el *Apéndice* (92 recto), el teorema 2 (94 verso) y el teorema 5 (96 recto y verso) muestran que la relación definida por Euclides es asimétrica, transitiva y total en el conjunto de las razones de cantidades considerado. Las propiedades fundamentales de un orden total estricto fueron pues muy finamente captadas por Roberval; este texto lo manifiesta de una forma muy clara.

2. *Teoremas sobre la compatibilidad de la relación de orden con las leyes de suma y composición de razones*

En este apartado podemos incluir seis teoremas del texto de Roberval. Los teoremas 6, 16, 17, 19, 20.

El teorema 6 enuncia la compatibilidad de la relación de orden para los equimúltiplos, lo que equivale a enunciar la compatibilidad respecto del producto de razones de magnitudes por una fracción numérica (número racional positivo); en efecto, se nos dice que si $A/B > C/D$ entonces, cualesquiera que sean los enteros m,n se tiene $mA/nB > mC/nD$.

El teorema 16 enuncia que si A/B > D/E y A/C > E/F entonces A/C > D/F. El teorema 17 enuncia un resultado análogo, a saber: si A/B > E/F y B/C > D/E entonces A/B > D/F. El teorema 16 está flanqueado por un corolario que lo generaliza a dos series de más de tres magnitudes. Estos teoremas 16 (y corolario) y 17 "generalizan" al orden los teoremas 22 y 23 del Libro V para la igualdad de razones. Esta propiedad no había sido nunca claramente enunciada aunque sí ocasionalmente utilizada; en particular, Aristarco de Samos en su tratado sobre las *dimensiones y distancias del Sol y de la Luna* utiliza la proposición 16 varias veces, con una primera serie de cantidades que son longitudes y otra segunda serie de magnitudes numéricas para establecer desigualdades entre razones de distancias comparadas con razones numéricas. No podemos sin embargo considerar que en estas proposiciones 16 y 17 se trate de una compatibilidad del orden con una multiplicación de razones de carácter restringido (paso de A/B y B/C a A/C) ya que esto se encuentra en el espíritu euclídeo de la definición 17 y de las proposiciones 22 y 23 del Libro V, donde se define el "δι ισου λόγοσ", es decir, precisamente dos sucesiones de magnitudes cada una de las cuales está constituida por cantidades homogéneas y dos a dos en la misma proporción, y para las cuales se puede considerar, a fin de cuentas, la razón entre la primera y la segunda eliminando la consideración de los términos intermedios. Podemos detallarlo así:

Sean $a_1, a_2, ..., a_n$ y $b_1, b_2, ..., b_n$ dos sucesiones de magnitudes tales

que $\frac{b_i}{b_{i+1}} = \frac{b_{i+1}}{b_{i+2}}$ y $\frac{a_i}{a_{i+1}} = \frac{a_{i+1}}{a_{i+2}}$ para i = 1, 2, ..., n-2.

Una relación es compatible con el "δι ισου λόγοσ" si

$$R\left(\frac{a_i}{a_{i+1}}, \frac{b_i}{b_{i+1}}\right) \quad \text{implica} \quad R\left(\frac{a_1}{a_n}, \frac{b_1}{b_n}\right)$$

para todo i=1, 2, ..., n siendo R una relación binaria entre razones de las dos sucesiones. Esto se cumple para la relación de igualdad (R: *es igual a*), como se demuestra en el teorema 22 del Libro V de Euclides, pero también con la relación de orden (R: *es mayor que* ó R: *es menor que*), y es lo que demuestra Roberval en su proposición 16.

Conviene señalar que este corolario del teorema 16 se halla bajo otra forma en la parte directa del enunciado 22, que dice que si A/B es mayor que C/D entonces ocurre lo mismo con la razón duplicada, triplicada, ...n-tuplada; ahora bien, si consideramos una sucesión de magnitudes (a_i) $i = 1, ..., n$ tal que todos sus pares de términos consecutivos estén siempre en la misma proporción, entonces la razón del primero al último es igual a:

$$\frac{a_1}{a_n} = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{n-1}$$

ya que de hecho esta sucesión no es sino una progresión geométrica.

Los teoremas 19 y 20 aseguran la compatibilidad de la relación *mayor que* con la suma de razones del mismo denominador puesto que en ellos se enuncia:

- A/B > C/D y E/B = F/D implica A+E/B > C+F/D (enunciado 19)
- A/B > C/D y E/B > F/D implica A+E/B > C+F/D (enunciado 20)

La demostración de estos últimos teoremas necesita los teoremas 3 y 4 del texto de Roberval, de los que volveremos a hablar.

3. *Teoremas relativos al orden y las operaciones simples y habituales con razones*

Recordemos lo que son en el Libro V de Euclides estas operaciones simples sobre razones o pares de razones. Si se consideran las razones A/B y C/D, sus *inversas* son B/A y D/C respectivamente, sus razones *alternas* son A/C y B/D, sus razones «*compuestas*» son (A+B)/B y (C+D)/D y sus razones «*divididas*» (A-B)/B y (C-D)/D si A-B y C-D tienen sentido; la razón *duplicada* de A/B es una razón E/F tal que existe I de manera que E/I = I/F = A/B (dicho de otra manera, $E/F = (A/B)^2$), la razón *triplicada* de A/B es una razón E/F tal que existen dos magnitudes I, J de manera que E/I = I/J = J/F = A/B (dicho de otra manera, $E/F = (A/B)^3$), etc...

Las proposiciones 10,11,12,13,14,18, que se reencuentran de hecho en las proposiciones 26,27,29,28,30,33 en las ediciones de los *Elementos* anteriormente citadas, tratan del comportamiento de las relaciones de orden con respecto a las operaciones siguientes: conservación de la razón por paso a la razón «*alterna*», «*compuesta*» ó «*dividida*», paso a la razón opuesta para las razones inversas ó mezclas diversas de estas operaciones.

La proposición 18 enuncia: si (A+B)/(C+D) > B/D entonces A/C > (A+B)/(C+D); las proposiciones 12 y 13 aseguran la equivalencia entre las relaciones A/B > C/D y (A+B)/B > (C+D)/D.

4. *Teoremas de densidad y de continuidad*

Se trata de los teoremas 3,4,7,8,9,21 y su corolario.

Los teoremas 3 y 4 conducen a enunciar que si A/B es mayor que C/D entonces para todo I, J existen equimúltiplos mA, nB, mC, nD tales que mA-nB es mayor que I y nD-mC mayor que J. Este resultado permitirá una serie de demostraciones del texto.

Los teoremas 7,8,9 son teoremas de densidad de la estructura definida por el orden sobre el conjunto de las razones de magnitudes: entre dos razones desiguales se puede intercalar una razón (teorema 7), se pueden intercalar dos razones (teorema 8), lo que deja al lector la posibilidad de concluir que es posible intercalar una infinidad de razones. El teorema 9 enuncia y demuestra un resultado interesante: dadas dos razones desiguales y una tercera E/F cualquiera, existen múltiplos mE y nF tales que la razón mE/nF está comprendida entre las dos razones desiguales.

El teorema 21 y su corolario dan la medida completa de la concepción de Roberval sobre las magnitudes *no numéricas* y las razones de estas magnitudes. El teorema es el siguiente: si dadas cuatro magnitudes *no numéricas* A,B,C,D, para todo par de magnitudes no numéricas H,K la razón (A-H)/B es menor que C/D y la razón (A+K)/B mayor que C/D, entonces A/B es igual a C/D. La demostración se hace por un doble razonamiento apagógico basado en la proposición 1 del Libro X de los *Elementos* de Euclides; así, la demostración de Roberval es del tipo clásico de las utilizadas en el método conocido por el nombre de *exhaución* para el cálculo de áreas, volúmenes, centros de gravedad; y esto no es de extrañar, vista la brillante contribución aportada por Roberval al nacimiento del Cálculo Integral. Si efectivamente A/B es mayor que C/D, el teorema 3 permite afirmar la existencia de equimúltiplos mA, mC, nB, nD tales que mA-nB supera a una magnitud I dada; entonces la proposición I del Libro X permite la construcción de una sucesión: $I_0 = I$, I_1 menor que la mitad de I_0, I_2 menor que la mitad de I_1,... y se sabe entonces que existe un I_n menor que A; si se toma $H = I_n$, considerando M = A-H, L = mK y N = mM se demuestra fácilmente que mM es mayor que nB mientras que mC no es mayor que nD, lo que según la definición de orden entre razones da (A-H)/B mayor que C/D, en contradicción con la hipótesis. Basta con retomar un razonamiento análogo con (A+K)/B para llegar a la conclusión por la propiedad de Tricotomía enunciada en el *Apéndice* del principio del texto. Este teorema tiene una resonancia muy "topológica" y se puede hablar anacrónicamente de teorema de "continuidad" en la topología inducida por el orden entre razones de magnitudes.

5. *Demostraciones del Teorema 18 del Libro V sin la utilización del axioma de existencia de una cuarta proporcional a tres magnitudes dadas*

La proposición 15 del manuscrito de Roberval es el teorema 18 del Libro V, a saber: A/B = C/D equivale a (A+B)/B = (C+D)/D. Esta proposición no es relativa al orden entre razones y puede pues, a primera vista, parecer fuera de contexto. No lo está en absoluto; Roberval va a demostrar como pueden utilizarse los resultados obtenidos sobre el orden entre razones para *despojar* a la demostración de un teorema como éste de viejas escorias y especialmente de la utilización implícita del axioma de la cuarta proporcional. Citemos a Roberval (folio 103 verso):

"Cette proposition est la dix-huitième du livre V des Eléments que les auteurs démontrent par déduction de l'absurde, non légitime, à mes yeux. Ils supposent en effet, qu'à partir de trois grandeurs, des deux côtés données, la première avant avec la seconde un rapport quelconque, il est possible de trouver une quatrième proportionelle, ce qu'ils n'ont nullement montré préalablement; cela ne peut raisonnablement être posé de façon ferme que par la définition des proportionnelles qui est la sixième de ce même livre V des Eléments. A juste titre, en effet, qui peut douter qu'il soit vrai qu'il est dans la nature des choses que cette quatrième des trois données soit telle qu'aux quatre convienne à l'infini la condition des équimultiples requise pour les grandeurs proportionnelles. Mais cette permission, grâce à un axiome, est une infraction aux lois de la démonstration, puisqu'en particulier à partir des prémisses cette dix-huitième proposition aurait pu être démontrée antèrieurement, et de deux facons, une de façon directe et une autre par déduction de l'absurde".

La crítica de Roberval es una crítica de lógica que, a pesar de las apariencias, no concierne únicamente al razonamiento por reducción al absurdo. De hecho es a la utilización implícita, en este razonamiento por reducción al absurdo, del postulado de existencia de la cuarta proporcional a tres magnitudes dadas cualesquiera a quien concierne. Pero Roberval quiere *matar dos pájaros de un tiro* dando una demostración directa, que parece resultarle lógicamente superior a una demostración por reducción al absurdo, así como una demostración indirecta desprovista del postulado implícito de la cuarta proporcional apoyándose en el teorema 12[4].

El análisis de esta demostración de Roberval ha sido realizado por K. Hara de Osaka[5]. Nos contentaremos con decir que si en la demostración directa dada por Roberval faltan detalles que hubieran podido hacerla totalmente explícita y válida, la demostración indirecta es, por el contrario, notable por su elegancia y su sobriedad en la eliminación de la utilización de la cuarta proporcional a tres magnitudes dadas[5].

A este respecto, el texto de Roberval nos parece expresar la convicción de que la existencia de la cuarta proporcional a tres cantidades dadas cualesquiera podría desprenderse de la definición misma de igualdad entre dos razones por equimúltiplos; es una pena que este punto no haya sido más desarrollado por su autor, esto hubiera permitido saber cómo veía Roberval la manera por la cual los procedimientos antiferéticos abren la vía, a partir de la definición por equimúltiplos, a la demostración de existencia de la cuarta proporcional «que está en la naturaleza de las cosas». Este tipo de preocupación volverá a encontrarse un poco más tarde en autores como A. Tacquet (ediciones de Euclides de 1672 por ejemplo, Milliet-Dechalles (1674) ó en los *Nouveaux Eléments de Géometrie* (1667) de Arnaud.

6. *Conclusión*

Este texto de Roberval constituye en 1644-45 y durante largo tiempo la exposición más completa y coherente sobre la estructura de semigrupo ordenado de las razones de magnitudes, con una percepción muy fina de las primeras consecuencias "topológicas" de esta definición del orden euclidiano. Igualmente, Roberval se plantea aquí las cuestiones espinosas relativas al axioma de la cuarta proporcional y a la relación entre las definiciones de igualdad y de orden por equimúltiplos con las definiciones que hacen intervenir la antiféresis, y parece penetrar así más profundamente la naturaleza de las magnitudes *no numéricas*. La calidad lógica del texto es muy notable. La directriz del Libro V de los *Elementos* de Euclides es total y nos hace lamentar todavía más que Roberval no pudiera acometer su proyecto de edición de una Geometría que a buen seguro habiera hecho época.

NOTAS

1 En la edición Peyrard de 1809 de los *Elementos* de Euclides el Libro V tiene una paginación "especial", puesto que se encuentra al final del Libro IV, es decir, de la página 207, empieza en el dorso no numerado de esta página 207; luego, una numeración de 1 a 57 lleva hasta el final del Libro V, continuando la paginación con la 208 al principio del Libro VI. La edición de 1804 contenía únicamente los Libros I, II, III, IV, VI, VII, VIII, IX, XI, XII y el autor añadió en la segunda edición el Libro V con la paginación especial y la Prop. 1 del X con la paginación 283 bis y ter entre la 283 y la 284.

2 GARDIES, J.L., CASSINET, J. (1985): "Ordre total et archimédien entre grandeurs et rapports de deux grandeurs dans le Livre V des Eléments d'Euclide". *Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques de Toulouse, 7,1-11.*

3 $$(A/B >. C/D) \Rightarrow \frac{(\forall r)(\forall s)(((r,s \in N^*) \text{ y } (rC > sD)) \Rightarrow (rA > sB))}{\bar{P}}$$

$$\bar{P} \Leftrightarrow (\exists r)(\exists s)((r,s \in N^*) \text{ y } (rC > sD) \text{ y } (rA \leqslant sB))$$
$$\bar{P} \Leftrightarrow (C/D > A/B)$$

de donde el teorema 2 de Roberval es $(A/B > C/D) \Rightarrow (C/D > A/B)$

4 $$\left(\frac{A+B}{B} \neq \frac{C+D}{D}\right) \Leftrightarrow \left(\left(\frac{A+B}{A} > \frac{C+D}{D}\right) \text{ ó } \left(\frac{A+B}{B} < \frac{C+D}{D}\right)\right) \text{ (orden total)}$$

$$\left(\frac{A+B}{B} > \frac{C+D}{D}\right) \Leftrightarrow (A/B > C/D) \text{ (Teorema 12 de Roberval)}$$

$$\left(\frac{A+B}{B} < \frac{C+D}{D}\right) \Leftrightarrow \left(A/B < C/D\right) \quad \text{(Teorema 12 de Roberval)}$$

luego por el orden total entre razones de magnitudes

$$\left(\frac{A+B}{B} \neq \frac{C+D}{D}\right) \Leftrightarrow \left(A/B \neq C/D\right)$$

5. Los comentarios del Profesor K. Hara de la Universidad de Osaka así como los nuestros acompañarán la edición crítica del texto latino y su traducción francesa; actualmente en curso de publicación.