*LLULL, Vol. 4, 1981, 71-85*

# SCRITTI INEDITI DI ENRICO MONTUCCI *

RAFFAELLA FRANCI **
LAURA TOTI RIGATELLI

Nel 1840 in Francia come tema di concorso ai Licei fu proposta la seguente questione: *"E' data un' infinità di coniche omofocali ed un punto del loro piano; si domanda: 1.º Qual'è il luogo geometrico dei punti di contatto delle tangenti condotte da quel punto alle dette curve; 2.º Qual'è il luogo geometrico dei piedi delle normali condotte alle stesse curve dal punto dato; 3.º Qual'è il luogo geometrico dei piedi delle perpendicolari calate dal punto dato sopra le sue polari rispetto alle coniche date."* (cf, [4] p. 73). Lo stesso argomento fu riproposto nel 1861 all'esame di ammissione alla Scuola Normale di Parigi; dalle discussioni su questo problema ebbe origine il gran numero di studi fatti in Francia, nella seconda metà del secolo scorso, sopra le curve $\Phi$ [1].

Lo studio di tali curve iniziò nel secolo XVII ad opera di vari matematici, tra i quali Roberval e Torricelli. Denominate *ali* o *teroidi* fino alla fine del secolo XVIII, attualmente esse sono chiamate *strefoidi* o *strofoidi* (dal greco στρέφω = io intreccio o ὁστρόφs = avvolgimento o torsione), ed il primo lavoro in cui si trova tale nome è quello intitolato *Delle proprietà della Strefoide curva algebrica del terzo grado* del matematico italiano Enrico Montucci, pubblicato a Siena nel 1837.

E' proprio per lo studio di curve speciali che Enrico Montucci suscitò l'interesse dello storico della matematica Gino Loria, il quale nel 1925 ne sollecitò una biografia[2], e successivamente ne ricordò alcuni contributi scientifici nel suo trattato *Curve piane speciali*.

Uno spoglio sistematico del materiale esistente presso l'Archivio dell'Accademia dei Fisiocritici di Siena[3], da noi eseguito per altri scopi, ci ha fornito alcuni documenti preziosi per la ricostruzione della biografia di Enrico Montucci, oltre ad alcuni suoi lavori inediti.

## 1. Cenni biografici

Dal punto di vista cronologico, la prima informazione certa sulla vita di Enrico Montucci si ha da quanto egli stesso narra nell' *Elogio del professor Niccolò Mari* [7]; apprendiamo cosi che Montucci dimorò in Siena a partire dal 1827, eleggendo a suo maestro nelle scienze esatte lo stesso Mari, professore di Algebra presso la I. e R. Università di Siena, e amico d'infanzia del padre. Pare certo che il padre fosse Antonio Montucci (1762-1829), noto linguista senese il quale dimorò a lungo in Oriente.

Ricerche presso l'Archivio di Stato di Siena, benchè accurte, non ci hanno permesso di trovare alcuna indicazione sulla nascita di Enrico Montucci, avvenuta quindi, con buona probabilità, durante i soggiorni all'estero del padre.

Il periodo senese della vita di Montucci fu caratterizzato da una vivace attività politica e intellettuale. A testimonianza della prima ricordiamo che egli appartenne alla Giovine Italia, la nota società segreta fondata da Giuseppe Mazzini. Per tale attività politica egli fu arrestato in Siena, nella notte fra il 6 e il 7 aprile 1833, insieme ad altri esponenti della cultura cittadina *"imputati di operazioni tendenti a sovvertire l'ordine pubblico"* [4]. Condannato a piu mesi di reclusione fu successivamente graziato dal Granduca di Toscana (cf. [17] p. 187).

Furono sicuramente gli ideali politici di Montucci che lo spinsero a far parte del corpo docente delle Scuole Tegee, scuole tecniche per gli artisti, istituite in Siena dopo il 1840, anno nel quale gli scienziati italiani, riuniti nel Congresso di Torino, avevano auspicato una maggiore istruzione del popolo. I docenti delle scuole sopra citate prestavano la loro opera gratuitamente dando lezioni di chimica e fisica applicate alle arti, di meccanica e di geometria elementare.

L'attività scientifica di Enrico Montucci in Siena, si svolse prevalentemente nell'ambito dell'Accademia dei Fisiocritici, dove esordì il 27 luglio 1837 leggendo la Memoria, già citata, relativa alla strefoide. L'argomento fu oggetto di polemiche tra gli accademici e i professori di matematica della città, come mostrano alcune lettere conservate presso l'Archivio dell'Accademia stessa. Montucci, accusato ingiustamente di plagio, ne fu amareggiato, proseguì tuttavia i suoi studi presentando all'Accademia, il 18 febbraio 1838 una seconda Memoria dal titolo: *Delle applicazioni della Strefoide alla delineazione geometrica di alcuni generi di sogetti architettonici*[5]. Il 12 agosto dello stesso anno l'autore lesse, presso l'Accademia, una terza Memoria dal titolo: *Qual'è la sorgente della inesattezza dimostrata esistere nell'Equazione di continuità dei Fluidi dagli*

*Idraulici proposta?;* nella seduta dello stesso giorno Montucci fu nominato socio corrispondente. Fu in seguito alla lettura della Memoria *Della necessità di abandonare nell'insegnamento del Calcolo Differenziale i metodi privi di matematico rigore,* che il 26 luglio 1840 ebbe la nomina ad Accademico ordinario. A partire da tale data i verbali delle adunanze mostrano una partecipazione attiva di Montucci alla vita dell'Accademia e lo indicano come uno degli accademici piu disposti a farsi carico anche delle numerose incombenze pratiche. Il nome di Montucci scompare nei documenti dell'Accademia a partire dal luglio 1844, e la data della prefazione ad un suo opuscolo [8], pubblicato a Livorno nel 1846, lo indica come già residente a Parigi.

I motivi del trasferimento di Montucci in Francia sono quasi sicuramente di natura politica, infatti nel 1848, in qualità di capo di congrega provinciale della Giovine Italia, firmò a Parigi appelli al popolo italiano (cf. [17] p. 182).

I soli documenti, attualmente a nostra disposizione, per ricostruire la fase parigina della vita di Enrico Montucci sono le copie dei suoi lavori che egli continuò regolarmente a spedire, con dedica autografa, a Siena e che attualmente sono conservati presso la Biblioteca Comunale.

A Parigi Montucci continuò, probabilmente con rinnovato entusiasmo a causa dell'ambiente intellettualmente piu vivace, sia l'attività politica che quella scientifica.

Nel 1846 sulla rivista *Nouvelles Annales de Mathematiques* comparve una seconda redazione della Memoria sulla strefoide, ed è a questa che fa riferimento Gino Loria, il quale mostra di ignorare la prima versione senese del 1837.

La partecipazione di Enrico Montucci alla vita scientifica di Parigi è testimoniata dal fatto che, dal 13 aprile 1857 al 4 ottobre 1869, egli lesse ben sette Memorie presso l'Accademia delle Scienze, le prime due dedicate alla costruzione geometrica di radici cubiche, le altre alla risoluzione numerica di equazioni di grado superiore al quarto. Tali Memorie, i cui risultati sono pubblicati nei *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,* sono state poi rielaborate dall'autore in una unica nota dal titolo: *Résolution numérique complète des équations du cinquième degré* pubblicata a Parigi nel 1869 [10].

Dal frontespizio di tale opera apprendiamo che nel frattempo Montucci era stato insignito del titolo di *Chevalier de la Legion d'Honneur.*

L'attività pubblicistica di Enrico Montucci non si esaursce nelle sue ricerche matematiche, ma comprende anche scritti politico-filosofici (cf. [12]); e saggi linguistici sulla scia della tradizione paterna (cf. [10], [11], [13]).

E' interessante notare che nel frontespizio di un'opera del 1869 (cf. [11]), Montucci si qualifica docente di lingua inglese presso il Liceo St. Louis di Parigi. La buona conoscenza della lingua inglese fu, probabilmente uno dei motivi che indussero il Ministro francese della Pubblica Istruzione ad affiancare Enrico Montucci a J. Demogeot, nella missione in Gran Bretagna che condusse alla redazione dei due rapporti sull'istruzione in Inghilterra ed in Scozia (cf. [15], [16]).

L'ultima pubblicazione, a noi nota, porta la data del 1876 (cf. [14]), dopo la quale finiscono le nostre informazioni su Enrico Montucci.

## 2. Gli scritti inediti

L'Accademia dei Fisiocritici iniziò la publicazione dei suoi Atti nel 1761, da tale anno fino al 1808 furono pubblicati nove volumi; vi fu poi un lungo periodo durante il quale, benchè rimanesse viva l'attività scientifica, fu trascurata quella editoriale, ed il decimo volume degli Atti usci solo nel 1841. Questo spiega, in parte, perchè presso l'Accademia siano conservate numerose ed interessanti Memorie rimaste inedite, tra le quali quattro di Enrico Montucci[6].

*a) Memoria sull'equazione di continuità dei fluidi (1838)*

Il primo scritto inedito di Montucci fu presentato agli accademici il 12 agosto 1838, ed ha per titolo: *Qual'è la sorgente della inesattezza dimostrata esistere nell'Equazione di continuità dei Fluidi dagli Idraulici proposta?*[7].

Esso fa seguito ad una appendice alla nota sulla strefoide (cf. [5] pp. 29-36)

> "...in cui si prova non aver luogo la supposta generalità dell'equazione di continuità dei fluidi, proposta dal Venturoli e da altri autori di Idraulica, ma è soltanto applicabile ai fluidi incompressibili".

L'autore comincia col ricordare che:

> "Per *Equazione di Continuità dei fluidi* intendesi in Idraulica una espressione differenziale, per cui si esprime lo stto del moto delle particelle fluide in modo tale che niuna resti dalle altre disgiunta, ma tutte scorrano fittamente fra loro unite. Per tro-

var questa espressione in modo che sia essa generalmente applicabile ai fluidi tanto liquidi che aeriformi, immaginano gli Idraulici che abbia ogni molecola fluida una forma parallelepipeda rettangolare, e che mouvendosi da un punto ad un altro, tal molecola mantendo sempre inalterata la massa, cangi pure di forma, e si riduca ad un parallelepipedo obliquangolo. Costante essendo, como dissi, la massa, ne viene che la densità della molecola avrà sofferto un cangiamento reciprocamente proporzionale al contemporaneo cangiamento di volume. Onde trovata la nuova densità ed il nuovo volume, e fattone il prodotto, si ottiene una espressione eguale al valore della massa primitiva; quindi la cercata equazione, creduta finora generale per i liquidi insieme, e per i fluidi gassosi."

L'equazione di continuità, ricavata la prima volta da Eulero nel 1755, e tuttora usata, è la seguente

$$(1) \qquad \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial (qu)}{\partial x} + \frac{\partial (qv)}{\partial y} + \frac{\partial (qw)}{\partial z} = 0$$

dove u, v, w sono le proiezioni sugli assi della velocità della particella che passa nel punto P = (x, y, z) nell'istante t, e q è la densità nello stesso punto e nello stesso istante.

Se il fluido è incompressibile la (1) è sostituita dalle

$$(2) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$(3) \qquad \frac{\partial q}{\partial t} + u\frac{\partial q}{\partial x} + v\frac{\partial q}{\partial y} + w\frac{\partial q}{\partial z} = 0$$

mentre se il fluido è incompressible e omogeneo la (1) si riduce alla (2).

Montucci afferma di aver dimostrato, nella predetta appendice, attraverso un confronto dei calcoli esposti da Venturoli e da Francoeur nei rispettivi trattati[8]

"...essere nel risultato di quel calcolo implicitamente comprese quelle due equazioni che determinano l'incompressibilità e l'omogeneità del fluido considerato; cioè contenere la proposta equazione di continuità in sé stessa ascose quelle equazioni appunto che ai soli liquidi la restringono; quindi insufficiente la

> medesima a esprimer il moto tanto dei liquidi che dei fluidi elastici, perciò falsa l'asserzione che essa sia generale".

I ragionamenti di Montucci, che non stiamo qui a riportare, sono viziati da errori logici, egli attribuisce però la causa dell'errore al fatto che siano stati trascurati infinitesimi di ordine superiore. Sulla liceità o meno di trascurare infinitesimi di ordine superiore rispetto a quelli di ordine inferiore, Montucci disquisisce a lungo, e le sue considerazioni di carattere generale sui fondamenti del calcolo differenziale non sono privi di validità.

*b) Della necessità del rigore nel trattare il calcolo infinitesimale (1840)*

I fondamenti del calcolo infinitesimale non furono un interesse momentaneo per Enrico Montucci il quale redasse su questo argomento una ulteriore Memoria dal titolo: *Della necessità da abbandonare nell'insegnamento del Calcolo Differenziale i metodi privi di matematico rigore,* il cui manoscritto reca la data 6 febbraio 1840[9].

Dopo alcune considerazioni generali di carattere didattico, l'autore ricorda che:

> "Generalmente infatti sul limitare del Calcolo Infinitesimale, viene istruito lo studioso,esser questo un metodo, per cui sottoposte alle regole algebriche delle quantità *infinitamente piccole,* con vari artifizi si giunge nella maggior parte dei casi a dei valori e rapporti *finiti,* mediante un altro calcolo detto *Integrale.* Si stabilisce poi, essere un differenziale *una quantità infinitamente piccola, minore cioè di una qualunque assegnabile quantit.*"

Egli prosegue di conseguenza lamentando che tutti i metodi di insegnamento del calcolo, escluso quello di Lagrange, sono basati sulla infinitesima piccolezza degli elementi considerati,

> "...e che molti sono peraltro i dubbi che sorgono nella mente degli studiosi piu giovani quando riflettono sulla natura delle quantità infinitamente piccole".

Montucci mostra di conoscere bene i piu importanti trattati dell'epoca relativi al calcolo e dichiara di preferire, tra gli altri, quelli di P. Paoli[10] e L. Francoeur, seguaci entrambi delle teorie di Lagrange, il quale con la sua *Theorie des fonctions analytiques* intende trattare dei principi del calcolo differenziale "liberati da ogni considerazione di infinitesimi, di quantità evanescenti, di limiti e flussioni, e ricondotti all'analisi algebraica di quantità finite"[11].

Uno degli autori contestato invece da Montucci è S. D. Poisson il quale, ella introduzione alla sua *Meccanica*[12],

> "...si basa sul principio degli infinitesimi per dimostrare il Calcolo Differenziale, sostenendo esatto questo principio coll'argomento che l'infinitesimo in natura esiste, lo che io certo non nego; solo mantengo: *non potersi la quantità infinitesima al calcolo sottoporre, quando le competa la definizione di esser minore di una qualunque assegnabile quantità*".

Dando tale definizione di quantità infinitesima Poisson è portato ad affermare che due quantità che differiscono per un infinitesimo sono uguali, in quanto la loro differenza è minore di "ogni assegnabile quantità". Montucci controbatte:

> "Ora è ben vero, che se due quantità non differiscono che d'un infinitesimo, esse sono uguali; ma la ragione ne è, che l'infinitesimo cosi definito *non è, né può esser altro che zero;* il solo *zero* ha la proprietà di esser minore di qualunque assegnabile quantità; poichè se zero non fosse, per questo solo l'infinitesimo acquisterebbe un'escogitabil valore, quindi contraverrebbe alla propria definizione...
>
> Or deve necessariamente ammettersi una delle due seguenti proposizioni: O l'infinitesimo *non è assegnabile,* ed allora perde il carattere essenziale d'ogni quantità, riducendosi identice con lo zero; oppure l'infinitesimo è *assegnabile,* ed allora dovendo essere minore di qualunque assegnabile quantità per quanto piccola sia, è forza che sia l'infinitesimo quella quantità che immediatamente precede lo zero, onde resulterebbe *esser tutti gli infinitesimi eguali fra loro;* perchè equidistanti da zero."

Montucci osserva che anche in questa seconda ipotesi non si potranno evitare gli assurdi già notati

> "amenochè non si assuma il differenziale per quantità finita e non minore di qualunque assegnabile quantità... *le quantità dx, dy, etc. non sono né possono esser per l'indole loro quantità infinitesime nell'attuale accettazione del termine*".

A sostegno della sua affermazione egli mette in rilievo che lo stesso Leibniz, in un suo scritto del 1712[13], asserisce di aver usato il termine infinitesimo solo "figuratamente", intendendo con esso nient'altro che una quantità finita disprezzabile, e pertanto il calcolo infinitesimale altro non è che un metodo di approssimazione "i cui risultati sono sopportabilmente veri".

L'autore passa poi a confutare l'opinione di L. Carnot che il calcolo infinitesimale sia un metodo che diventa esatto per compenso di errori[14]. Egli asserisce inoltre che la piu convincente confutzione alle opinioni di Carnot è data dal metodo delle derivate di Lagrange

> "...basato sullo sviluppo in serie delle funzioni di variabili qualunque, e quindi sul teorema fondamentale, che si possa ridurre la somma di tutti i termini che fanno seguito ad un termine dato, ad esser minore di quel termine stesso, per dopo poter trascurare quello , che giova togliere dal calcolo; onde segue: *essere il metodo di Lagrange una vera e reale approssimazione per l'indole sua,* dimostrata legittima coi piu saldi e rigorosi ragionamenti".

Montucci passa poi a considerare quella che ritiene la questione principale, cioé se sia essenziale o no all'esistenza del calcolo infinitesimale il supporre infinitamente piccoli i differenziali. Egli comincia col ricordare che gli antichi Geometri greci avevano già introdotto l'idea di infinitesimo con il cosiddetto *metodo di esaustione,* senza peraltro dare alcuna definizione di quantità infinitamente piccola o grande:

> "E' cosa certa frattanto, che gli antichi giungevano agli stessi nostri risultati (avuto riguardo allo stato della scienza ai loro tempi) senza spingere l'esaustione all'infinitesimo; ben lungi da ciò, prescrivevano sempre come limite dell'esaustione una quantità finita..."

Montucci osserva poi che il rigore di Lagrange, che definisce *"quasi magico",* deriva dall'aver egli riprodotto l'antico metodo di esaustione, adeguandolo alle tecniche moderne del calcolo analitico:

> "Ecco intanto la base del suo metodo. Data una funzione di x, se essa diviene funzione di x + i, per le regole dell'Algebra potrà questa svolgersi in una serie ordinata per le potenze di i, e con deicoefficienti indipendenti dalla medisima i. Or dimostra Lagrange *(Calc. des fonc. Anal.)* potersi prendere sempre i tanto piccola, che un termine qualunque superi la somma di tutti i seguenti; laonde facendo con qualche artifizio sparire quel termine, si sarà ottenuto un residuo minore della metà, e cosi successivamente. E questo, como ognuno ben vede, perfettamente coincide col metodo d'esaustione degli antichi. Ma il metodo di esaustione è scevro affatto da ogni considerazione degli infinitesimi, dunque ne è indipendente anche quello delle funzioni derivate. Ma questo dimostra tutti i teoremi che costituiscono il Calcolo Differenziale, dunque anche questo deve poterne essere

indipendente. Fondato dunque su tal legittime ragioni, io credo di poter stabilire come incontrastabile l'assioma: *che niuna quantità è per sé stessa evanescente, ma può diventarlo relativamente ad un'altra, mantenendo però sempre il suo carattere essenziale di quantità finita.*"

La memoria prosegue con l'esposizione di alcuni esempi tratti dalla meccanica, dall'idraulica e dall'ottica, in cui accade che quantità ammesse come finite vengano trascurate nei calcoli senza apportre errori apprezzabili. L'esempio principe si ha comunque in astronomia dove è stabilita la regola *"che le quantità le cui seconde dimensioni possono trascurarsi sono differenziali.*"

Montucci ricorda poi il metodo con cui, in astronomia, si calcolano le differenze di lingitudine e di latitudine fra il centro del sole ed una macchia del suo disco, a partire da dati sperimentali quali la differenza di altezza reale e di declinazione. Egli osserva altresi che tale metodo può essere applicato, con gli opportuni adattamenti, ad altre situazioni: in particolare egli calcola il valore della normale dell'arco di 30° nel circolo, e l'aumento di un arco di parabola di parametro unitario, quando l'ascissa cresca di un centimillesimo.

La memoria termina con un riassunto di tutte le considerazioni esposte, e con la conclusione che

> "...il modo odierno d'insegnare il Calcolo infinitesimale è generalmente parlando, estremamente difettoso, meritando di esser corretta l'idea che delle quantità infinitesime suol aversi; e se tal parola per breviloquio vuolsi ritenere, non dovrà ciò farsi che nel giusto e legittimo senso in cui da Leibnizio fu quel termine adottato".

*c) Dello stato delle macchine presso gli antichi (1841)*

Il 7 marzo 1841, per adempiere al dovere di ogni nuovo Accademico di dare pubblica lettura di una sua dissertazione, Enrico Montucci presentò al consesso degli Accademici una memoria intitolata *Dello stato delle macchine presso gli antichi* che, nel verbale della seduta scientifica, viene definita "erudita e ragionata"[15].

L'autore si scusa innanzitutto di non presentare un argomento di matematica pura, como sarebbe stato suo desiderio, a causa del poco tempo avuto a disposizione. Egli ritiene però non debba essere privo di interesse un confronto tra la meccanica dei popoli antichi e quella moderna, allo scopo di confutare quanti ritengono "i nostri venerandi padri nella Meccanica pratica... molto al disopra dei contemporanei nostri."

In questa dissertazione Montucci mostra una notevole conoscenza della storia dell'architettura, e moti sono gli architetti da lui citati; in particolare ricordiamo Lisippo e Carete per l'antichità, Perrault, Wren, Fontana e Brunel per l'epoca moderna[16]. Montucci esaminando numerosi monumenti dell'antichità classica e barbara[17], osserva che la loro edificazione richiese il trasporto di monoliti di notevoli dimensioni e dimostra che tale operazione fu possibile solo per l'impiego di una notevole quantità di uomini e con l'uso di machine semplici, e non con sifisticati meccanismi, a noi ignoti, come affermano invece alcuni studiosi.

*d) Di alcune proprietà del rettangolo (1841)*

L'ultimo scritto inedito di Enrico Montucci fu depositato presso l'Accademia il 5 dicembre 1841, ma letto solo nella seduta del 2 febbraio 1843; esso porta il titolo *Di alcune non osservate finora proprietà del rettangolo*[18].

Scopo del lavoro è portare un contributo alla risoluzione geometrica elementare del noto problema dell'inserzione di due medie proporzionali tra due grandezze date. Al problema in questione equivalgono tutti quelli di terzo grado riconducibili ad un'equazione della forma $x^3 = k$, tra essi ricordiamo il famoso problema della duplicazione del cubo. Per risoluzione geometrica elementare si intende, naturalmente, una risoluzione grafica con riga e compasso, traducibile quindi in una risoluzione algebraica mediante l'uso dei soli radicali quadratici. La questione non era priva di interesse nel 1841, poichè in tale data non era ancora stata divulgata la Teoria di Galois, e solo pochi anni dopo F. G. Eisenstein (1823-1852) dimostrò una condizione sufficiente affinché una equazione sia irriducibile nel suo campo di razionalità. Infine soltanto nella seconda metà del XIX secolo un teorema di J. P. L. Petersen (1839-1910) permise di avere una condizione necessaria e sufficiente per la risolubilità con riga e compasso di un problema di geometria piana.

Dopo alcune considerazioni di carattere generale Montucci ricorda il seguente teorema, il cui enunciato gli era stato proposto da Pietro Obici[19]:

> "Se sulla diagonale BD di un rettangolo ABCD si abbassi la perpendicolare CF, dal cui piede poi conducasi delle paralele FG, FH ai lati, sarà la radice cubica del quadrato della diagonale uguale alla somma delle radici cubiche dei quadrati delle due parallele; cioè to BD=d, FG=p, FH=p', AB=m, AD=n,
>
> $$CF = a\ \sqrt[3]{d^2} = \sqrt[3]{p^2} + \sqrt[3]{p'^2}."$$

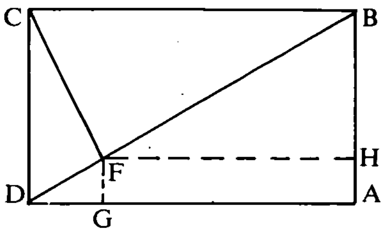


Fig. 1

Montucci non solo ritrovò la semplice dimostrazione, ma dedusse anche i seguenti corollari:

"La perpendicolare abbassata sulla diagonale è radice cubica del prodotto della diagonale BD medesima nelle due parallele FG, FH ai lati.

Il quadrato dell'istessa perpendicolare CF è media proporzionale fra la differenza della diagonale BD del rettangolo dato con la diagonale AF del rettangoletto formato dalle parallele ai lati e dalla terza parte della lor somma."

Il contributo alla risoluzione dell'inserzione delle due medie proporzionali è pertanto dato dal teorema seguente:

"Date tre rette, una delle quali maggiore della somma delle altre due, potranno colla Geometria elementare costruirsi due medie geometriche fra la maggiore ed una qualunque delle altre, quando succeda che la maggiore possa farsi diagonale di un rettangolo, mentre le altre siano le parallele condotte ai lati da piede della perpendicolare calata dall'angolo opposto."

Dobbiamo però osservare che, se è pur vero che, dati tre segmenti che verifichino le condizioni richieste è possibile inserire tra due di essi due medie proporzionali, una costruzione grafica del problema si può eseguire solo per tentativi, usando la riga e il compasso come strumenti di controllo.

Ricordiamo a questo proposto che una costruzione analoga a quella di Montucci, venne eseguita nel 1932 da C. Botto, per la risoluzione geometrica di un'equazione algebrica di terzo grado[20].

I resultati ottenuti in questo lavoro vennero da Montucci riutilizzati successivamente, a Parigi, durante i suoi studi relativi alla risoluzione numerica di equazioni algebriche (cf. [10])[21]. La figura 1 venne denominata dall'autore *cubo-rettangolo* e, attraverso una opportuna scelta del riferimento cartesiano, Montucci ne dedusse le curve suguenti: la cissoide di Diocle, la figlia doppia retta, che egli chiama cubatrice, e l'ipocicloide a quattro rami o asteroide, a cui Montucci da il nome di *cubo-cicloide*[22]. E' proprio l'uso di tali curve che permette all'autore la risoluzione numerica di equazioni algebriche.

## NOTAS

(*) Lavoro eseguito con il contributo del C. N. R.

(**) Indirizzo degli autori: Istituto di Matematica dell'Università. Via del Capitano 15, 53100 SIENA, Italia.

1. Chiamasi curva Φ il luogo dei fuochi delle coniche ottenute segando un cono di rotazione con i piani del fascio per una tangente perpendicolare ad una generatrice del cono.

2. Nella sezione storico-bibliografica del quarto volume del *Bollettino di Matematica* del 1925, a pag. 61, Ginò Loria scriveva: "Per la biografia di Enrico Montucci. Di questo matematico senese le *Nouvelles Annales de Mathematiques* (1846 e 1857) e i *Comptes rendus hébdomandaires des séances de l'Académie des Sciences* (T. XX Paris 1865) contengono contributi a curve speciali... Una completa biografia di questo patriota scienziato sarebbe desiderata ed il *Bollettino* sarebbe ben lieto di pubblicarla."

3. L'Accademia dei Fisiocritici fondata nel 1691 dal filosofo, fisico e matematico Pirro Maria Gabrielli fu, nei suoi momenti di maggiore splendore, una delle accademie scientifiche piu importanti d'Europa. In particolare nel secolo XIX annoverò tra i suoi Accademici: Soemmering, Luciano Bonaparte, il conte Demidoff e molti altri. Accanto ai severi studi scientifici, nella prima metà del secolo scorso, si aggiunsero per molti accademici gli ideali risorgimentali, e l'Accademia fu luogo in cui serpeggiarono, in Toscana, i primi aneliti di libertà e unificazione nazionale. Le due compagnie universitarie senesi, sui campi di battaglia di Curtatone e Montanara, furono guidate proprio dal Presidente dell'Accademia Alessandro Corticelli. Tuttora l'Accademia dei Fisiocritici è luogo d'incontro di studiosi di varie nazionalità.

4. La notizia è ricavata dai *Rapporti del Capitano di Polizia* dell'anno 1833, conservati presso l'Archivio di Stato di Siena.

5. Gli originali delle due Memorie relative alla strefoide, che furono pubblicate a cura dell'autore, (cf. [5], [6]), sono conservati presso l'Archivio dell'Accademia. Le lettere relative alla polemica presentano, quali interlocutori principali, il già ricordato Niccolò Mari, schieratosi subito naturalmente a favore dell'allievo, e Santi Linari, già professore di Calcolo sublime presso l'Università di Siena.

6. Una delle attuali attività editoriali dell'Accademia consiste nella pubblicazione di tali inediti. In particolare alle autrici della presente nota è stato affidato il compito di curare la pubblicazione delle opere matematiche, edite e inedite, di Enrico Montucci.

7. Il manoscrito è costituito da 15 fogli, formato protocollo, scritti in una chiara grafia da ambo le facce su mezza colonna. Rilegato in cartoncino porta sulla copertina la dicitura: *Memoria sull'Equazione di Continuità dei Fluidi. 1838.*

8. Giuseppe Venturoli (1768-1846) fu professore di matematica all'Università di Bologna e compì importanti ricerche nel campo dell'Idraulica, è autore di un *Trattato di Meccanica*, in due volumi, di cui il secondo riguardante l'Idraulica. L'opera, che ebbe molte edizioni e traduzioni, fu un testo molto diffuso negli Istituti universitari.

9. Louis B. Francoeur (1773-1849) è autore di numerosi trattati tra i quali ricordiamo il *Traité elementaire de mecanique* e il *Cours complet de Mathématiques pures*. Entrambi i testi furono molto diffusi come mostra il fatto che ebbero molte edizioni. In particolare il secondo, che contiene un capitolo sul calcolo integrale e differenziale alla maniera di Lagrange, fu tradotto anche in italiano.

9. Il manoscritto consta di 15 fogli, formato protocollo, scritti in una chiara grafia, da ambo le facce su una mezza colonna. Rilegato in cartoncino porta sulla copertina la dicitura: *Della necessità del rigore nel trattare il Calcolo Infinitesimale. Memoria. 1840.*

10. Pietro Paoli (1759-1839) fu professore nelle Università di Pavia e di Pisa e Sovraintendente agli Studi di Toscana. Autore di numerose Memorie di grande pregio che rivelano la sua conoscenza profonda dell'analisi matematica, scrisse anche un importante trattato di analisi infinitesimale dal titolo *Elementi di algebra*, di cui uscirono due edizioni, la seconda delle quali (Pisa 1804), consta di tre volumi. Paoli fu in contatto epistolare con i massimi matematici del tempo tra i quali Lagrange.

11. Le sopraricordate parole di Lagrange sono riporate nella traduzione italiana di U. Bottazzini (cf. [1] p. 42), al cui testo rimandiamo anche per una chiara esposizione del punto di vista di Lagrange.

12. Il testo di Poisson al quale si fa riferimento è il *Traité de Mecanique* pubblicato in due volumi negli anni 1811, 1833 e che fu per lungo tempo un'opera classica.

13. Si tratta della lettera *Observatio quod rationes sive proportiones non habeant locum circa quantitates nihilo minores*, pubblicata negli Acta Eruditorum del 1712.

14. L'opera a cui l'autore fa riferimento è *Réflexions sur la métaphisique du calcul infinitesimal* (1797). Il testo fu tradotto in molte lingue e godette di una vasta popolarità. In esso Carnot, mettendo a confronto il metodo delle flussioni di Newton, quello di Leibniz basato sul concetto di differenziale, e quello di D'Alambert che utilizza il concetto di limite, conclude che il principio metafisico del calcolo infinitesimale è quello della compensazione degli errori. Egli sostiene infatti che gli infinitesimi, in quanto quantità inapprezzabili, vengono introdotti solo per facilitare i calcoli ed eliminati poi nel risultato finale.

15. Il manoscritto consta di 10 fogli, formato protocollo, il primo dei quali recante solo il titolo al recto e bianco al verso, i rimanenti scritti fittamente su tutte due le facciate.

16. Lisippo (c. 330 a. C.), molto noto quale autore di statue atletiche, fu maestro di Carete di Lindo autore del Colosso di Rodi.

Claudio Perrault (1613-1688) progettò, fra l'altro, la faciata del Louvre e costruì l'Osservatorio di Parigi.

Di Cristoforo Wren (1632-1733) ricordiamo il progetto della Basilica di San Paolo a Londra.

Domenico Fontana (1543-1607) è rimasto famoso per essere stato il sovraintendente all'erezione di numerosi obelischi in Roma, tra i quali quello di Piazza San Pietro.

Delle numerose opere di Sir Mark I. Brunel (1769-1849) Montucci ricorda, in particolare, la costruzione della galleria sotto il Tamigi, a Londra, avvenuta nel 1799.

17. Tra gli esempi riguardanti l'antichità classica, tutti presi dalle *Storie* di Erodoto, ricordiamo il trasporto di un tempio monolitico del peso di circa 428000 chilogrammi, da Elefantina a Saide, e la costruzione del tempio di Buto, che richiese il sollevamento di un masso del peso di 2144000 chilogrammi. I monumenti barbari ricordati sono invece: Stonehenge in Inghilterra, il monumento druidico di Carnac in Francia, e i Loganstones inglesi.

17. Tra gli esempi riguardanti l'antichità classica, tutti presi dalle *Storie* di Erodoto, ricordiamo il trasporto di un tempio monolitico del peso di circa 428000 chliogrammi, da Elefantina a Saide, e la costruzione del tempio di Buto, che richiese il sollevamento di un masso del peso di 2144000 chilogrammi. I monumenti barbari ricordati sono invece: Stonehenge in Inghilterra, il monumento druidico di Carnac in Francia, e i Loganstones inglesi.

18. Il manoscritto è costituito da 6 fogli formato protocollo, dei quali il primo, bianco al verso, reca al recto la seguente dicitura *Di alcune proprietà del rettangolo*. 1841, tre scritti fittamente su ambo le facce, il penultimo scritto solo parzialmente al recto e l'ultimo dedicato a una figura geometrica.

19. Pietro Obici (1804-1849) fu professore di Calcolo sublime all'Università di Siena, poi di Meccanica e Idraulica all'Università di Pisa.

20. Per la risoluzioni di C. Botto si può consultare utilmente il testo delle autrici *Storia della teoria delle equazioni algebriche* (cf. [3], p. 67).

21. In una lettera indirizzata da Parigi, il 25 novembre 1869, al Presidente dell'Accademia dei Fisiocritici, Montucci sciveva: "Mi gode l'animo nel pensare che il primo albore di questa scoperta siasi manifestato nel seno della prelodata Accademia, allorquando, or son trent'anni, vi lessi una memoria sul cubo-rettangolo".

22. L'uso del termine cubo-cicloide è contestato da H. Brocard e T. Lemoyne nel loro testo *Courbes géométriques remarquables* (cf. [2], p. 169), poiché la curva in questione è di sesto grado e non di terzo come sembrerebbe indicare il prefisso.

## BIBLIOGRAFIA

[1] BOTTAZZINI, U., *Il calcolo sublime: storia dell'analisi matematica da Euler a Weirtrass*. Borighieri, Torino, 1981.

[2] BROCARD, H.; LEMOYNE, T., *Courbes géométriques remarquables*. Blanchard, Paris, 1967 (1.ª edizione 1919), 3 voll.

[3] FRANCI, R., TOTI RIGATELLI, L., *Storia della teoria delle equazioni algebriche*. Mursia, Milano, 1979.

[4] LORIA, G., *Curve piane speciali*. Hoepli, Milano, 1930, 2 voll.

[5] MONTUCCI, E., *Della strefoide curva algebrica del 3.º grado recentemente scoperta ed, esaminata dal medesimo, con una appendice in cui si prova non aver luogo la supposta generalità della equazione di continuità dei fluidi proposta dal Venturoli ed altri autori di idraulica*, Presso Guido Mucci. Siena, 1837, pp. 1-55.

[6] MONTUCCI, E., *Delle applicazioni della strefoide alla geometrica esecuzione di alcuni generi di soggetti architettonici a cui non è applicabile in circolo*. Presso Guido Mucci, Siena, 1838, pp. 56-91.

[7] MONTUCCI, E., *In ricordanza di Niccolò Mari, un tempo pubblico professore di Algebra nella senese Università*, Tipografia dell'Ancora, Siena, 1842.

[8] MONTUCCI, E., *Trattato teorico pratico di Galvanoplastica*. La Calliope, Livorno, 1846.

[9] MONTUCCI, E., *On the construction of English hexameters*. Museum and English Journal of Education, London, 1868.

[10] MONTUCCI, E., *Résolution numérique compléte des équations du cinquième degré et abaissement des équations trinomes de tous les degrés.* Delegrave, Paris, 1869, pp. 1-28.

[11] MONTUCCI, E., *Théorie de la prononciation anglaise.* Delagrave, Paris, 1869.

[12] MONTUCCI, E., *La défense du Pays.* Delagrave, Paris, 1871.

[13] MONTUCCI, E., *Ueber deutsche Hexametrik.* Paris, 1871.

[14] MONTUCCI, E., *Questions scientifiques.* Delagrave, Paris, 1876.

[15] MONTUCCI, E.; DEMOGEOT, J., *De l'enseignement secondaire en Anglaterre et en Ecosse.* Imprimerie Imperiale, Paris, 1868.

[16] MONTUCCI, E.; DEMOGEOT, J., *De l'enseignement superieur en Anglaterre et en Escose.* Imprimerie Imperiale, Paris, 1870.

[17] STIANELLI, G., *Antonio Guadagnoli e la Toscana dei tempi suoi.*