LA DEMOSTRACIÓN EN MATEMÁTICA. UNA APROXIMACIÓN EPISTEMOLÓGICA Y DIDÁCTICA

ANGEL MARTÍNEZ RECIO
Universidad de Córdoba

QUINTO SIMPOSIO DE LA SOCIEDAD ESPAÑOLA DE
INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
Almería, Septiembre 2001

LA DEMOSTRACIÓN EN MATEMÁTICA. UNA APROXIMACIÓN EPISTEMOLÓGICA Y DIDÁCTICA

❧

ANGEL MARTÍNEZ RECIO
Universidad de Córdoba

RESUMEN

En este artículo se considera la demostración matemática como un objeto complejo que admite distintas interpretaciones y dimensiones. Dentro de la institución matemática, la interpretación dominante es la consideración de la demostración como demostración deductiva, formal. Pero esa interpretación, además de limitada desde un punto de vista epistemológico, comporta importantes dificultades para los estudiantes de distintos niveles educativos, incluido el universitario, que manifiestan una gama variada de esquemas personales de demostración. Atendiendo a dichas razones epistemológicas y didácticas, se propone revisar la interpretación formalista de la demostración matemática, flexibilizar su significado, dando cabida en él a otras formas de argumentación -también utilizadas por los matemáticos al hacer sus demostraciones-, más cercanas a las prácticas reales de los estudiantes.

ABSTRACT

In this paper mathematical proof is considered as a complex object which admits different interpretations and dimensions. Inside the mathematical institution, the dominant interpretation is the consideration of proof exclusively as deductive, formal proof. But that interpretation, besides limited from a epistemological point of view, presents important difficulties for the students of different educational levels (including university student), who show a great variety of personal proof schemes. Taking into account these epistemological and didactic reasons, the formal interpretation of mathematical proof is proposed to be reviewed, considering mathematical proof as a more flexible object, in which other forms of argumentations are included -also used by mathematicians in their proofs-, closer to the real daily life activities of students

SIGNIFICADOS DE LA DEMOSTRACIÓN MATEMÁTICA. NECESIDAD DE UNA REVISIÓN CONCEPTUAL

Introducción

Aunque se trata de un objeto complejo, que admite diferentes interpretaciones, la demostración matemática aparece para muchos matemáticos como demostración deductiva formalizada, que es el modelo para ellos de demostración rigurosa. Un modelo que está ligado a la concepción que buena parte de los matemáticos tiene de la propia matemática: una disciplina abstracta, cuyos teoremas se deducen de conjuntos establecidos de axiomas, mediante razonamientos estrictamente lógicos. La axiomatización garantiza el rigor. Dieudonné (1987, p. 206) sintetiza esta idea diciendo: *"no puede haber demostración 'rigurosa' excepto en el contexto de una teoría axiomática".*

Sin embargo, la aplicación de la demostración formal en el ámbito escolar está actualmente cuestionada, dadas las dificultades que comporta para los estudiantes, de acuerdo con diferentes investigaciones desarrolladas en las últimas décadas.

Fischbein (1982, p. 16), investigando sobre una muestra de 400 estudiantes de secundaria en Tel Aviv cómo distinguían entre demostración empírica y formal encontró que sólo un 14,5% de los estudiantes estudiados fueron capaces de aceptar una demostración desarrollada de acuerdo con un razonamiento estrictamente lógico, sin necesidad de comprobaciones empíricas adicionales: *"sólo el 14,5% fueron consistentes hasta el final (es decir, no sintieron la necesidad de posteriores comprobaciones empíricas)".*

Senk (1985), en un estudio realizado con 1520 estudiantes, que habían recibido enseñanzas sobre la demostración en un curso de geometría, en 74 clases, de 11 escuelas, de 5 estados de EEUU, encontró que sólo *"... aproximadamente el 30% de los estudiantes que habían seguido un curso año completo con enseñanza de la demostración alcanzaron un 75% de nivel de maestría en demostraciones escritas".*

Martín y Harel (1989, p. 41), en una investigación sobre esquemas personales de demostración matemática, realizada con 101 alumnos de Magisterio, encontraron que *"... más de la mitad de los estudiantes aceptaban un argumento empírico-inductivo como demostración matemática valida".*

Nosotros mismos, (Recio y Godino, 1996), Recio (2000), hemos podido constatar la dificultad que encuentran los estudiantes universitarios de nuestro entorno cultural para generar, de forma espontánea, sencillas demostraciones formales. En una investigación desarrollada en el curso 1994-95, sobre 429 estudiantes de universidad, de primer curso, con alguna asignatura de matemáticas en el curriculum, encontramos que sólo un 32,9% de dichos estudiantes fueron capaces de desarrollar, de modo formal, las dos demostraciones, extremadamente simples, que se les reclamaban. Estos resultados volvieron a confirmarse – con porcentajes aún inferiores- en una investigación similar desarrollada en el curso 1997-98.

Como consecuencia de estos y otros estudios semejantes, en las últimas décadas se está produciendo una revisión del carácter formalista de la demostración en el ámbito escolar -introducido en dicho ámbito durante la década de los sesenta y primeros de los setenta, acompañando al movimiento de renovación de la enseñanza de la matemática que dio en llamarse *"matemática moderna".*

A nosotros nos parece conveniente revisar el carácter formal atribuido a la demostración matemática, pero no sólo en el ámbito educativo, sino también en el matemático propiamente dicho. Revisar el carácter excesivamente formalista que desde la institución matemática se suele atribuir a la demostración matemática, abriendo su significado a otras prácticas más informales, que también utilizan los matemáticos en sus procesos argumentativos.

1.2. Significados de la demostración matemática para la institución matemática

La demostración matemática es el proceso validativo que siguen los matemáticos para justificar sus teorías. Aunque existen otras opciones, el modelo actual dominante de demostración, dentro de la institución matemática, es la demostración lógico-formal.

Knowless (1998, p. 1) explicita el significado formalista de la demostración matemática diciendo: *"Una demostración en una teoría matemática es una secuencia de proposiciones, cada una de las cuales es o bien* *un axioma ... o bien una proposición que ha sido derivada de los axiomas iniciales por las reglas de inferencia de la teoría. Un teorema es una proposición así derivada por una demostración".*

La concepción formalista de la demostración pone el acento en los aspectos sintácticos. Se evita el recurso a la intuición y se prefiere el uso de reglas de inferencias formales, precisas, bien definidas. La lógica que soporta las demostraciones matemáticas, así consideradas, es la lógica formal. La demostración se convierte en un procedimiento algorítmico que puede ser materializado mediante el uso de ordenadores. Para Schwichtenberg (1982, p. 81) *" ... una demostración formal puede ser vista como un programa (de ordenador)".*

Sin embargo, las demostraciones bajo los esquemas formalistas se vuelven extraordinariamente complejas. Livingston (1987), por ejemplo, muestra la complejidad de la prueba de la unicidad del elemento neutro en un grupo algebraico, comparada con su simplicidad mediante una argumentación informal.

Esto hace, como afirma Resnick (1992), que la matemática contemporánea esté, alternativamente, repleta de *"working proofs",* de demostraciones informales, no axiomatizadas. Están apareciendo además, según Hanna (1995), nuevos procedimientos, como la "zero-knowledge proof", o la "holographic proof", basadas en comprobaciones experimentales, desarrolladas mediante ordenadores, utilizando procedimientos aleatorios de validación.

En realidad, es desde la propia teoría de los fundamentos de la matemática de donde se obtienen, precisamente, los resultados que expresan los límites de los sistemas formales para expresar la matemática en su conjunto. Un resultado bien conocido, como es el teorema de incompletitud de Gödel (Kline, 1980), que afirma la incompletitud de cualquier sistema formal capaz de contener la teoría de números, muestra con claridad dichos límites. No existe un sistema formal consistente capaz de contener, por completo, ni siquiera a la aritmética elemental. Lo que, en definitiva, viene a significar que la matemática no puede reducirse a un mero sistema formal.

La consecuencia es que la verdad matemática deja de tener valor absoluto, presentando un valor pragmático. Las posiciones estrictamente formalistas pierden sentido. Se abren así las puertas, dentro de la institución matemática, a otras opciones menos formalistas, más informales. La validez de las proposiciones matemáticas no se resuelve acudiendo a procesos de derivación formal, sino que es una cuestión ligada al acuerdo convencional, al acuerdo entre partes, entre las personas e instituciones implicadas en el proceso de demostración.

1.3. Significados de la demostración matemática en la institución educativa

Dentro de la institución educativa, la demostración matemática tiene hoy día un significado más abierto, menos formalista. Junto al pensamiento estrictamente deductivo, se resalta también la necesidad de potenciar otros modos validativos de tipo empírico-inductivo, la formulación de conjeturas, los ejemplos y contraejemplos, los procesos de generalización, etc.

Así, los Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática, elaborados por el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 1989) de los EEUU de América, en las orientaciones para el ciclo 9-12 (final de secundaria y bachillerato, aproximadamente), centran la atención (p. 147) en la necesidad de combinar el pensamiento inductivo con el deductivo, marcando como objetivo que todos los estudiantes tengan experiencias con estos dos modos de pensamiento, para que lleguen a apreciar el papel que cumplen ambos en la matemática y fuera de las matemáticas.

En España, el Diseño Curricular Base, elaborado por el Ministerio de Educación y Ciencia (MEC, 1989. Secundaria, p. 480), considera el razonamiento deductivo como el resultado de un proceso que se inicia con las formas empírico-inductivas de razonamiento, ofreciendo consideraciones como las siguientes: *"Los tanteos previos, los ejemplos y contraejemplos, la solución de un caso particular, la posibilidad de modificar las condiciones iniciales y ver qué sucede, etc., son las auténticas pistas para elaborar proposiciones y teorías. Esta fase intuitiva es la que convence íntimamente al matemático de que el proceso de construcción del conocimiento matemático va por buen camino. La deducción formal suele aparecer casi siempre en una fase posterior. Esta constatación se opone frontalmente a la tendencia, fácilmente observable en algunas propuestas curriculares, a relegar los procedimientos intuitivos a un segundo plano, tendencia que priva a los alumnos del más poderoso instrumento de exploración y construcción del conocimiento matemático".*

1.4. Hacia una revisión epistemológica del concepto de demostración matemática

La concepción formalista de la demostración matemática hunde sus raíces en la propia evolución histórica de la matemática.

El programa de desarrollo axiomático de la geometría iniciado por Euclides hace más de dos mil años aparece como el primer intento sistematizado de dar una base axiomática al proceso de construcción del conocimiento matemático.

El surgimiento en el siglo XIX de las geometrías no euclídeas –que, pese a contener axiomas que aparecen como intuitivamente no evidentes, son tan consistentes, tan coherentes en su desarrollo lógico como la propia geometría euclídea- representó un hito histórico importante en la evolución del pensamiento matemático hacia posiciones formalistas. Su introducción ayudó a diferenciar entre espacio físico y geométrico, entre matemáticas y realidad. Ha servido para establecer la coherencia lógica -y no una adecuación ingenua con la realidad exterior- como base de fundamentación de la matemática (Kline, 1980).

Pero las posiciones formalistas extremas han exagerado el aspecto sintáctico de los sistemas axiomáticos. Para evitar las contradicciones lógicas que, a veces, ha propiciado el uso de la intuición, se pone el acento en los aspectos sintácticos, en detrimento de los semánticos. Se evita la significación de los términos matemáticos, que aparecen como meros elementos simbólicos de un sistema formal. Se acude al uso de reglas formales, definidas dentro del mismo sistema, que se pueden aplicar de una manera mecánica, algorítmica. La demostración se reduce a un procedimiento algorítmico que podría desarrollarse de forma automatizada, mediante el uso de ordenadores.

Como hemos señalado ya, teoremas metamatemáticos como el de Gödel demuestran la futilidad de los intentos de reducir la matemática a un mero sistema formal. La matemática es mucho más que mero encadenamiento deductivo, formal, apareciendo como un proceso creativo, ligado a la formulación de conjeturas, a la presencia del ejemplo y el contraejemplo, a la falsabilidad, a los procesos de prueba y refutación (Lakatos, 1976).

Hoy aparece como necesaria una revisión del objeto "demostración matemática", que permita una apertura hacia perspectivas más flexibles, pragmáticas, convencionales.

Un estudio de los variados esquemas personales de demostración matemática que manifiestan los sujetos individuales puede ayudar a comprender la complejidad de dicho objeto y a permitir otras significaciones del mismo, más informales, más cercanas a las prácticas habituales de los estudiantes.

SIGNIFICADOS PERSONALES DE LA DEMOSTRACIÓN MATEMÁTICA

2.1. Esquemas personales de demostración matemática

Harel y Sowder (1998) han estudiado la dimensión personal o subjetiva de la demostración matemática. Un elemento esencial de su propuesta es la idea de esquema personal de demostración, que para ellos representa todo aquello que supone persuasión y convencimiento para la persona.

Nosotros hemos utilizado la idea de esquema personal de demostración, usándola como esquema representativo de una categoría de respuestas personales, dadas por un colectivo amplio de sujetos individuales.

Hemos utilizado esa idea en nuestra investigación, citada anteriormente (Recio, 2000), que desarrollamos durante el curso 1994-95, sobre una muestra de 429 estudiantes de primer curso de universidad, con alguna asignatura de Matemáticas en el curriculum y que complementamos con algunos elementos confirmatorios durante el curso 1997-78.

Como resultado de ese estudio, hemos encontrado cuatro tipos básicos de esquemas personales de demostración matemática: argumentación explicativa, argumentación empírico-inductiva, prueba deductiva informal y demostración deductiva formal.

Los esquemas de tipo "argumentación explicativa" son formas muy elementales de argumentación, que sirven a los sujetos para explicarse el significado de la proposición a demostrar a partir de su aplicación en algunos casos particulares (por ejemplo, entender el significado del teorema de Pitágoras, aplicándolo en algunos casos particulares). Verdaderamente no hay intención validativa, sino que la intención es esencialmente explicativa. A pesar de ello, consideramos este tipo de argumentación como esquema personal de demostración, en primer lugar porque apareció en nuestro estudio como un esquema de respuesta de muchos estudiantes cuando se les pedía realizar una demostración, y, además, porque el elemento explicativo tiene sentido como primer eslabón del proceso demostrativo.

Los esquemas de tipo "argumentación empírico-inductiva" también se centran en el cumplimiento del correspondiente teorema en un conjunto de casos particulares, pero aquí la intención no es ya explicativa, sino que lo que se pretende es comprobar el cumplimiento *en general* de dicho teorema (lo que se reconoce por la utilización de variables genéricas, por la afirmación expresa de ese cumplimiento generalizado, etc.).

Los esquemas de tipo "prueba deductiva informal" corresponden a argumentaciones lógicas de tipo informal, apoyadas en analogías con otros modelos isomorfos, en la utilización de elementos gráficos, etc. Por ejemplo, muchas argumentaciones que suelen usarse en secundaria y en bachillerato para explicar las propiedades de las funciones de variable real, mediante el estudio de sus representaciones gráficas, las "curvas".

Los esquemas de tipo "demostración deductiva formal" corresponden a argumentaciones basadas en la potencia validativa del encadenamiento axiomático, pudiendo aparecer elementos intuitivos que ayudan a la demostración lógico-formal, pero que no la sustituyen.

2.2. ¿Qué tipos de demostraciones matemáticas convencen a nuestros alumnos?

Los enunciados de los problemas aplicados en la prueba, mediante los que estudiamos los esquemas personales de demostración de estudiantes universitarios de nuestro entorno sociocultural, fueron los siguientes:

Problema Aritmético: *Demuestra que la diferencia entre los cuadrados de dos números naturales consecutivos cualesquiera es siempre un número impar, igual a la suma de dichos números. (Recuerda que los números naturales son los infinitos números 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 19, 11, 12, 13, 14, 15,...).*

Problema Geométrico: *Demuestra que las bisectrices de dos ángulos adyacentes cualesquiera forman un ángulo recto. (Recuerda que dos ángulos son adyacentes si tienen el vértice y un lado en común y suman un ángulo llano, es decir 180º. Un ángulo recto mide 90º. La bisectriz de un ángulo es la semirrecta que lo divide en dos partes iguales).*

Los resultados a estos los problemas se dan en la tabla siguiente. Las respuestas de tipo 1 corresponden a respuestas muy incorrectas, que demuestran limitaciones importantes en la comprensión del enunciado de los problemas, en la capacidad validativa, etc. Las respuestas 2, 3, 4 y 5 se corresponden con los cuatro tipos de esquemas personales de demostración anteriormente considerados en orden numérico creciente de 1 a 4.

Frecuencias y porcentajes de los tipos de respuestas

	Problema 1 (Aritmética)			Problema 2 (Geometría)		
Respuesta	Frecuencia	%	% Acumulativo	Frecuencia	%	% Acumulativo
1	16	3,7	3,7	34	7,9	7,9
2	48	11,2	14,9	85	19,8	27,7
3	122	28,4	43,4	75	17,5	45,2
4	39	9,1	52,5	53	12,4	57,6
5	204	47,5	100,0	182	42,4	100,0

Puede observarse que el porcentaje de estudiantes que resolvieron correctamente cada uno de los dos problemas *no alcanzó el 50%.* Ese porcentaje se redujo hasta el *32,9* cuando se cuantificaron las respuestas conjuntas de los dos problemas, de manera que *sólo 141 de los 429* estudiantes a los que se pasó la prueba resolvieron correctamente ambos problemas.

De acuerdo con esos resultados del apartado anterior y otros aportados por otros investigadores, referidos anteriormente, puede decirse que un porcentaje importante de estudiantes acude espontáneamente a argumentaciones empírico-inductivas para hacer demostraciones matemáticas. Es decir, como sistema de demostración acude a una comprobación del enunciado en varios casos particulares, con intención de confirmar su cumplimiento de una forma generalizada.

De acuerdo con investigaciones posteriores, que aún estamos analizando, podemos pensar que una mayoría de estudiantes de nivel universitario puede llegar a aceptar, a partir de las explicaciones del profesor, las demostraciones deductivas formales como formas más elaboradas de demostración, más completas, con superior potencialidad validativa. Pero en situaciones problemáticas nuevas, donde tienen que poner en funcionamiento sus modos argumentativos espontáneos, una proporción importante de estudiantes, que ya han aceptado la superioridad teórica de la demostración deductiva (formal o informal) sobre la empírico-inductiva, reproducen esquemas validativos de este último tipo. De forma que tenemos que pensar que son estos esquemas, los empírico-inductivos, los que realmente resultan más convincentes para un porcentaje importante de alumnos, incluso de nivel universitario. En todo caso, dejamos abierta esta afirmación a posteriores análisis.

2.3. Relaciones entre esquemas personales y significados institucionales de la demostración matemática

Las actuales tendencias en educación matemática consideran la actividad matemática desde una perspectiva social y cultural, interpretando los objetos matemáticos como entidades culturales socialmente compartidas. En esa línea, Godino y Batanero (1998) consideran que los conocimientos individuales de los sujetos están mediatizados por las particularidades del conocimiento desarrollado en el seno de las instituciones en que participan los sujetos.

Bajo esa perspectiva, los esquemas personales de demostración pueden relacionarse con los significados institucionales de la demostración. Puede considerarse que los esquemas personales de demostración matemática que manifiestan los estudiantes guardan relación con los diferentes significados que la demostración tiene en contextos institucionales en los que los estudiantes se encuentran inmersos, como pueden ser la vida cotidiana, las clases de ciencias experimentales, las clases de matemáticas, etc.

En la vida cotidiana existe un tipo de demostración, de argumentación de carácter intuitivo, que permite a los sujetos formular conjeturas, resolviéndolas por mecanismos de ensayo y error. Es una argumentación que, de acuerdo con Miller-Jones (1991), se apoya en el lenguaje natural, es muy dependiente del contexto concreto en que esté situado el individuo que desarrolla la argumentación, e incluso de sus estados de ánimos. El estudiante incorpora a las clases de matemáticas esta forma de argumentación que utiliza en la vida cotidiana. La llamaremos *argumentación intuitiva*.

En contraste con la argumentación intuitiva de la vida cotidiana, la argumentación científica tiene un sentido validativo de más largo alcance, orientado a la creación de conocimientos científicos, explicables de forma racional y objetiva, con un continuo sometimiento al tamiz de la prueba experimental. La prueba científica, basada en la comprobación experimental, penetra en el ámbito matemático y da origen a una forma de argumentación matemática, que llamaremos *prueba empírico-inductiva*, que permite efectúar un primer movimiento validativo mediante la comprobación de la proposición a demostrar en diferentes casos particulares. Es una forma de argumentación que el profesor suele utilizar en clase de matemáticas con fines explicativos.

En la matemática profesional se utilizan dos tipos de demostración. Por un lado una demostración informal, una argumentación de carácter deductivo, pero sustentada en la intuición, en el uso de variados procedimientos informales (elementos gráficos, relaciones analógicas, generalizaciones inductivas, etc.). Por otro, una demostración de carácter deductivo formal, desarrollada en un lenguaje con un fuerte componente simbólico, efectuando una estricta derivabilidad axiomática, formal. Hablaremos de *demostración deductiva, informal y formal*, respectivamente, para referirnos a estos dos modos de demostración matemática. En las clases de matemáticas, los estudiantes entran en contacto con estos dos tipos de argumentación, que suelen usar los profesores, en diferentes momentos de su acción docente.

Vemos, por consiguiente, que existen variados modos de argumentación matemática que se complementan y que nosotros proponemos incorporar al significado del objeto *demostración matemática*, que para nosotros es un objeto rico, complejo, pleno de matices.

Partiendo de nuestro estudio acerca de los esquemas personales de demostración matemática, y de su posible relación con los significados de la demostración en distintos contextos institucionales, nuestra propuesta es ampliar el estricto sentido formalista que la interpretación dominante en la institución matemática atribuye hoy a la demostración matemática y considerar que *tanto la argumentación intuitiva, como la prueba empírico-inductiva, como la demostración deductiva informal como la demostración deductiva formal constituyen aspectos complementarios de la demostración matemática, que representa un proceso activo, vivo, que comporta distintas fases, desde la formulación inicial de las primeras conjeturas hasta los procesos finales de expresión formalizada de la demostración.*

Esa ampliación del objeto demostración matemática permitiría recoger mejor los variados modos de prueba que desde distintos ámbitos institucionales y personales se utilizan para validar las proposiciones matemáticas, y que aparecen más cercanos a los usos argumentativos espontáneos de los estudiantes.

LA DEMOSTRACIÓN MATEMÁTICA EN EL AULA

3.1. Formas de demostración en el aula

La demostración en clase de matemáticas presenta una gran diversidad de formas, apareciendo en los distintos niveles educativos los variados tipos de argumentaciones analizados en los apartados anteriores.

En Primaria predomina una matemática informal. Los conceptos matemáticos aparecen imbricados con objetos y situaciones de la vida cotidiana, de la realidad física y social. La argumentación prototípica es una argumentación informal de carácter muy intuitivo.

Al respecto, los Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática elaborados por el National Council of Teachers of Mathematics de los EEUU de América (NCTM, 1989), ya considerados anteriormente, plantean para el ciclo P-4 (que puede hacerse corresponder, aproximadamente, con Educación Infantil y los dos primeros ciclos de Educación Primaria, en nuestro sistema educativo), que (p. 28):

> "Durante estos años, el razonamiento matemático debe incluir todo tipo de pensamiento informal, conjeturas y validaciones que ayuden a los niños a darse cuenta de que las matemáticas tienen sentido…
> Debe intentarse que los niños justifiquen sus soluciones, sus procesos de pensamiento y sus conjeturas, y que además lo hagan de diversas formas. Los modelos manipulativos y otros modelos físicos les ayudan a relacionar los procedimientos y algoritmos con los hechos conceptuales que los apoyan y proporcionan objetos concretos a los que hacer referencia a la hora de explicar y justificar sus ideas…".

En Secundaria las formas prototípicas de argumentación son la prueba empírico-inductiva y la demostración deductiva informal.

Para el ciclo 5-8 (que corresponde, aproximadamente, con el tercer ciclo de Educación Primaria y primer ciclo de ESO, en nuestro sistema educativo), los Estándares plantean como objetivo un tipo de razonamiento fundamentado en lo concreto, en métodos inductivos y en formas deductivas elementales. Así, afirman (p. 79):

> "Mientras la mayor parte de los estudiantes de quinto grado continúan ejerciendo un pensamiento concreto que depende de un contexto físico o específico para poder percibir regularidades y relaciones, muchos alumnos de octavo grado son ya capaces de

> razonamiento más formal y de abstracción. No obstante, incluso los estudiantes más avanzados de los niveles 5-8 pueden hacer uso de materiales concretos para apoyar su razonamiento…”

Y también (p. 148):

> “En los niveles 5-8, los estudiantes habrán experimentado el razonamiento inductivo y la evaluación y construcción de argumentos deductivos sencillos en diversos contextos de resolución de problemas”.

Los Estándares plantean, para el ciclo 9-12 (que podría hacerse corresponder, aproximadamente, con el segundo ciclo ESO y Bachillerato) que (p. 148):

> “En los niveles 9-12, a medida que los contenidos van siendo más profundos y complejos, debe mantenerse este énfasis en la interacción que se da entre la formulación de hipótesis y el razonamiento inductivo, y en la importancia de la verificación deductiva…”

En la Educación Universitaria, es más habitual el contacto con la demostración deductiva formal, con el rigor deductivo. Los estudiantes universitarios han de familiarizarse con el hecho de que la argumentación deductiva formal es el método por el que se establece, en último término, la validación de los teoremas matemáticos.

3.2. Finalidad de la demostración matemática en el aula

La finalidad que pueda tener la demostración en clase de matemáticas puede conceptualizarse analizando las propuestas de los Estándares que señalan como objetivos los siguientes:

> “En los niveles P-4, el estudio de las matemáticas debe hacer hincapié en el razonamiento, para que los estudiantes sean capaces de:
> - llegar a conclusiones lógicas en matemáticas;
> - usar modelos, hechos conocidos, propiedades y relaciones para explicar sus ideas;
> - justificar sus respuestas y sus modelos resolutivos;
> - hacer uso de sus estructuras conceptuales y conexiones para analizar situaciones matemáticas;
> - creer en el significado de las matemáticas”.

> “En los niveles 5-8, el razonamiento debe impregnar todo el currículo de matemáticas para que los estudiantes sean capaces de
> - reconocer y aplicar razonamientos deductivos e inductivos;
> - entender y aplicar procesos de razonamiento, con especial atención
> al razonamiento espacial y al razonamiento con proporciones y gráficas;
> - hacer y evaluar conjeturas y argumentos matemáticos;
> - dar validez a sus propias ideas;
> - apreciar la utilidad y la potencia que tiene en toda situación el razonamiento como parte de las matemáticas”.

"En los niveles 9-12, el currículo de matemáticas debe incluir experiencias numerosas y variadas que refuercen y amplíen las destrezas de razonamiento lógico para que todos los estudiantes sean capaces de:
- elaborar y comprobar conjeturas;
- formular contraejemplos;
- seguir argumentos lógicos;
- juzgar la validez de un argumento;
- construir argumentos sencillos validos".

3.3. Valor de la demostración matemática en el aula

El valor de la enseñanza de la demostración matemática en el aula varía de unos niveles educativos a otros, como se puede deducir de la lectura de los apartados anteriores, pero su valor general es de ayudar a comprender la necesidad de validar las diferentes proposiciones matemáticas que se aprenden en el aula, dentro de un objetivo más amplio cual es el de ayudar a comprender la necesidad de validar modo objetivo el conocimiento científico.

Es la prueba científica -la demostración matemática en nuestro ámbito- la que diferencia el conocimiento científico de la mera creencia, de la simple intuición.

En nuestro marco sociocultural hay una cierta tendencia a rutinizar el aprendizaje matemático, a enseñar a usar los teoremas matemáticos, a aplicarlos en la resolución de problemas, pero sin ayudar a comprender adecuadamente cómo se obtienen dichos teoremas, cómo se demuestran. Por ejemplo, se enseña a usar calcular las áreas de las figuras, sin permitir comprender el por qué de dichos algoritmos, el por qué de esas fórmulas. Con lo que se obtiene un aprendizaje mecánico, sin fundamento teórico, sin base, que establece una distancia abismal entre el alumno y el "saber sabio", el saber institucional. La matemática aparece, así, para los alumnos algo que no se puede llegar a entender, que es útil, pero que no es comprensible, que hay que aprender "de memoria".

La utilidad formativa de la demostración matemática aparece, para nosotros, como parte de una utilidad más general, cual es la de aprender a razonar en matemáticas. A razonar de forma operativa, para resolver problemas, y para justificar el cumplimiento generalizado de las proposiciones matemáticas que usan en dichos procesos de resolución de problemas, lo que ayuda a los estudiantes a construir un edificio matemático inteligente, lógico y no sólo funcional.

NUEVAS PERSPECTIVAS TEÓRICAS PARA LA DEMOSTRACIÓN MATEMÁTICA. CONSIDERACIONES SEMIÓTICAS

4.1. Introducción

En línea con el interés creciente de la comunidad de investigadores en educación matemática por el uso de nociones semióticas en el estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas anteriormente comentado, Godino y Batanero (1994, 1998) y Godino (1999) vienen desarrollado un modelo sobre el significado de los objetos matemáticos, desde presupuestos semióticos. Inspirados en ese modelo, nosotros venimos elaborando uno propio que permita integrar la noción de demostración matemática.

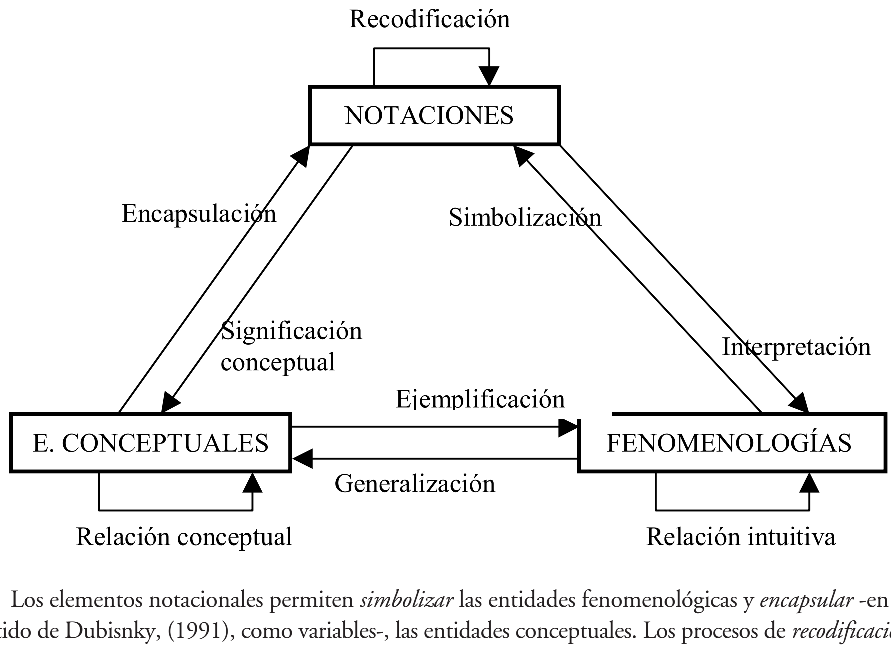
En nuestro modelo, cada objeto matemático es un complejo de entidades elementales, de los siguientes tipos:

- *Notaciones,* incluyendo en esta denominación todo tipo de sistemas de representación usados en la descripción del objeto (términos, expresiones, enunciados, símbolos gráficos, tablas, diagramas, etc.)
- *Fenomenologías,* considerando como tales las diferentes situaciones-problemas de tipo matemático -que matematizan situaciones y fenómenos de la vida cotidiana, del mundo natural y social, así como de la propia matemática-, a las que el objeto puede ser aplicado.
- *Elementos conceptuales,* es decir, las diferentes abstracciones (conceptos, esquemas conceptuales, procedimientos algorítmicos, proposiciones, teorías, etc.) que conforman la expresión teórica del objeto matemático.

Las categorías de entidades se relacionan con las que aparecen en la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud (1982), para quien un concepto es una tripleta formada por el "*conjunto de situaciones que hacen significativo el concepto, el conjunto de invariantes que constituyen el concepto y el conjunto de representaciones simbólicas usadas para presentar el concepto, sus propiedades y las situaciones a las que se refiere*" (p. 36)

Las relaciones entre los elementos conceptuales, los signos usados para representarlos y los contextos fenomenológicos a los que matematizan han sido modelizadas por muy diversos autores mediante esquemas de tipo triangular. Entre estos esquemas destacan el triángulo semiótico que presenta Steinbring (1997). Los elementos que incluye Steinbring son *concepto*, *signo/símbolo* y *objeto/contexto de referencia*.

Inspirados en esta tríada, podemos a esbozar un modelo de relaciones entre las entidades básicas, que conforman cualquier objeto matemático, que expresamos mediante el siguiente diagrama:



Los elementos notacionales permiten *simbolizar* las entidades fenomenológicas y *encapsular* -en el sentido de Dubisnky, (1991), como variables-, las entidades conceptuales. Los procesos de *recodificación* permiten traducir unos sistemas de representación en otros (enunciados verbales mediante gráficos, etc.).

Las fenomenologías permiten *interpretar* los elementos notacionales y también *ejemplificar* las entidades conceptuales.

Las entidades conceptuales aportan *significación conceptual* a los elementos notacionales, mediante un proceso de *generalización,* a partir de variadas situaciones fenomenológicas. Las *relaciones intuitivas* que emergen de las situaciones fenomenológicas constituyen conjeturas, que inducen *relaciones teóricas* entre entidades conceptuales.

4.2. La demostración matemática como cadena de relaciones semióticas

Hemos analizado en el capítulo 2 la variedad de aspectos que conforman la demostración matemática, desde la sencilla argumentación informal que acompaña la formulación de conjetura, hasta la rigurosa demostración deductiva formal que constituye la forma validativa propia de la matemática profesional.

Entendemos que el modelo semiótico presentado en el apartado anterior permite integrar de forma operativa esos diferentes aspectos de la demostración matemática en un todo, en una misma entidad. En concreto, proponemos considerar la demostración como una *cadena de relaciones semióticas*.

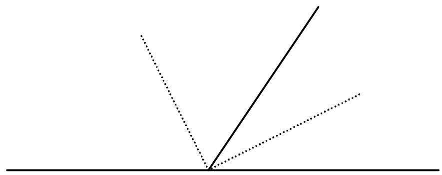
Entendemos que la realización de una demostración desencadena en primer lugar procesos interpretativos (respecto al enunciado del teorema a demostrar) por parte de la persona que ha de desarrollar la demostración. Para efectuar la *interpretación* del enunciado el resolutor ha de relacionar el enunciado con un contexto *fenomenológico* que le resulte familiar. La *simbolización* de los objetos fenomenológicos introduce una *recodificación* del enunciado del problema. La interpretación fenomenológica utilizada favorece el surgimiento de sencillas *relaciones intuitivas,* conjeturas, relacionadas con el teorema a probar. Esas conjeturas se puede comprobar, mediante procedimiento empírico-inductivos, mediante *ejemplificaciones* en casos concretos, a partir de las cuales puede efectuarse un proceso de *generalización*, de desarrollo de *relaciones teóricas*, que puede conducir a la *encapsulación* de elementos implicados en la demostración, a su sustitución por variables simbólicas, prescindiendo de su *significación conceptual*, dando lugar al desarrollo formalizado de la demostración.

A continuación vamos a aplicar estas ideas a una demostración concreta, tomada como ejemplo, para explicar de forma concreta el modelo. Se trata de la demostración de una proposición geométrica elemental, que aparecía como problema incluido en el cuestionario anteriormente considerado para caracterizar esquemas de demostración.

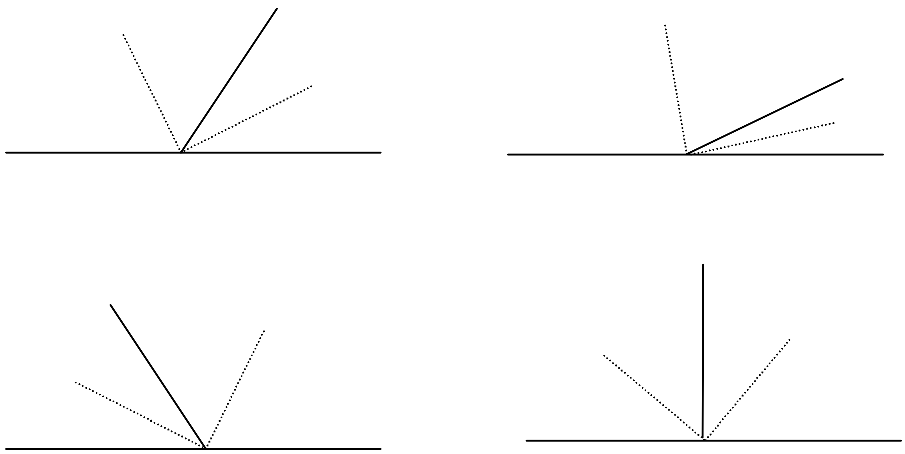
Problema: *Demuestra que las bisectrices de dos ángulos adyacentes cualesquiera forman un ángulo recto. (Recuerda que dos ángulos son adyacentes si tienen el vértice y un lado en común y suman un ángulo llano, es decir 180º. Un ángulo recto mide 90º. La bisectriz de un ángulo es la semirrecta que lo divide en dos partes iguales).*

Desde el punto vista semiótico, la tarea propuesta por el investigador (emisor) desencadena en primer lugar procesos interpretativos por parte de los estudiantes (destinatarios) de la misma. Las palabras y expresiones que desencadenan procesos interpretativos son las siguientes: *demuestra, ángulo, vértice de un ángulo, lados de un ángulo, semirrecta, bisectriz de un ángulo, ángulo recto, ángulo llano, ángulos adyacentes, división de un ángulo en partes, suma de ángulos, igualdad de ángulos, medida de ángulos, el grado como unidad de medida de ángulos, 180º, 90º.*

Para efectuar la *interpretación* del enunciado se suele relacionar éste con un contexto *fenomenológico* habitualmente usado para la geometría euclídea elemental, cual es el de las representaciones gráficas mediante papel y lápiz. Esta interpretación permite una *recodificación* del enunciado del problema mediante la aplicación de diagramas como los aportados por los estudiantes a los que se aplicó la prueba. La interpretación fenomenológica utilizada favorece el surgimiento de sencillas *relaciones intuitivas*, de conjeturas elementales, como que el ángulo formado por las bisectrices es recto, por simple inspección ocular:



Esa conjetura se puede comprobar, mediante un procedimiento empírico-inductivo, considerando distintos casos concretos, que constituyen *ejemplificaciones* del enunciado general:



Esas ejemplificaciones pueden hacerse más matizadas, introduciendo medidas numéricas. Así, si un ángulo es de 120º y otro es de 60ª, sus bisectrices forman ángulos de 60º y 30º, que suman 90º. Análogamente para ángulos de 150º y 30º, ángulos de 90º (ambos), etc.

Puede iniciarse un comienzo de *generalización*, usando símbolos para designar a los ángulos. Se representan los ángulos por las letras *a* y *b*, de forma que, por ser ángulos adyacentes, ha de cumplirse que *a + b = 180º.* Entonces los casos anteriores se representan como:

a = 120º, b = 60º, a/2 + b/2 = 60º + 30º = 90º

a = 150º, b = 30º, a/2 + b/2 =75º + 15º = 90º

a = 90º, b = 90º, a/2 + b/2 = 45º + 45º = 90º

apareciendo sintetizado el resultado como el resultado como:

a + b = 180º; a/2 + b/2 = 90º

Puede efectuarse un proceso de abstracción mayor, considerando las letras como variables genéricas, representativas de ángulos cualesquiera. Lo que se traduce en un proceso de *encapsulación* de los conceptos representados por dichos símbolos. Encapsuladas los conceptos, el proceso de demostración se hace formal, se efectúa teniendo en cuenta sólo las reglas de transformación de expresiones propias del campo en cuestión (álgebra elemental), sin necesidad de tener en cuenta la *significación conceptual* de tales símbolos algebraicos, en el contexto del problema en cuestión:

a + b = 180º, a/2 + b/2 = (a + b)/2 = 180º/2 = 90º

La demostración aparece, así, como una concatenación de procesos, como una cadena de relaciones semióticas entre los objetos implicados, de forma que la demostración estrictamente deductiva no es sino la última fase de una argumentación que ha comenzado por la interpretación del enunciado del teorema a demostrar, formulación de conjeturas, etc.

REFERENCIAS

Dieudonné, J. (1987). The concept of 'rigorous proof'. *The Mathematical Gazzete* 80: 204-206.

Dubinski, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D. Tall. (Ed.): *Advanced mathematical thinking* (pp. 95-123). Dordrecht: Kluwer A.P.

Fischbein, E. (1982). Intuition and proof. *For the learning of mathematics,* 3 (2): 9-24.

Godino, J. D. (1999). Análisis epistémico, semiótico y didáctico de procesos de instrucción matemática. (Trabajo presentado en el Grupo de Trabajo "*La Didáctica de la Matemática como Disciplina Científica*". III Simposio de la SEIEM, Valladolid) (http://www.ugr.es/~jgodino/semioesp/aepistemico.htm)

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matematicos. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 14 (3): 325-355.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in mathematics education. En A. Sierpinska y J. Kilpatrick (Eds.): *Mathematics Education as a research domain: A search for identity* (pp. 177-195). Dordrecht: Kluwer, A. P.

Hanna, G. (1995). Challenges to the importance of proof *For the Learning of Mathematics* 15 (3): 42-49

Harel, G. y Sowder, L.: 1998, Students' Proof Schemes. En E. Dubinsky, A. Schoenfeld, & J. Kaput (Eds.), *Research on Collegiate Mathematics Education*, Vol.III, pp.234-283, A.M.S.

Kline, M. (1980). *Matemáticas. La pérdida de la certidumbre.* Madrid: Siglo XXI[1985] .

Knowless, M. H. (1998). What is "Proof"?! - in mathematics. *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof* (URL: http://www.cabri.net/Preuve)

Lakatos, I. (1976). *Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático.* Madrid: Alianza Editorial [1978].

Livingston, E. (1987). *The ethnomethodological foundations of mathematics.* London: Routledge.

Martin, W. G. y Harel, G. (1989). Proof frames of preservice elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education* 20 (1): 41-51.

M.E.C. (1991). *Curriculo de Educación Secundaria*. Madrid: Ministerio de Educación y Cultura.

Miller-Jones, D. (1991). Informal Reasoning in inner-city children. En J. F. Voss, D. N. Perkins y J. W. Segal (Ed.): *Informal Reasoning and Education*. Hillsdale, N.Y.: Lawrence Erlbaum, A. P.

NCTM. (1989), *Curriculum and Evaluation Standards for Schools Mathematics*, Reston, Va: The Council. Sociedad Andaluza de Educación Matemática [1991].

Recio, A. M. y Godino, J. D. (1996). Assessment of university students' reasoning capacities. En R. Luengo (Ed.): *Proceedings of the 8th International Congress on Mathematical Education* (p. 280), Sevilla.

Recio, A.M. (2000). *Una aproximación epistemológica a la enseñanza y el aprendizaje de la demostración matemática.* Servicio de Publicaciones. Universidad de Córdoba.

Resnick, M. D. (1992). Proof as a source of truth. En: M. Detlefsen (Eds.): *Proof and knowledge in mathematics* (pp. 6-32). London: Routledge.

Robinet, J. (1983): Un experience d´ingenierie didactique sur la notion de limite de fonction. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol 4.3, 223-292.

Schwichtenberg, H. (1992). *Proof as programs, Collection: Proof Theory* (Leeds, 1990). Cambridge Univ. Press, 79-113.

Senk, S. L. (1985). How well do students write geometry proofs? *Mathematics Teacher* 78: 448-456.

Steinbring, H. (1997). Epistemological investigation of classroom interaction in elementary mathematics teaching. *Educational Studies in Mathematics* 32: 49-92.

Tall, D. (1996): Functions and Calculus. En Bishop, A.(ed.), *International Handbook of Mathematics Education.* Dordrecht: Kluwer, 289-325.

Vergnaud, G. (1982). Cognitive and development psychology and research in mathematics education: some theoretical and methodological issues. *For the Learning of Mathematics* 3, 2: 31-41.